Beiträge zum Metaaussagenkalkül I.

Von M. Wajsberg in Lomza (Polen).

Einleitung.

Vorliegende Abhandlung enthält einige meiner Ergebnisse über Unabhängigkeitsbeweise nach der Matrizenmethode sowie über das Problem der Axiomatisierbarkeit von endlichen Matrizen[1]). § 1 dieser Arbeit enthält terminologische Erklärungen sowie Einführung in die Matrizenmethode für Unabhängigkeitsbeweise. In § 2 wird bewiesen, daß Unabhängigkeitsbeweise nach dieser Methode nicht stets vermittels Matrizen mit endlichvielen ausgezeichneten Werten durchführbar sind[2]).

Schließlich enthält § 3 den Beweis, daß jede endliche normale Matrix axiomatisierbar ist, die von den folgenden Aussagen erfüllt wird: $CCpqCCqrCpr$, $CCqrCCpqCpr$, $CCqqCpp$, $CCpqCNqNp$, $CNqCCpqNp$. Letzterer Satz ist eine wesentliche Verschärfung meines **Satzes 24** in $L-T$.

§ 1. Terminologische Erklärungen und Definition der Matrizenmethode.

1. 1. Aussagen werden aus Aussagevariablen p, q, r, ... (ev. mit Indizes oder Akzenten) vermittels der Operationen Cpq und Np gebildet (Schreibweise von J. Lukasiewicz). — Die in vorliegender Arbeit dargelegten Ergebnisse lassen sich mit leicht zu ersehenden Änderungen auch auf den Fall ausdehnen, wenn noch weitere Funktionszeichen hinzukommen oder das Zeichen N wegfällt. (Aussagen

[1]) Über den Begriff der logischen Matrix vgl. Lukasiewicz und Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, Comptes Rendus de la Soc. d. Sciences et d. Lettres de Varsovie, **23**, 1930. Diese Arbeit wird im folgenden als $L-T$ zitiert.

[2]). Ein verwandtes Ergebnis ist früher von K. Gödel erhalten worden, war mir aber zur Zeit der Einsendung dieser Arbeit in die Redaktion der vorliegenden Zeitschrift unbekannt. — Vgl. Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Wien, Heft 4, S. 9—10.

ohne N werden wir als C-Aussagen bezeichnen.) — Die Bedeutung von Cpq und Np (bei Lukasiewicz: wenn p, so q bzw. nicht wahr, daß p) können wir hier unbestimmt lassen, doch ist der Gebrauch von Cpq durch die im folgenden zu verwendende Beweisregel eingeschränkt: Aus $C\alpha\beta$ und α ist erlaubt β zu folgen. — Letztere Regel werden wir nach dem Brauch der Warschauer Logiker-Schule als Abtrennungsregel bezeichnen.

2. Gebrauch der Variablen: Variable für Aussagen: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; Variable für Individuen oder Zahlen: $x, y, z, a, b, c, c, d, e$; Variable für natürliche Zahlen (einschließlich der Null, wenn nicht anderes explizit festgelegt wird): i, j, k, l, m, n; Variable für Aussagenmengen: X, Y, Z; Variable für Matrizen: $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$.

3. Ich gebrauche die folgenden geläufigen mengentheoretischen Bezeichnungen: $X+Y$ (Summe, Vereinigung), $X.Y$ bzw. XY (Durchschnitt), $\overline{X}$ (Komplementärmenge), $\alpha \varepsilon X$ (α ist Element von X), $\alpha \varepsilon \overline{X}$ (α ist nicht Element von X), $X \subset Y$ (X ist Teilmenge von Y), 0 (Nullmenge). $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon X$ bedeutet dasselbe wie: $\alpha, \beta, \ldots$ sind Elemente von X. $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ bedeutet die Menge die aus $\alpha, \beta, \ldots$ besteht; insbesondere bedeutet $\{\alpha\}$ die Menge, die aus α als einzigem Elemente besteht.

4. Aussagen werden nur dann als verschieden betrachtet, wenn sie von verschiedener Form sind. Ersetzen wir in einer Aussage α gewisse Variable $p, q, \ldots$ bezüglich durch die Aussagen $\gamma, \delta, \ldots$, so haben wir damit in α die Einsetzung $p/\gamma, q/\delta, \ldots$ ausgeführt. Das Ergebnis dieser Einsetzung wollen wir mit $\alpha p/\gamma q/\delta \ldots$ bezeichnen.

Z. B. gilt $Cqq = Cppp/q$[3]. — Entsteht eine Aussage β aus einer Aussage α vermittelst Einsetzung so ist β eine Substitution von α, in Zeichen: $\beta \varepsilon Sb(\alpha)$. Die Menge aller Substitutionen der Elemente einer Menge X werden wir mit $Sb(X)$ bezeichnen.

5. Aus zwei Aussagen $C\alpha\beta$ und α entsteht β durch die Operation der Abtrennung.

6. $\alpha \varepsilon Fl(X)$ (in Worten: α ist eine Folgerung von X, ist ableitbar aus X u. dgl.), wenn es eine endliche Aussagenfolge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gibt, so daß $\alpha_n = \alpha$ sowie jedes Glied dieser Folge entweder zu X gehört oder aus gewissen vorangehenden Gliedern dieser Folge vermittelst Einsetzung oder Abtrennung entsteht. — Statt $Fl(\{\alpha\})$ werden wir schreiben $Fl(\alpha)$ und dementsprechend von Folgerungen von einzelnen Aussagen sprechen.

7. α ist unabhängig von X, wenn $\alpha \varepsilon \overline{Fl(X)}$. Um nachzuweisen, daß eine gegebene Aussage α von einer Aussagenmenge X unabhängig

[3]) Analog werde ich gebrauchen die Ausdrucksweise „Satz $N\alpha/\beta, \ldots$“.

ist, zeigt man gewöhnlich, daß α eine gewisse Eigenschaft nicht besitzt, die sämtlichen Elementen von X zukommt und die sich vermittelst Einsetzung und Abtrennung forterbt. Oder umfangslogisch gesprochen: bezeichnet man (mit A. Tarski) als System jede Menge, die sämtliche ihre Folgerungen enthält, so zeigt man, daß $\alpha \overline{\varepsilon} Fl(X)$, indem man die Existenz eines Systems Y aufweist, derart daß $X \subset Y$ aber $\alpha \overline{\varepsilon} Y$.

Die leichteste und fruchtbarste Methode derartige Systeme zu erzeugen, ist die Matrizenmethode, die im folgenden erklärt und untersucht wird[4]).

2. 1. Jede (logische) Matrix $\mathfrak{M}$ ist durch zwei Mengen $A(\mathfrak{M})$, $B(\mathfrak{M})$ und zwei Funktionen $C_{\mathfrak{M}}(x, y)$, $N_{\mathfrak{M}}(x)$ vollständig bestimmt, für welche folgende Bedingungen gelten, wobei unter $W(\mathfrak{M})$ die Menge $A(\mathfrak{M}) + B(\mathfrak{M})$ zu verstehen ist:

a) $A(\mathfrak{M}) \,.\, B(\mathfrak{M}) = 0$,

b) $A(\mathfrak{M}) \neq 0$, $B(\mathfrak{M}) \neq 0$.

c) Wenn $x, y \,\varepsilon\, W(\mathfrak{M})$, so $C_{\mathfrak{M}}(x, y)$, $N_{\mathfrak{M}}(x) \,\varepsilon\, W(\mathfrak{M})$.

d) Wenn $x \,\varepsilon\, B(\mathfrak{M})$ und $y \,\varepsilon\, A(\mathfrak{M})$, so $C_{\mathfrak{M}}(x, y) \,\varepsilon\, A(\mathfrak{M})$.

Anmerkung 1. Die von mir oben angenommene Erklärung des Begriffes der Matrix unterscheidet sich von derjenigen von A. Tarski (vgl. $L - T$, Def. 3) wesentlich durch Hinzufügung der Punkte *b)* und *d)*. A. Tarski bezeichnet eine Matrix, für welche die Bedingung *d)* besteht als normal. Dementsprechend wollen wir letztere Bedingung im folgenden als Normalheits-Bedingung bezeichnen. — In der Praxis pflegt man als Matrix $\mathfrak{M}$ die Definition von $A(\mathfrak{M})$, $B(\mathfrak{M})$ (oder z. B. $W(\mathfrak{M})$, $B(\mathfrak{M})$) $C_{\mathfrak{M}}(x, y)$ und $N_{\mathfrak{M}}(x)$ zu bezeichnen.

2. Die Menge $W(\mathfrak{M})$ werden wir als Wertmenge von $\mathfrak{M}$ bezeichnen, ihre Elemente als $\mathfrak{M}$-Werte oder Werte von $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}$ heißt endlich bzw. unendlich zugleich mit $W(\mathfrak{M})$. — Die Elemente von $B(\mathfrak{M})$ werden gewöhnlich nach P. Bernays als ausgezeichnete Elemente von $\mathfrak{M}$ bezeichnet. — Die Werte einer jeden Matrix $\mathfrak{M}$ werden wir uns stets vermittels gewisser Zeichen benannt denken, die wir der Bequemlichkeit halber mit den zugehörigen Werten identifizieren werden. — Setzen wir in einer Aussage α für sämtliche Variable $\mathfrak{M}$-Werte ein, so erhalten wir stets einen Ausdruck, der einen gewissen $\mathfrak{M}$-Wert darstellt, wenn man die Funktionen Cpq und Np als gleichbedeutend mit $C_{\mathfrak{M}}(p, q)$ bzw. $N_{\mathfrak{M}}(p)$ setzt. Besitzt eine Aussage α die Eigenschaft, daß α bei jeder Einsetzung von $\mathfrak{M}$-Werten für sämtliche Variable einem

---

[4]) Diese Methode geht auf P. Bernays und J. Lukasiewicz zurück. Vgl. hierzu Fußnote [5]) von $L - T$.

Element von $B(\mathfrak{M})$ gleich wird, so werden wir sagen, daß α $\mathfrak{M}$-wahr ist oder daß α die Matrix $\mathfrak{M}$ erfüllt (auch: befriedigt, genügt u. dgl.) — in Zeichen: $\alpha \varepsilon \mathrm{E}(\mathfrak{M})$.

Es gilt dann der folgende aus den Bedingungen a, c, d leicht zu ersehende Satz:

Für jede Matrix $\mathfrak{M}$ ist $\mathrm{E}(\mathfrak{M})$ ein System; oder m. a. W.: Aus $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ und $\alpha \overline{\varepsilon} \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ folgt stets $\alpha \overline{\varepsilon} Fl(X)$.

Zum Beweise beachte man, daß aus den Bedingungen $a)$, $c)$, $d)$ von **21**. die folgenden Formeln folgen:

c') $Sb(\mathrm{E}(\mathfrak{M})) \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$.

d') Wenn $C\alpha\beta$, $\alpha \varepsilon \mathrm{E}(\mathfrak{M})$, so $\beta \varepsilon \mathrm{E}(\mathfrak{M})$.

Anmerkung 2. Man könnte die Bedingung d) oben durch d') ersetzen, wodurch man neue für Unabhängigkeitsbeweise verwendbare Matrizen erhielte, doch für das folgende ist das belanglos. Die Bedingung $A(\mathfrak{M}) \neq 0$ (siehe b) hat zur Folge, daß für keine Matrix $\mathfrak{M}$ die Menge $\mathrm{E}(\mathfrak{M})$ eine Variable enthalten kann. Aus dem soeben erwiesenen Satze entspringt die Matrizen-Methode für Unabhängigkeits-Beweise, die darin besteht, daß man zum Beweise der Unabhängigkeit einer Aussage α von einer Aussagenmenge X eine Matrix $\mathfrak{M}$ angibt, derart daß $X \subset \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ und $\alpha \overline{\varepsilon} \mathrm{E}(\mathfrak{M})$.

Im nächsten § wird bewiesen, daß es gewisse endliche Aussagenmengen X sowie von ihnen unabhängige Aussagen α gibt, derart daß für jede Matrix $\mathfrak{M}$ mit endlichem $B(\mathfrak{M})$ aus $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ stets $\alpha \varepsilon \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ folgt — und deshalb der Beweis, daß α von X unabhängig ist, nicht vermittels einer Matrix mit endlich vielen ausgezeichneten Werten geführt werden kann.

§ 2.

Satz 1. Der Menge $X = \{Cpp, CCNpqCpq, CCNppq\}$ kommen folgende Eigenschaften zu: 1. für eine gewisse Matrix $\mathfrak{M}$ gilt $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ und 2. gilt $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{N})$ für irgendwelche Matrix $\mathfrak{N}$, so ist $B(\mathfrak{N})$ unendlich.

Anmerkung 1. Aus diesen Eigenschaften von X folgt sofort, daß keine Variable aus X ableitbar ist, aber der bezügliche Unabhängigkeitsbeweis nicht vermittels einer Matrix $\mathfrak{N}$ mit endlichem $B(\mathfrak{N})$ geführt werden kann.

Beweis. Eine Matrix $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ definieren wir folgendermaßen: $A(\mathfrak{M}) = \{0\}$, $B(\mathfrak{M}) = \{1, 2, \ldots\}$, $C_{\mathfrak{M}}(x, y) = 1$, wenn $x \leqq y$, $= 0$ sonst; $N_{\mathfrak{M}}(x) = x + 1$ ($\mathfrak{M}$ erfüllt die Normalheitsbedingung, denn wenn $x \varepsilon B(\mathfrak{M})$ und $y \varepsilon A(\mathfrak{M})$, so ist $x > y$ und dann ist $C_{\mathfrak{N}}(x, y) = 0$). Daß die Elemente von X $\mathfrak{M}$-wahr sind, zeigen wir folgendermaßen, wobei wir Cpq, Np bez. für $C_{\mathfrak{M}}(p, q)$, $N_{\mathfrak{M}}(p)$ schreiben: sind p, q beliebige $\mathfrak{M}$-Werte, dann gilt folgendes:

1. $Cpp = 1$ (weil $p \leqq p$) und daher ist Cpp $\mathfrak{M}$-wahr.

2. Nehmen wir $CNpq = 0$ an, so wird $CCNpqCpq = C0Cpq = 1$ (weil $C0x = 1$ für jedes $x \varepsilon W(\mathfrak{M})$ gilt); setzen wir dagegen $CNpq = 1$, dann ist $p + 1 \leqq q$, mithin $p < q$ und daher $Cpq = 1$ — folglich ist $CCNpqCpq = C11 = 1$. Damit ist erwiesen, daß $CCNpq Cpq \varepsilon \mathrm{E}(\mathfrak{M})$.

3. Es gilt $CNpp = 0$, weil $Np = p + 1 > p$; somit ist $CCNppq = C0q = 1$, d. h. es ist $CCNppq$ $\mathfrak{M}$-wahr, womit die Formel $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ vollständig erwiesen ist.

Gehen wir nun zum zweiten Teil unserer Behauptung über und nehmen wir im Gegenteil an, daß es eine Matrix $\mathfrak{N}$ mit endlichem $B(\mathfrak{N})$ gibt, derart, daß $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{N})$; wir wollen hieraus einen Widerspruch ableiten: Bemerken wir, daß $CpNp \varepsilon Fl(X)$ (zum Beweise setze man Np für p in Cpp und für q in $CCNpqCpq$ ein), so folgt aus $x \varepsilon B(\mathfrak{N})$ stets $Nx \varepsilon B(\mathfrak{N})$ (wobei wir Nx für $N_{\mathfrak{N}}(x)$ schreiben. Sei nun a irgendein Element von $B(\mathfrak{N})$. Die unendliche Folge $a, Na, NNa \ldots$ besteht dann aus lauter Elementen von $B(\mathfrak{N})$. Aus der Annahme, daß $B(\mathfrak{N})$ endlich ist, folgt daher, daß unendlich viele Glieder dieser Folge identisch sein müssen. Schreiben wir nun N^1x für Nx und $N^{i+1}x$ für $NN^ix\,(i = 1, 2, \ldots)$, so haben wir damit erwiesen, daß für ein gewisses $b \varepsilon W(\mathfrak{N})$ und eine Zahl $k \neq 0$ die Identität $N^kb = b$ besteht. Aus der Voraussetzung $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{N})$ folgt nun insbesondere, daß $Cpp \varepsilon \mathrm{E}(\mathfrak{N})$, woraus mit Rücksicht auf die Formel $N^kb = b$ die Beziehung $CN^kbb \varepsilon B(\mathfrak{N})$ folgt. Ist hierin $k > 1$, so leiten wir vermittels des Elementes von $XCCNpqCpq$ (wo man für p, q bezüglich $N^{k-1}b$ und b einsetze) sofort ab, daß $CN^{k-1}bb \varepsilon B(\mathfrak{N})$. Folglich gilt $CN^1bb \varepsilon B(\mathfrak{N})$, d. h. $CNbb \varepsilon B(\mathfrak{N})$ und hieraus schließen wir mit Hilfe des Elementes von $XCCNppq$, daß $q \varepsilon \mathrm{E}(\mathfrak{N})$, was aber unmöglich ist. Somit muß $B(\mathfrak{N})$ unendlich sein und damit ist unser Beweis vollendet.

Anmerkung 2. Die Elemente der soeben benutzten Menge X sind den folgenden mathematischen Formeln (in Hilbertscher Symbolik) nachgebildet:

$$1.\ p \leqq p, \quad 2.\ p + 1 \leqq q \rightarrow p \leqq q \quad \text{und} \quad 3.\ p + 1 \leqq p \rightarrow q,$$

von den sich analog wie oben zeigen läßt, daß sie zusammen keine Realisierung mit endlichvielen Elementen zulassen.

Die Menge X behält die von uns erwiesenen Eigenschaften bei, wenn man darin die Aussage $CCNpqCpq$ durch $CCqpCqNp$ ersetzt; der bezügliche Beweis verbleibt dann fast ungeändert, denn letztere Aussage erfüllt gleichfalls die oben gebrauchte Matrix $\mathfrak{M}$. Ebenso könnten wir in den Aussagen von X das Zeichen N für ein gewisses $l=2, 3, \ldots$ durch N^l ersetzen. Analog überzeugt man sich, daß man ganz allgemein folgendes behaupten kann:

Satz 2. Sei $X=\{Cpp, CC\alpha qCpq, CC\alpha p\beta\}$, wo $\alpha \neq p$ eine bloß mit der Variablen p gebildete Aussage und β eine von p freie Aussage ist. Gilt dann $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{N})$ für irgendeine Matrix $\mathfrak{N}$ mit endlichem $B(\mathfrak{N})$, so ist $\beta \varepsilon \mathrm{E}(\mathfrak{N})$. — Die Aussage $CC\alpha qCpq$ kann dabei durch $CCqpCq\alpha$ ersetzt werden.

Zum Beweise schreibe man $\alpha(p)$ statt α und betrachte für irgendwelches $a \varepsilon B(\mathfrak{M})$ die Folge $a, \alpha(a), \alpha(\alpha(a)), \ldots$

Unter denselben Voraussetzungen für α und β gilt der folgende, analog zu beweisende

Satz 3. Erfüllt die Menge $X=\{Cpp, CCpqC\alpha q, CCp\alpha\beta\}$ eine endliche Matrix, dann genügt auch β der gleichen Matrix. — Die Aussage $CCpqC\alpha q$ kann durch $CCq\alpha Cqp$ ersetzt werden.

Zum Beweise benütze man die Folge $a, \alpha(a), \ldots$, wo $a \varepsilon W(\mathfrak{M})$.

Beispiele zu Satz 2.

1. Sei $X=\{Cpp, CCNNpqCpq, CCNNppCNNqq\}$. Gemäß Satz 2 $(\alpha/NNp, \beta/CNNqq)$ erfüllt die Menge X keine Matrix $\mathfrak{N}$ mit endlichem $B(\mathfrak{N})$, die auch von $CNNqq$ nicht befriedigt wäre. Nun verifiziert man leicht, daß für die im Beweise von Satz 1 gebrauchte Matrix $\mathfrak{M}$ die Formeln $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ und $\beta \overline{\varepsilon} \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ bestehen. Somit β von X unabhängig und doch kann nicht der bezügliche Beweis vermittels einer Matrix $\mathfrak{N}$ mit endlichem $B(\mathfrak{N})$ erbracht werden. Beachtenswert ist dabei, daß die Elemente von X sowie β beweisbare Formeln des gewöhnlichen Aussagenkalküls darstellen, wenn man C, N bezüglich als Implikation und Negation deutet. Das nämliche gilt von den Elementen der nachstehend definierten Menge Y, die überdies vom Zeichen N frei sind.

2. Sei $Y=\{Cpp, CCCppqCpq, CCCpppCCCqqCqqCqq\}$. Um den Satz 2 anzuwenden setze man $\alpha=Cpp$ und $\beta=CCCqqCqqCqq$. Für folgende Matrix $\mathfrak{M}$ gilt $Y \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ und zugleich $\beta \overline{\varepsilon} \mathrm{E}(\mathfrak{M})$:

$$A(\mathfrak{M})=\{0\}, \quad B(\mathfrak{M})=\{1, 2, \ldots\}, \quad C_{\mathfrak{M}}(x, y)=y+1$$

bei $x \leq y$, $=0$ sonst ($N_{\mathfrak{M}}(x)$ können wir unbestimmt lassen). Der bezügliche Beweis geschieht folgendermaßen, wobei α_1, α_2, α_3 der Reihe nach die Elemente von Y bedeuten:

1. $Cpp = p+1$, weil $p \leqq p$. Demnach gehört α_1 zu $\mathrm{E}(\mathfrak{M})$, denn $p+1$ ist $\geqq 1$.

2. Aus $Cpp = p+1$ folgt $\alpha_2 = CC(p+1)qCpq$; ist dabei $p+1 \leqq q$, so ist auch $p \leqq q$, somit $\alpha_2 = C(q+1)(q+1) \varepsilon B(\mathfrak{M})$; ist aber $p+1 < q$, so ist $C(p+1)q = 0$, somit $\alpha_2 = Cpq + 1 \varepsilon B(\mathfrak{M})$. Mithin ist α_2 $\mathfrak{M}$-wahr.

3. α_3 ist von der Form $CCCppp\beta$; $CCppp = C(p+1)p = 0$, weil $p+1 > p$; somit gilt $\alpha_3 = C0\beta = \beta + 1 \varepsilon B(\mathfrak{M})$. Folglich ist auch α_3 $\mathfrak{M}$-wahr und damit gilt $Y \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$. β erfüllt aber die Matrix $\mathfrak{M}$ nicht, denn β ist als Substitution von $CCppp$ nach dieser Matrix stets gleich 0.

§ 3. Über Axiomatisierbarkeit von Matrizen.

1. **Definition 1.** Eine Matrix $\mathfrak{M}$ ist axiomatisierbar, falls es eine endliche Menge $X \subset \mathrm{E}(\mathfrak{M})$ gibt, so daß $\mathrm{E}(\mathfrak{M}) = Fl(X)$. — Die Menge X ist dann eine Axiomatik von $\mathfrak{M}$.

In diesem § wird bewiesen.

Hauptsatz. Es ist jede endliche Matrix $\mathfrak{M}$ axiomatisierbar, die von den folgenden Aussagen erfüllt wird. $CCpqCCqrCpr$ (Syl_1), $CCqrCCpqCpr$ (Syl_2), $CCpqCNqNp$ (Transp_1), $CNqCCpqNp$ (Transp_2) und $CCqqCpp$ (Id*).

Definition 2. *a.* Für $\gamma = C\beta\alpha$ sei $\alpha = \gamma^0$ und $\beta = \gamma^1$. *b.* Für $\gamma = N\beta$ sei $\beta = \gamma^1$.

Folgen vom Typus „$x, y, \ldots z$“, wo $x, y, \ldots z$ Nullen oder Einsen sind (z. B. die Folgen 0, 01, 110) werde ich als Stellindizes bezeichnen. Als Variable für Stellindizes werde ich die Buchstaben $\varkappa, \lambda, \mu$ gebrauchen. Fügen wir aneinander zwei Stellindizes $\varkappa$ und λ (in dieser Reihenfolge) an, so gewinnen wir einen Stellindex $\varkappa\lambda$ (z. B. für $\varkappa = 01$ und $\lambda = 10$ ist $\varkappa\lambda = 0110$). Statt $(\alpha^0)^0$, $(\alpha^0)^1$, $(\alpha^1)^0$ und $(\alpha^1)^1$ werden wir bez. schreiben α^{00}, α^{01}, α^{10}, α^{11} sowie allgemein $\alpha^{\varkappa\lambda}$ für $(\alpha^{\varkappa})^{\lambda}$ (z. B. gilt $p = (CCpqr)^{11}$, $q = (CCpNqr)^{101}$.

Die Stellindizes werden uns dazu dienen, die Stellen, an denen eine gewisse Aussage β in einer anderen α als Teil vorkommt, genau zu charakterisieren; so gilt z. B. für $\alpha = CCppCqCpp$ und $\beta = Cpp$: $\beta = \alpha^1$ und $\beta = \alpha^{00}$. Jeder Stelle die eine Aussage β in einer von ihr verschiedenen Aussage α, die keine Variable ist, einnimmt, entspricht in leichtverständlichem Sinne ein einziger Stellindex $\varkappa$, so daß $\beta = \alpha^{\varkappa}$ (z. B. entspricht der ersten Stelle (von links) die p in Cpp einnimmt der Index 1.

Definition 3. Vermittels der Satzformel *Ers* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa)$ werden wir andeuten, daß β aus α entsteht, indem in α an der Stelle $\varkappa$ (d. h.

an der Stelle, der der Index $\varkappa$ entspricht) der Teil γ durch δ ersetzt wird; z. B. gilt $Ers\,(Cpp, Cpq, p, q, 0)$. Genau können wir den Begriff Ers durch folgende rekursive Definition erklären (wobei der Strich das Definiendium vom Definiens teilt):

a) $\mathrm{Ers}\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0) \mid \gamma = \alpha^0, \delta = \beta^0$ und $\alpha^1 = \beta^1$.

b) $\mathrm{Ers}\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 1) \mid \gamma = \alpha^1, \delta = \beta^1$ und $\alpha^0 = \beta^0$.

c) Aus $\mathrm{Ers}\,(\alpha^\lambda, \beta^\lambda, \gamma, \delta, \varkappa)$ folgt $\mathrm{Ers}\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda\varkappa)$.

Anmerkung 1. Es gelten, wie leicht ersichtlich, die folgenden Formeln (in Hilbertscher Symbolik):

1. $\mathrm{Ers}\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa) \rightarrow \mathrm{Ers}\,(\beta, \alpha, \delta, \gamma, \varkappa)$.
2. $\mathrm{Ers}\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa) \,\&\, \mathrm{Ers}\,(\gamma, \delta, \gamma', \delta', \lambda) \rightarrow \mathrm{Ers}\,(\alpha, \beta, \gamma', \delta', \varkappa\lambda)$.
3. $\beta = \alpha^\varkappa \backsim \mathrm{Ers}\,(\alpha, \alpha, \beta, \beta, \varkappa)$.

Wir nehmen ferner folgende Bezeichnungen an:

Definition 4.

a) $Ax = \{Syl_1, Syl_2, Transp_1, Transp_2\}$ (d. h. Ax ist die Menge, die aus den Aussagen $Syl_1 = CCpqCCqrCpr$, $Syl_2 = CCqrCCpqCpr$, $Transp_1 = CCpqCNqNp$ und $Transp_2 = CNqCCpqNp$ besteht).

b) $Bew\,(\alpha)$ (α ist beweisbar) $|\alpha \varepsilon Fl(Ax)$.

c) Statt $Bew\,(\alpha)$ werden wir oft bloß α schreiben.

Die Schreibweise „$\alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_n \rightarrow \beta$ wird demnach bedeuten daß β beweisbar ist, sofern das nämliche von den Aussagen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gilt [5]).

d) Ein Index $\varkappa$ ist gerade bzw. ungerade, je nachdem $\varkappa$ eine gerade (d. h. durch 2 teilbare) bzw. ungerade Anzahl von Einsen enthält.

e) Besteht $\mathrm{Ers}\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa)$, wo $\varkappa$ gerade bzw. ungerade ist, so werden wir sagen, daß β aus α entsteht, indem in α an einer geraden bzw. ungeraden Stelle γ durch δ ersetzt wird. — Analog werden wir uns der folgenden Ausdrucksweise bedienen: β entsteht aus α, indem in α an so und so viel geraden (oder ungeraden) Stellen γ durch δ ersetzt wird.

Z. B. entsteht Cqq aus Cpp, indem in Cpp an einer geraden und einer ungeraden Stelle p durch q ersetzt wird.

Satz 1. $C\alpha\beta \,\&\, C\beta\gamma \rightarrow C\alpha\gamma\,(Syl_1\; p/\alpha\, q/\beta\, r/\gamma)$.

Satz 2. $C\alpha\beta \,\&\, C\gamma C\beta\delta \rightarrow C\gamma C\alpha\delta$.

---

[5]) Jedesmal, wenn in der Folge eine Formel vom Typus „$\alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_n \rightarrow \beta$ bewiesen wird, ist auch der folgende Satz wahr: sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ R-wahr, so ist β R-wahr.

Beweis. *a)* $C\alpha\beta \rightarrow CC\beta\delta C\alpha\delta$ (Syl_1 p/α q/β r/δ).
b) $C\gamma C\beta\delta \& CC\beta\delta C\alpha\delta \rightarrow C\gamma C\alpha\delta$ (Satz 1 α/γ $\beta/C\beta\delta$, $\gamma/C\alpha\delta$).

Satz 3[6]. Besteht Ers $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa)$, so sind bei geradem $\varkappa$ die Aussagen $C\alpha CC\gamma\delta\beta$ und $CC\gamma\delta C\alpha\beta$ beweisbar, sonst aber die Aussagen $C\alpha CC\delta\gamma\beta$ und $CC\delta\gamma C\alpha\beta$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl n der Ziffern von $\varkappa$.

Sei zu diesem Zwecke mit S_n der folgende Satz bezeichnet: Der zu beweisende Satz gilt, wenn $\varkappa$ aus n Ziffern besteht. Zum Beweise von S_1 nehme man für den Fall $\varkappa = 0$ die Aussagen Syl_1 p/η q/γ r/δ und Syl_2 p/γ q/δ r/η — dagegen im Falle $\varkappa = 1$ die Aussagen Syl_2 p/γ q/η r/δ, Syl_1 p/δ q/γ r/η, $Transp_1$ p/γ q/δ, $Transp_2$ p/γ q/δ. Um den Beweis zu beenden, haben wir jetzt aus $S_k S_{k+1}$ abzuleiten. Besteht nun S_k sowie Ers $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa)$, wo $\varkappa$ aus $k+1$ Ziffern besteht, so ist $\varkappa$ von der Form $\lambda 0$ oder $\lambda 1$, wo λ aus k Ziffern besteht und wir haben dann vier Fälle zu betrachten, je nachdem $\varkappa$ und λ gerade oder ungerade sind. Ich werde bloß den Fall betrachten, daß $\varkappa$ und λ beide gerade sind (für die übrigen Fälle ist der Beweis analog zu führen): Sind $\varkappa$ und λ gerade, so ist $\varkappa = \lambda 0$ und es gibt zwei Aussagen $\gamma' = C\eta\gamma$ und $\delta' = C\eta\delta$, so daß Ers $(\alpha, \beta, \gamma', \delta', \lambda)$. Zu Folge der Annahme S_k sind dann (weil λ aus k Ziffern besteht) die Aussagen (1) $C\alpha CC\gamma'\delta'\beta$ und (2) $CC\gamma'\delta' C\alpha\beta$ beweisbar. Vermittels Satz 2 $\alpha/C\gamma\delta$, $\beta/C\gamma'\delta'$, γ/α, δ/β, Syl_2 q/γ, r/δ, p/η und (1) erweisen wir nun sofort, daß $C\alpha CC\gamma\delta\beta$ beweisbar ist. Ferner zeigen wir mit Hilfe von Satz 1 $\alpha/C\gamma\delta$ $\beta/C\gamma'\delta'$ $\gamma/C\alpha\beta$ sowie (3) und (2), daß $C\gamma\delta C\alpha\beta$ beweisbar ist. Damit ist aber S_{k+1} für den in Frage stehenden Fall vollständig erwiesen. Aus dem soeben erwiesenen Satze folgt sofort:

Satz 3a. Es bestehe Ers $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa)$. Es gelten dann *a)* bei geradem $\varkappa$ die Formeln

$$\alpha \rightarrow CC\gamma\delta\beta \quad \text{und} \quad \alpha \& C\gamma\delta \rightarrow \beta,$$

b) bei ungeradem $\varkappa$ die Formeln

$$\alpha \rightarrow CC\delta\gamma\beta \quad \text{und} \quad \alpha \& C\delta\gamma \rightarrow \beta.$$

[6]) Ein mehr vollständiger Beweis dieses Satzes findet sich in meiner polnischen Dissertationschrift „Aksjomatyzacja trójwartosciowego rachunku zdań“ (d. h. Axiomatisierung des dreiwertigen Aussagenkalküls), vgl. Kap. 2, T_5: Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIV, 1931, Classe III.

c) bei beliebigem $\varkappa$ die Formel

$$\varkappa \,\&\, C\gamma\delta \,\&\, C\delta\gamma \rightarrow \beta.$$

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes, Punkt *a* bildet

Satz 4. $C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_k \gamma \,\&\, C\gamma\delta \rightarrow C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_k \delta \; (k = 1, 2, \ldots)$.

Ferner beweisen wir

Satz 5. Besteht $\mathrm{Ers}\,(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \gamma_i, \delta_i, \varkappa_i)$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so sind die Aussagen

$$C\alpha_1 C\beta_1 C\beta_2 \ldots C\beta_k \alpha_{k+1} \quad \text{und} \quad C\beta_1 C\beta_2 \ldots C\beta_k C\alpha_1 \alpha_{k+1}$$

beweisbar, wo $\beta_i \; (i = 1, 2, \ldots, k)$ mit $C\gamma_i\delta_i$ oder $C\delta_i\gamma_i$ identisch ist, je nachdem $\varkappa_i$ gerade bez. ungerade ist.

Beweis. Bezeichnen wir den zu beweisenden Satz mit S_k, so gilt S_1 auf Grund von Satz 3. Es genügt daher zu zeigen, daß aus S_l S_{l+1} folgt. Gilt nun S_l sowie die Voraussetzung von S_{l+1}, d. h. es besteht $\mathrm{Ers}\,(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \gamma_i, \delta_i, \varkappa_i)$ für alle i von 1 bis $l+1$, so sind kraft S_l die Aussagen (1) $C\alpha_1 C\beta_1 C\beta_2 \ldots C\beta_l \alpha_l$ und (2) $C\beta_1 C\beta_2 \ldots C\beta_l C\alpha_1 \alpha_l$ beweisbar, wo $\beta_i \; (i = 1, 2, \ldots, l)$ mit $C\gamma_i\delta_i$ oder $C\delta_i\gamma_i$ identisch ist, je nachdem $\varkappa_i$ gerade oder ungerade ist. Ferner gilt nach Voraussetzung $\mathrm{Ers}\,(\alpha_l, \alpha_{l+1}, \gamma_l, \delta_l, \varkappa_l)$ und daher ist nach Satz 3 $(\alpha/\alpha_l, \beta/\alpha_{l+1}, \gamma/\gamma_l, \delta/\delta_l, \varkappa/\varkappa_l)$ die Aussage (3) $C\alpha_l C\beta_{l+1} \alpha_{l+1}$ beweisbar, wo $\beta_{l+1} = C\gamma_l\delta_l$ oder $C\delta_l\gamma_l$, je nachdem $\varkappa_l$ gerade bez. ungerade ist. Vermittels Satz 4 $k/l+1$, $\alpha_i/\beta_{i-1} \; (i = 2, 3, \ldots, l+1)$, γ/α_l, $\delta/C\beta_{l+1}\alpha_{l+1}$ sowie (1) und (3) folgern wir nun sofort, daß die Aussage $C\alpha_1 C\beta_1 C\beta_2 \ldots C\beta_{l+1} \alpha_{l+1}$ beweisbar ist; d. h. es gilt eine Hälfte der Konklusion von S_{l+1}. — Aus $\mathrm{Ers}\,(\alpha_l, \alpha_{l+1}, \gamma_l, \delta_l, \varkappa_l)$ folgt ferner $\mathrm{Ers}\,(C\alpha_1\alpha_l, C\alpha_1\alpha_{l+1}, \gamma_l, \delta_l, 0\varkappa_l)$. Gemäß Satz 3 $\alpha/C\alpha_1\alpha_l$, $\beta/C\alpha_1\alpha_{l+1}$, γ/γ_l, δ/δ_l, $\varkappa/0\varkappa_l$ ist daher die Aussage (4) $CC\alpha_1\alpha_l C\beta_{l+1} C\alpha_1 \alpha_{l+1}$ beweisbar, wo $\beta_{l+1} = C\gamma_l\delta_l$ oder $C\delta_l\gamma_l$, je nachdem $0\varkappa_l$ (und damit zugleich auch $\varkappa_l$) gerade bez. ungerade ist. Mit Hilfe von Satz 4 k/l, α_i/β_i, $\gamma/C\alpha_1\alpha_l$, $\delta/C\alpha_1\alpha_{l+1}$ sowie (2) und (4) schließen wir nun sogleich, daß die Aussage $C\beta_1 C\beta_2 \ldots C\beta_{l+1} C\alpha_1 \alpha_{l+1}$ beweisbar ist, womit vollständig erwiesen ist, daß aus S_l S_{l+1} folgt. Demzufolge gilt S_k für jedes k, w. z. b. w.

Definition 5. (Rekursive Definition von C^k).

a) $C^0 p q = q$,

b) $C^{l+1} p q = C p C^l p q$.

Aus Satz 5 folgt sofort

Satz 6. Entsteht β aus α, indem man in α an k geraden und l ungeraden Stellen (k oder $l \neq 0$) γ durch δ ersetzt, so sind die Aussagen $C\alpha C^k C\gamma\delta C^l C\delta\gamma\beta$ und $C\alpha C^l C\delta\gamma C^k C\gamma\delta\beta$ beweisbar.

Hieraus entnehmen wir sogleich

Satz 7. Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gelten die folgenden Formeln:

a) $\alpha \rightarrow C^k C\gamma\delta C^l C\delta\gamma\beta \,\&\, C^l C\delta\gamma C^k C\gamma\delta\beta$.

b) $\alpha \,\&\, C\gamma\delta \rightarrow C^l C\delta\gamma\beta$.

c) $\alpha \,\&\, C\delta\gamma \rightarrow C^k C\gamma\delta\beta$.

d) $\alpha \,\&\, C\gamma\delta \,\&\, C\delta\gamma \rightarrow \beta$.

Satz 8. Enthält α die Variable p als echten Teil, so sind die Aussagen $C\alpha CCpqCCqp\alpha$ und $C\alpha CCqpCCpq\alpha$ beweisbar.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, daß für ein gewisses $\varkappa$ Ers $(\alpha, \alpha, p, p, \varkappa)$ besteht; somit ist nach Satz 3 die Aussage (1) $C\alpha CCpp\alpha$ beweisbar. Ferner besteht Ers $(CCpp\alpha, CCqp\alpha, p, q, 11)$ und hieraus folgt gemäß Satz 3 die Beweisbarkeit von (2) $CCCpp\alpha CCpqCCqp\alpha$.

Aus Satz 1 $\beta/CCpp\alpha$, $\gamma/CCpqCCqp\alpha$ sowie (1) und (2) entnehmen wir, daß $C\alpha CCpqCCqp\alpha$ beweisbar ist. Analog schließen wir vermittels Ers $(CCpp\alpha, CCpq\alpha, p, q, 11)$, daß $C\alpha CCqpCCpq\alpha$ beweisbar ist und damit ist unsere Behauptung vollständig erwiesen.

Satz 9. Enthält α die Variable p als echten Teil, so sind die Aussagen $C\alpha C^k CpqC^k Cqp\alpha$ und $C\alpha C^k CqpC^k pq\alpha$ $(k=1, 2, \ldots)$ beweisbar.

Beweis. Bezeichnen wir den zu beweisenden Satz mit S_k, so besteht nach vorigem Satze S_1.

Nehmen wir nun für irgendwelche Zahl $l = 1, 2, \ldots$ die Richtigkeit von S_l an, so folgt hieraus S_{l+1} in folgender Weise: Gilt die Voraussetzung von S_{l+1}, so sind nach S_l die Aussagen (1) $C\alpha C^l Cpq C^l Cqp\alpha$ und (2) $C\alpha C^l CpqC^l pq\alpha$ beweisbar; ferner sind zufolge $S_1\,\alpha/C^l Cqp\alpha$ bzw. $\alpha/C^l Cpq\alpha$ die Aussagen (3) $C^l Cqp\alpha CCpqCCqpC^l Cqp\alpha$ und (4) $C^l Cpq\alpha CCqpCCpqC^l Cpq\alpha$ beweisbar.

Beachtet man ferner, daß $CCqpC^l Cqp\alpha = C^{l+1} Cqp\alpha$, so erkennt man, daß aus Satz 4 $\alpha_1/\alpha\,\alpha_i/Cpq\,(i=2, 3, \ldots, l+1)$, $\gamma/C^l Cqp\alpha$, $\delta/CCpqC^{l+1} Cqp\alpha$ sowie (1) und (3) die Beweisbarkeit von $C\alpha C^{l+1} CpqC^{l+1} Cqp\alpha$ folgt.

Analog zeigen wir vermittels Satz 4, (2) und (4), daß auch $C\alpha C^{l+1} CqpC^{l+1} Cpq\alpha$ beweisbar ist, womit unser Beweis beendet ist.

2. Wir wollen nun zu Ax die Aussage $CCqqCpp$ (Id*) beifügen, ferner soll im folgenden R eine konstante endliche Matrix bezeichnen, für die $Ax \subset \mathrm{E}(R)$ ist. Um den Hauptsatz zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß R axiomatisierbar ist. Zu diesem Zwecke beweisen wir zu-erst, daß es für jede natürliche Zahl n eine endliche Menge $M \subset \mathrm{E}(R)$ gibt, so daß alle höchstens n verschiedene Variable enthaltende R-wahre Aussagen Folgerungen von M sind.

Anmerkung 2. Zum Beweise der letzteren Behauptung genügt es anzunehmen, daß die Aussage Cpp (Id) an Stelle von $CCqqCpp$ (Id*) zu $\mathrm{E}(R)$ gehört (Id folgt aus Id*, aber nicht umgekehrt).

Definition 6. $Aq_{\mathfrak{M}}(\alpha, \beta)$ (α ist $\mathfrak{M}$-gleichwertig mit β) |. Setzt man in α und β Werte von $\mathfrak{M}$ für alle Variablen ein, wobei jede Variable, die in α und β gleichzeitig vorkommt, in beiden Aussagen durch denselben Wert ersetzt wird — so übergehen α und β stets in Ausdrücke, deren Werte nach $\mathfrak{M}$ identisch sind.

Anmerkung 3. Die Beziehung $Aq_{\mathfrak{M}}$ ist offenbar reflexiv, kommutativ und transitiv.

Definition 7. $Aq(\alpha, \beta)$ (α ist äquivalent mit β) | $C\alpha\beta$ und $C\beta\alpha$ sind R-wahr.

Anmerkung 4. Man ersieht aus Satz 7, *d.*, daß wenn $\alpha \varepsilon \mathrm{E}(R)$, $Aq(\gamma, \delta)$ und β aus α entsteht, indem man in α an gewissen Stellen γ durch δ ersetzt, so $\beta \varepsilon \mathrm{E}(R)$.

Satz 10. $Aq_R(\alpha, \beta) \rightarrow Aq(\alpha, \beta)$.

Beweis. Die Aussage Id* erfüllt R; aus Id* ist aber die Aussage Cpp (Id) ableitbar und folglich ist für jede Aussage α $C\alpha\alpha$ R-wahr. Besteht daher $Aq_R(\alpha, \beta)$, so müssen auch $C\alpha\beta$ und $C\beta\alpha$ R-wahr sein, w. z. b. w.

Definition 8. $V_{(n)}(n = 1, 2, \ldots)$ ist die Menge aller Aussagen, in denen bloß Variable vom Typus $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auftreten.

Satz 11. Für jede endliche Matrix $\mathfrak{M}$ gibt es eine endliche Menge $X \subset V_{(n)}(n = 1, 2, \ldots)$, so daß X zu jeder Aussage $\alpha \varepsilon V_{(n)}$ ein Element β enthält mit der Eigenschaft $Aq_{\mathfrak{M}}(\alpha, \beta)$.

Beweis. Ist $\mathfrak{M}$ m-wertig (wo m auch unendlich sein kann), so zeigt man leicht, daß es keine Untermenge von $V_{(n)}$ mit mehr als m^{m^n} untereinander nicht $\mathfrak{M}$-gleichwertigen Elementen geben kann: die Anzahl aller verschiedenen Belegungen von n-Variablen mit m-Werten ist nämlich gleich m^n und daher ist die Anzahl aller Belegungen dieser Belegungen mit m-Werten gleich m^{m^n}. — Nehmen wir nun an, daß m endlich ist, so ist auch m^{m^n} endlich, womit unsere Behauptung erwiesen ist. — Ist die Matrix $\mathfrak{M}$ effektiv gegeben, so können wir eine Menge X mit der im obigen Satze angegebener Eigenschaft folgendermaßen konstruieren: Von der Menge $M_1 = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ ausgehend, bilden wir sukzessive Mengen $M_i (i = 2, 3, \ldots)$ auf folgende Weise: ist N_i die Menge aller Aussagen von der Form $C\alpha\beta$, $C\beta\alpha$ und $N\alpha$, wo α zu M_{i-1} und β zu einer der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}$ gehört, so nehmen wir für M_i eine beliebige Untermenge von N_i, die zu jedem Elemente α von N_i, das mit keinem Elemente einer der Mengen M_1, $M_2, \ldots, M_{i-1}$ $\mathfrak{M}$-gleichwertig ist, ein einziges Element β enthält, so daß $Aq_{\mathfrak{M}}(\alpha, \beta)$ — ist dann M_k die erste der Mengen M_i, die leer ausfällt (auf Grund des soeben bewiesenen Satzes muß es ein derartiges k geben und k ist offenbar $< m^{m^n} + 2$, wenn m die Anzahl der Werte von $\mathfrak{M}$ ist), so besitzt die Vereinigung der Mengen $M_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ die von X verlangten Eigenschaften.

Anmerkung 5. Bezeichnen wir eine Matrix $\mathfrak{M}$ als halbendlich, wenn $\mathfrak{M}$ der Bedingung genügt, daß die Funktionen $C_{\mathfrak{M}}(x, y)$ und $N_{\mathfrak{M}}(x)$ für $x, y \varepsilon W(\mathfrak{M})$ nur endlich viele Werte annehmen können, so behält der soeben erwiesene Satz auch dann noch seine Richtigkeit, wenn die Forderung der Endlichkeit von $\mathfrak{M}$ durch die der Halbendlichkeit ersetzt wird. — Der Beweis lautet kurz wie folgt: Ist $\mathfrak{M}$ halbendlich, so gibt es gewisse $\mathfrak{M}$-Werte $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k endlich), derart, daß, wenn $x, y \varepsilon W(\mathfrak{M})$, so sind $C_{\mathfrak{M}}(x, y)$ und $N_{\mathfrak{M}}(x)$ mit gewissen von diesen a_i identisch. Ist nun n eine beliebige Zahl $= 1, 2, \ldots$, so gibt es, wie leicht erkenntlich, stets eine endliche Anzahl von $\mathfrak{M}$-Werten $b_1, b_2, \ldots, b_l$ (wo l von n abhängt) gilt, so daß so oft in den Ausdrücken $C_{\mathfrak{M}}(p_i, p_j)$, $N_{\mathfrak{M}}(p_i)$, $C_{\mathfrak{M}}(p_i, a_r)$ und $C_{\mathfrak{M}}(a_r, p_i) (i, j = 1, 2, \ldots, n; r = 1, 2, \ldots, k)$ für die p_i gewisse $\mathfrak{M}$-Werte eingesetzt werden, stets für dieselbe Variablen auch gewisse b_i aus obiger Reihe eingesetzt werden können, ohne daß die Bedeutung der obigen Ausdrücke dadurch geändert wird. Hieraus folgt ohne Schwierigkeit, daß wenn man aus $A(\mathfrak{M})$ und $B(\mathfrak{M})$ sämtliche Elemente außer die a_i und die b_i fortläßt (eventuell mit Ausnahme eines Elementes, wenn eine dieser Mengen leer wird), so ergibt sich eine endliche Matrix $\mathfrak{N}$, so daß folgende Formel gilt:

$$\alpha, \beta \varepsilon V_{(n)} \rightarrow A q_{\mathfrak{M}}(\alpha, \beta) \sim A q_{\mathfrak{N}}(\alpha, \beta).$$

Damit ist aber unsere Behauptung auf den soeben bewiesenen Satz zurückgeführt. (Zugleich erkennt man, daß für dieselben Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ und dieselbe Zahl n die Formel $\mathrm{E}(\mathfrak{M}) . V_{(n)} = \mathrm{E}(\mathfrak{N}) . V_{(n)}$ besteht. — Aus Satz 11 folgt unmittelbar

Satz 12. Jede unendliche Menge $X \subset V_{(n)}$ enthält für jede endliche (oder halbendliche) Matrix $\mathfrak{M}$ eine unendliche Untermenge von miteinander $\mathfrak{M}$-gleichwertigen Aussagen.

3. Mit r werden wir künftig die Anzahl der Werte (kürzer: den Grad) von R bezeichnen sowie mit Aq eine beliebige feste Menge $\subset V_{(r)}$, die zu jeder Aussage $\alpha \varepsilon V_{(r)}$ ein einziges mit αR-gleichwertiges Element β enthält. (Ein Verfahren Aq zu konstruieren, ist oben angegeben worden.) Wir werden der Bequemlichkeit halber annehmen, daß die Variable $p_1, p_2, \ldots, p_r$ zu Aq gehören.

Ferner wollen wir zu Ax hinzufügen sämtliche R-wahren Elemente von Aq sowie alle Aussagen vom Typus $CC\alpha\beta\gamma$, $C\gamma C\alpha\beta CN\alpha\gamma$, $C\gamma N\alpha$, wo $\alpha, \beta, \gamma \varepsilon Aq$ sowie $C\alpha\beta$ mit γ bez. $N\alpha$ mit γR-gleichwertig sind. Es enthält dann Ax für jedes Aussagen-Paar $\alpha, \beta \varepsilon Aq$ für ein gewisses γ die Aussagen $CCa\beta\gamma$ und $C\gamma C\alpha\beta$, und zwar ist γ dasjenige Element von Aq, das mit $C\alpha\beta$ R-gleichwertig ist. Desgleichen enthält Ax für jedes $\alpha \varepsilon Aq$ zwei Aussagen $CN\alpha\gamma$ und $C\gamma N\alpha$, so daß $Aq_R(N\alpha, \gamma)$ besteht. Alle zu Ax hinzugefügten Aussagen sind nach Satz 10 R-wahr. Die so erweiterte Menge Ax verbleibt offenbar endlich, weil Aq endlich ist, und es gilt ferner folgender

Satz 13. Wenn $\alpha \varepsilon V_{(r)}$ (r der Grad von R), so gibt es ein gewisses $\alpha' \varepsilon Aq$, so daß die Aussagen $C\alpha\alpha'$ und $C\alpha'\alpha$ beweisbar sind.

Beweis. Es bedeute $T(\alpha)$ die Behauptung des zu beweisenden Satzes. Ist zunächst α eine Variable, so ist α zu Folge der Voraussetzung $\alpha \varepsilon V_{(r)}$ mit einer der Variablen $p_1, p_2 \ldots p_r$ identisch, somit gehört α zu Aq; folglich gilt $T(\alpha)$ für diesen Fall, denn $C\alpha\alpha$ ist beweisbar. Es genügt daher zu zeigen: *a)* aus $T(\beta)$ und $T(\gamma)$ folgt $T(C\beta\gamma)$ und *b)* aus $T(\beta)$ folgt $T(N\beta)$. Zum Beweise von *a)* wollen wir annehmen, daß für gewisse Aussagen β und γ die Formeln $T(\beta)$ und $T(\gamma)$ bestehen; es ist $T(C\beta\gamma)$ zu beweisen. Aus der letzteren Annahme folgt sofort, daß für gewisse $\beta', \gamma' \varepsilon Aq$ die Aussagen (1) $C\beta\beta'$, (2) $C\beta'\beta$, (3) $C\gamma\gamma'$ und (4) $C\gamma'\gamma$ beweisbar sind. Ferner gehören zu Ax, weil $\beta', \gamma' \varepsilon Aq$ für ein gewisses $\alpha' \varepsilon Aq$ die Aussagen (5) $CC\beta'\gamma'\alpha'$ und (6) $C\alpha' C\beta'\gamma'$.

Es sind daher zu Folge Satz 3*a), c)* die Aussagen beweisbar, die aus (5) und (6) vermittels Ersetzung von β' durch β und γ' durch γ entstehen — d. h. die Aussagen $CC\beta\gamma\alpha'$ und $C\alpha' C\beta\gamma$; folglich gilt $T(C\beta\gamma)$ und damit ist *a)* bewiesen. Ganz analog begründen wir auch *b)* und somit besteht der zu beweisende Satz.

Definition 9. *a)* Aussagen, die genau k Variable enthalten, werden wir als k-dimensional bezeichnen. *b)* Die Menge aller k-dimensionalen Aussagen werden wir mit V_k bezeichnen (zu unterscheiden von $V_{(k)}$, vgl. Def. 8).

Satz 14. Ist α eine R-wahre, höchstens r-dimensionale Aussage, so ist α beweisbar.

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß $\alpha \varepsilon V_{(r)}$, d. h. mit Variablen aus der Reihe $p_1, p_2, \ldots, p_r$ geschrieben ist. Es gibt dann nach dem vorigen Satze ein Element α' von Aq, so daß $C\alpha\alpha'$ und $C\alpha'\alpha$ beweisbar sind. $C\alpha\alpha'$ ist somit R-wahr, ferner gilt dasselbe nach Voraussetzung von α und folglich ist auch α' R-wahr. Demnach gehört aber α' zu Ax, weil wir alle R-wahren Elemente von Aq zu Ax hinzugefügt haben. Aus der Beweisbarkeit von α' und $C\alpha'\alpha$ folgt nun sofort die Beweisbarkeit von α, w. z. b. w.

Anmerkung 6. Im Beweise des obigen Satzes ist die Festsetzung, daß r der Grad von R nicht ausgenützt worden ist. Damit ist bewiesen, daß es für jede Zahl $n = 1, 2, \ldots$ eine endliche Menge $X \subset \mathrm{E}(R)$ gibt, derart, daß $\mathrm{E}(R) \,.\, V_n = Fl(X)$. In Übereinstimmung mit Anmerkung 4 (nach Satz 11) dürfen wir dabei annehmen, daß R nicht endlich, sondern bloß halbendlich ist.

4. Betrachten wir nun die Menge M aller Aussagen $\varphi = C^i Cp_1 p_2 p_3$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. M ist eine unendliche Untermenge von $V_{(3)}$ und muß daher gemäß Satz 12 zwei verschiedene miteinander R-gleichwertige Elemente enthalten. Seien nun ρ, $\rho + \sigma\,(\sigma > 0)$ die zwei kleinsten Indizes, so daß $Aq_R(\varphi_\varrho, \varphi_{\varrho+\sigma})$ gilt. Die Aussage $C\varphi_{\varrho+\sigma}\varphi_\varrho$ ist daher gemäß Satz 10 R-wahr; durch Variablen-Umbenennung gewinnen wir hieraus die Aussage $CC^{\varrho+\sigma}Cpqr\,C^\varrho Cpqr$, die wir als *Red* bezeichnen und zu Ax hinzufügen werden.

Wir wollen nun aus dem so erweiterten Ax einige Aussagen ableiten:

Satz 15. Folgende Aussagen sind beweisbar:

1. $C^\sigma Cqp\,CC^\sigma Cpp\,C^\varrho Cpqr\,C^\varrho Cpqr$ (beweisbar gemäß Satz 7a α/Red, $\beta/CC^\varrho Cpp\,C^\varrho Cpqr\,C^\varrho Cpqr$, k/σ, $l/0$, γ/q, δ/p).

2. $CCpq\,CCpp\,Cpq$ (Syl$_2$ r/p).

3. $CCpq\,CCrr\,Cpq$ (Satz 3b. $\alpha/2\,\delta/Crr\,\gamma/Cpp$, Id*).

4. $CCpq\,C^\sigma Crr\,Cpq$ (mehrmalige Anwendung von 3. und der Formel $C\alpha\beta \,\&\, C\beta\gamma \rightarrow C\alpha\gamma$ (Satz 1)).

5. $CC^\varrho Cpqr\,C^\sigma Cpp\,C^\varrho Cpqr$ (4. p/Cpq, $q/C^{\varrho-1}Cpqr$, r/p).

6. $C^\sigma Cqp\,CC^\sigma Cpp\,C^\varrho Cpqr\,C^\sigma Cpp\,C^\varrho Cpqr$ (Satz 4: $C\alpha_1 C\alpha_2$, $\ldots$, $C\alpha_k\gamma = 1.$, $C\gamma\delta = 5.$).

7. $C^\sigma Cqp\,Crr$ (Satz 4 k/σ, $\alpha_i/Cqp\,(i = 1, 2, \ldots, k)$, $\gamma/CC^\sigma Cpp$ $C^\varrho Cqpr\,C^\sigma Cpp\,C^\varrho Cpqr$, δ/Crr; Id*).

8. $CCrs\,C^\sigma Cqp\,Crs$ (Satz 3a, a. $\alpha/7.$, $\beta/C^\sigma Cqp\,Crs$, γ/r, δ/s

9. $CCC^{\sigma}CqpCrstCCrst$ (Syl_1 p/Crs, $q/C^{\sigma}CqpCrs$, r/t; 8.).

10. $CC^{\varrho+k\sigma}CpqrC^{\varrho}Cpqr(k=1, 2, \ldots)$. (Beweis vermittels Induktion nach k mit Hilfe von *Red* und $C\alpha\beta \,\&\, C\beta\gamma \rightarrow C\alpha\gamma$.)

Definition 10. a. $gr(\alpha, \beta)$ = die Anzahl der geraden Indizes $\varkappa$, so daß $\beta=\alpha^{\varkappa}$; ist α eine Variable, so ist $gr(\alpha, \beta)=1$ oder 0, je nachdem $\alpha=\beta$ bzw. $\neq\beta$ ist. **b.** $ngr(\alpha, \beta)$ = die Anzahl der ungeraden Indizes $\varkappa$, so daß $\beta=\alpha^{\varkappa}$; ist α eine Variable, so ist $ngr(\alpha, \beta)=0$. **c.** $df(\alpha, \beta)=gr(\alpha, \beta)-ngr(\alpha, \beta)$. **d.** $div(\alpha)$ (der *Teiler* von α) = der größte gemeinschaftliche Teiler aller von 0 verschiedenen Zahlen $df(\alpha, \beta)$, wo β eine in α auftretende Variable ist; gibt es keine derartigen Zahlen, so sei $div(\alpha)=0$. e. $div(X)$ (der Teiler von X) = der größte gemeinschaftliche Teiler aller Zahlen $div(\alpha)$, wo $\alpha\varepsilon X$; gibt es keine solche Zahlen, so sei $div(X)=0$. **f.** $div(\mathfrak{M})$ (der *Teiler* von $\mathfrak{M}$) = $div(\mathrm{E}(\mathfrak{M}))$.

Beispiele: $gr(C^{k}pq, p)=0$, $ngr(C^{k}pq, p)=k$, $df(C^{k}pq, p)= -k$; $gr(p, p)=df(p, p)=1$. Die Teiler von *Id*, *Id**, Syl_1, Syl_2, $Transp_1$ und $Transp_2$ sind gleich 0, dagegen ist der Teiler von *Red* gleich σ.

Satz 16. Wenn α keine Variable ist, $\beta=\alpha p/q$, $gr(\alpha, p)=k$ und $ngr(\alpha, p)=l$, so sind für jedes natürliche m die Aussagen $C\beta C^{k+m}CqpC^{l+m}Cpq\alpha$ und $C\beta C^{l+m}CpqC^{k+m}Cqp\alpha$ beweisbar.

Beweis. Aus Satz 6 α/β, β/α, γ/q, δ/p folgt bei der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes, daß die Aussagen $C\beta C^{k}CqpC^{l}Cpq\alpha$ und $C\beta C^{l}CpqC^{k}Cqp\alpha$ beweisbar sind. Nach Satz 9 $k/m\,\alpha/C^{l}pq\alpha$ bzw. $\alpha/C^{k}Cqp\alpha$ sind ferner die Aussagen $CC^{l}Cpq\alpha C^{m}CqpC^{m}CpqC^{l}Cpq\alpha$ und $CC^{k}qp\alpha C^{m}CpqC^{m}CqpC^{k}Cqp\alpha(m=1, 2, \ldots)$ beweisbar. Wir können somit unsere Behauptung vermittels Satz 4 (d. h. der Formel $C\alpha_1C\alpha_2\ldots C\alpha_k\gamma \,\&\, C\gamma\delta \rightarrow C\alpha_1C\alpha_2\ldots C\alpha_k\delta$) erweisen.

Fügen wir nun zu der Voraussetzung des soeben erwiesenen Satzes die Bedingung $\alpha\varepsilon\mathrm{E}(R)$ hinzu, so folgt aus $\beta=\alpha p/q$, daß $\beta\varepsilon\mathrm{E}(R)$; zu Folge der Behauptung des vorigen Satzes ist dann die Aussage (1) $C^{k}CqpC^{l}Cpq\alpha$ R-wahr. Nehmen wir nun z. B. $k\geqq l$ an und setzen wir $k-l=m$, so können wir die Aussage (1) in der Form (2) $C^{m}CqpC^{l}CqpC^{l}Cpq\alpha$ schreiben. α enthält die Variable p als echten Teil, weil nach Voraussetzung α keine Variable und die Zahlen $gr(\alpha, \beta)$, $ngr(\alpha, p)$ nicht beide gleich 0 sind; somit ist zu Folge Satz 9 k/l die Aussage (3) $C^{l}CqpC^{l}Cpq\alpha$ R-wahr. Ferner bemerken wir, daß (2) = $=C^{m}Cqp(3)$ ist sowie, daß die Aussage $C(3)Crr$ R-wahr ist (Satz 15,7., (3)), mithin ist $C^{m}CqpCrr$ R-wahr (Satz 4). Zu demselben Ergebnisse (mit gegenseitiger Vertauschung von p und q) würden wir auch dann kommen, wenn wir $l \geqq k$ und $l-k=m$ angenommen hätten; beachten wir nun, daß $k-l=df(\alpha, p)$ ist, so haben wir damit folgenden Satz erwiesen:

Satz 17. Wenn $\alpha \varepsilon \mathrm{E}(R)$ und $df(\alpha, p) = \pm m \, (m=1, 2, \ldots)$, so ist $C^m C q p C r r$ R-wahr.

Ferner gilt

Satz 18. Sind $C^k C q p C r r$ und $C^l C q p C r r \, (k, l = 1, 2, \ldots)$ R-wahr, sowie m der größte gemeinschaftliche Teiler von k und l, so ist $C^m C q p C r r$ R-wahr.

Beweis. Nach der Zahlentheorie genügt es zu zeigen, daß, wenn (1) $C^{m+n} C q p C r r$ und (2) $C^n C q p C r r \, (m, n = 1, 2, \ldots)$ R-wahr sind, so ist $C^m C q p C r r$ R-wahr. Beachten wir zu diesem Zwecke, daß $(1) = C^m C q p (2)$, sowie daß aus (2) die Aussage (3) $C(2) C r r$ ableitbar ist, so ist nach Satz 4 die Formel $(1) \,\&\, (2) \rightarrow C^m C q p C r r$ richtig, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nach der Bedeutung von $div(\mathfrak{M})$ (Definition 10) folgt nun sofort

Satz 19. $C^{div(R)} C q p C r r$ ist R-wahr.

Wir wollen nun zeigen

Satz 20. $div(R) = \sigma$.

Beweis. σ ist durch $div(R)$ teilbar, weil $\sigma = df(Red, p)$ und $Red \, \varepsilon \, \mathrm{E}(R)$. Sei daher $\sigma = k \, div(R)$; es genügt nun zu zeigen, daß $k=1$, denn σ und $div(R)$ sind beide >0. Ersetzen wir in Satz 15,7. σ durch $div(R)$, so erhalten wir $C^{div(R)} C q p C r r$; man erkennt daher, daß, vermittels letzterer Aussage, analog wie die Aussage Satz 15,9. vermittels 15,7. die folgende Aussage ableitbar ist: (1) $C C C^{div(R)} C q p C r s t C C r s t$.

Beachten wir nun, daß zu Folge $\sigma = k \, div(R)$ bei $k > 1$ die Aussage $(1) q/p p/q r/C p q s/C^{\varrho+\sigma-div(R)-1} C p q r t/C^{\varrho} C p q r$ mit $C \, Red$ $C C^{(k-1) div(R)+\varrho} C p q r C^{\varrho} C p q r$ identisch ist, so ist die Aussage (2) $C C^{\varrho+(k-1) div(R)} C p q r C^{\varrho} C p q r$ R-wahr. Bemerken wir aber, daß nach der Definition von $Red_{\varrho+\sigma}$ die kleinste Zahl $> \varrho$ ist, für die die Aussage $C C^{\varrho+\sigma} C p q r C^{\varrho} C p q r$ R-wahr ist, so muß in (2) $k-1=0$, d. h. $k=1$ sein, w. z. b. w.

Satz 21. Ist α R-wahr sowie $\beta = \alpha p/q$ beweisbar, wobei α die Variable p enthält, so sind die Aussagen $C^{\varrho} C q p C^{\varrho} p q \alpha$ und $C^{\varrho} C p q$ $C^{\varrho} C q p \alpha$ beweisbar.

Beweis. Besteht die Voraussetzung und ist $gr(\alpha p) = k$ sowie $ngr(\alpha, p) = l$, so sind nach Satz 16 für beliebiges $m = 0, 1, \ldots$ die

Aussagen $C^{k+m}CqpC^{l+m}Cpq\alpha$ und $C^{l+m}CpqC^{k+m}Cqp\alpha$ beweisbar. Bei passender Wahl von m wird $k+m \equiv \rho \bmod \sigma$, daher aber auch $l+m \equiv \rho \bmod \sigma$ (denn die Zahl $m-n=df(\alpha, p)$ muß durch σ teilbar sein, weil gemäß Satz 20 $\sigma = div(R)$ ist und nach Voraussetzung $\alpha \varepsilon \mathrm{E}(R)$) und daher können wir vermittels wiederholter Anwendung von *Red* (notwendigenfalls mit Hilfe von Satz 4) die beiden verlangten Aussagen beweisen.

5. Wir wollen nun eine Aussage (genauer: Aussagentypus) beschreiben, die, wie wir zeigen werden, R-wahr ist sowie zu Ax hinzugefügt, die Beweisbarkeit von allen R-wahren Aussagen nach sich zieht.

Diese Aussage — wir wollen sie im folgenden mit Fin_r bezeichnen — hängt von r (dem Grade von R) sowie von ρ und σ ab. Fin_r läßt sich folgendermaßen schildern:

Bezeichnen wir die $\frac{r(r+1)}{2}$ Aussagen von der Form $C^{\rho}Cp_kp_lC^{\rho}Cp_lp_kCqr$, wo $k<l$ und $k, l=0, 1, \ldots, r+1$ in irgendwelcher Anordnung mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\frac{r(r+1)}{2}}$, so ist

$$Fin_r = C^{\sigma}\varphi_1 C^{\sigma}\varphi_2, \ldots, C^{\sigma}\varphi_{\frac{r(r+1)}{2}-1} C^{\sigma+1}\varphi_{\frac{r(r+1)}{2}} C^{2\rho}CqqCqr.$$

Z. B. für $r=2$ können wir als Fin_r die folgende Aussage nehmen:

$$(Fin_2)\ C^{\sigma}C^{\rho}Cp_1p_2C^{\rho}Cp_2p_1CqrC^{\sigma}C^{\rho}Cp_1p_3C^{\rho}Cp_3p_1CqrC^{\sigma+1}C^{\rho}Cp_2p_3 C^{\rho}Cp_3p_2CqrC^{2\rho}CqqCqr.$$

Wir wollen nunmehr zeigen, daß Fin_r die verlangten Eigenschaften besitzt.

Satz 22. $Fin_r \varepsilon \mathrm{E}(R)$.

Beweis. Zunächst wollen wir einige Aussagen aus Ax ableiten:

1. $CCpqC^{\sigma}C^{\rho}CrsC^{\rho}CsrC^{\rho}CtuC^{\rho}CutCvwCpq$ (Substitution von Satz 15,8 $= CCrsC^{\rho}CqpCrs$).

2. $C^{\rho}CpqC^{\rho}CqpCpp$ (Satz 9. $\alpha/Cppk/\rho$).

3. $C^{\rho}CpqC^{\rho}CqpCrr$ (verm. 2. und $CCppCrr$ nach Satz 4).

4. $CCrsC^{\rho}CpqC^{\rho}CqpCrs$ (Satz 3a, a. $\alpha/3$, γ/r, δ/s).

5. $CCvwC^{\rho}CtuC^{\rho}CutCvw$ (4. $r/v\, s/w\, p/t\, q/u$).

6. $CC^{\rho}CtuC^{\rho}CutCvwC^{\rho}CrsC^{\rho}CsrC^{\rho}CtuC^{\rho}CutCvw$ (Substitution von 5).

7. $CCpqC^{\sigma-1}C^{\rho}CrsC^{\rho}CsrCvwCC^{\rho}CtuC^{\rho}CutCvwCpq$ (Satz 5 $\alpha/1.$, $\beta/7.$; setzt man $5. = C\delta_1\gamma_1$ und $6. = C\delta_2\gamma_2$, so entsteht 7. aus 1., in dem man in 1. γ_1 durch δ_1 an $\sigma-1$ ungeraden Stellen sowie γ_2 durch δ_2 an einer ungeraden Stelle ersetzt).

Wenden wir uns nun zu Fin_r und ersetzen wir in dieser Aussage die Variable durch die r Werte von R, so werden dabei stets gewisse zwei Variable aus der Reihe $p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}$ durch gleiche Werte ersetzt. Es ist demnach Fin_r R-wahr, wenn dasselbe auf alle Aussagen $Fin_r p_k/p_l\,(k, l = 1, 2, \ldots, r+1;\ k < l)$ zutrifft. Der Kürze halber werde ich diese Behauptung bloß für den Fall $r = 2, k = 1$ und $l = 2$ beweisen, d. h. ich werde zeigen, daß die Aussage $Fin_2 p_1/p_2$ wahr ist (s. oben Fin_2); ganz analog führe man den Beweis im allgemeinen Fall. $Fin_2 p_1/p_2$ ist von der Gestalt:

$$(1)\ C^{\sigma} C^{2\varrho} C p_2 p_2 C q r C^{2\sigma+1} C^{\varrho} C p_2 p_3 C^{\varrho} C p_3 p_2 C q r C^{2\varrho} C q q C q r.$$

Ersetzen wir in letzterer Aussage überall $C p_2 p_2$ durch $C q q$, so erhalten wir eine Aussage (2), so daß $C(1)(2)$ und $C(2)(1)$ beweisbar sind (Satz 7, d und Id*). Es genügt daher zu zeigen, daß (2) R-wahr ist. Nun ist (2) eine Substitution von

$$C C p q C^{\sigma-1} C^{\varrho} C r s C^{\varrho} C s r C v w C C^{\varrho} C t u C^{\varrho} C u t C v w C^{2\sigma} C x y C p q,$$

welche Aussage aber mit Hilfe von 7. (s. oben) sowie der Aussage $C C p q C^{\sigma} C r s C p q$ (Satz 15,8.) nach dem Schema $C\alpha_1 C\alpha_2, \ldots, C\alpha_k \gamma$ & $C\gamma\delta \rightarrow C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_k \delta$ beweisbar ist. Somit ist (1) d. h. $Fin_2 p_1/p_2$ R-wahr und damit unser Beweis beendet.

Wir fügen nun Fin_r zu Ax hinzu und zeigen:

Satz 23. Sämtliche R-wahre Aussagen sind beweisbar.

Beweis. Gemäß Satz 14 genügt es, folgenden Satz zu beweisen: Sind für irgendein $s \geqq r$ alle höchstens s-dimensionale R-wahre Aussagen beweisbar, so gilt dasselbe für alle $s+1$-dimensionalen R-wahren Aussagen. Sei zu diesem Zwecke α irgendwelche R-wahre $s+1$-dimensionale Aussage. Wir können annehmen, daß in α alle Variable der Reihe $p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}$ vorkommen. Betrachten wir nun die Aussagen $\alpha p_k/p_l\,(k, l = 1, 2, \ldots, r+1;\ k < l)$, so sind sie alle s-dimensional und dabei R-wahr (als Substitutionen von α), somit nach Voraussetzung beweisbar. Gemäß Satz 21 $(p/p_k\, q/p_l)$ sind daher alle Aussagen von der Form $C^{\varrho} C p_k p_l C^{\varrho} C p_l p_k \alpha\,(k, l = 1, 2, \ldots, r+1;\ k < l)$ beweisbar. Ist nun α zunächst von der Form $C\beta\gamma$, so ist ersichtlich vermittels Fin_r die Aussage $C^{2\varrho} C\beta\beta C\beta\gamma$ beweisbar und damit auch $C\beta\gamma = \alpha$ (weil $C\beta\beta$ beweisbar ist). Ist aber α von der Form $N\delta$, so ist die Aussage (1) $CC\delta\delta N\delta$ R-wahr (vgl. Transp_2 $p/\delta\, q/\delta$) und dabei $s+1$ dimensional und vom Typus $C\beta\gamma$. Somit ist (1) beweisbar und daher auch $N\delta = \alpha$ (vermittels $C\delta\delta$). Damit ist die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes und zugleich der **Hauptsatz** vollständig erwiesen worden.

Anmerkung 7. Ist Fin_k für irgendwelche Zahl $k > r$ R-wahr, dann kann man nach obigem Fin_r durch Fin_k sowie in der Definition von der Menge Aq (vgl. Punkt 3 dieses §), die zur Konstruktion von Ax benutzt wurde, r durch k ersetzen.

Anmerkung 8. Betrachtet man als Aussagen bloß C-Aussagen sowie als Matrizen bloß C-Matrizen (d. h. Matrizen $\mathfrak{M}$ ohne Definition von $N_{\mathfrak{M}}(x)$), so gilt der zu dem soeben bewiesenen Hauptsatz analoge

C-**Hauptsatz.** Es ist jede endliche C-Matrix axiomatisierbar, die von den Aussagen Syl_1, Syl_2 und Id* befriedigt wird.

Zum Beweise genügt aus den Ausführungen des gegenwärtigen § alles zu entfernen, was mit dem N-Zeichen im Zusammenhange steht. — Erweitert man dagegen den Begriff der Aussage (und dementsprechend den Begriff der Matrix) indem man eine neue Verknüpfung etwa Fp, hinzufügt, dann hat man im Hauptsatz die Aussagen $CCpqCFpFq$ und $CFpCCpqFq$ oder die Aussagen $CCpqCFqFp$ und $CFqCCpqFp$ hinzuzufügen und dann bei $\alpha = F\beta$ $\beta = \alpha^0$ bzw. $= \alpha^1$ zu setzen. Analog gehe man im Falle der Hinzufügung von Verknüpfungen mit mehr als einem Argumente vor, wobei dann die Verknüpfung Cpq nicht notwendig eine Grundverknüpfung zu sein braucht, sondern eine vermittels der übrigen Operationen gebildete Aussage sein darf.

*

Ich möchte zum Schluß kurz noch einige von meinen Ergebnissen über logische Matrizen angeben; die Beweise werden sobald als möglich veröffentlicht werden. — 1. Ich habe erwiesen, daß die in L—T, § 3 von J. Lukasiewicz ausgesprochene Vermutung über die Axiomatisierbarkeit dieser Matrix vollständig zutrifft. Der Hauptteil des bezüglichen Beweises ist im Jahre 1931 von der mathematischen Fakultät der Universität Warschau eines Preises gewürdigt worden und wird nächstens wahrscheinlich als Publikation der Warschauer Gesellschaft für Wissenschaft erscheinen. — Bei Gelegenheit möchte ich der geschichtlichen Genauigkeit wegen bemerken, daß meine Axiomatisierungen der Systeme L_n^x (vgl. daselbst) ohne Kenntnis von irgendwelchen diesbezüglichen Ergebnissen des Hrn. A. Tarski entstanden sind, wie man infolge einer mangelhaften Redaktion der Bemerkung vor Satz 36 (daselbst) denken könnte; was den Satz 36 selbst anbetrifft, so ist das letzte dort angegebene Axiom aus den übrigen ableitbar.

2. Es könnte ferner das folgende Ergebnis von gewissem Interesse sein: Ist $\mathfrak{M}$ eine Matrix mit folgenden Eigenschaften: 1) eine gewisse C-Aussage ist $\mathfrak{M}$-wahr und 2) es gibt zwei verschiedene $\mathfrak{M}$-gleich-

wertige Aussagen — so ist $\mathrm{E}(\mathfrak{M}) \neq Fl(\mathrm{E}(\mathfrak{M}) \,.\, V_{(2)})$. — Dagegen gilt $\mathrm{E}(\mathfrak{M}) = Fl(\mathrm{E}(\mathfrak{M}) \,.\, V_1)$, genauer $= Fl(Np)$ für folgende endliche Matrix $\mathfrak{M}$, die von keiner C-Aussage erfüllt wird: $A(\mathfrak{M}) = \{0\}$, $B(\mathfrak{M}) = \{1\}$, $C_{\mathfrak{M}}(x, y) = 0$, $N_{\mathfrak{M}}(x) = 1$. Für die Matrix $\mathfrak{M}$ des gewöhnlichen Aussagenkalküls ist von mir der folgende Satz erwiesen worden: Ist X eine endliche Menge $\subset \mathrm{E}(\mathfrak{M}) \,.\, V_{(2)}$, so ist $Fl(X) \neq \mathrm{E}(\mathfrak{M}) \,.\, V_1$.

3. Bezeichnen wir als den Vollständigkeitsgrad einer Matrix $\mathfrak{M}$ die Anzahl der Systeme die $\mathrm{E}(\mathfrak{M})$ umfassen (d. h. dasselbe, was A. Tarski als den kardinalen Vollständigkeitsgrad von $\mathrm{E}(\mathfrak{M})$ bezeichnen würde — vgl. dieses Autors „Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, Monatsh. f. Math. u. Phys. **37**, 2. Heft, § 8), dann ist evident, daß der Vollständigkeitsgrad der oben angeführten Matrix $\mathfrak{M}$, die von keiner C-Aussage erfüllt ist, gleich dem Kontinuum ist. Dasselbe gilt aber von der folgenden endlichen Matrix $\mathfrak{N}$, für welche z. B. $CCppCCppCpp \,\varepsilon\, \mathrm{E}(\mathfrak{N})$: $A(\mathfrak{N}) = \{1, 2, 3\}$, $B(\mathfrak{N}) = \{0\}$, $C_{\mathfrak{N}}(0, 0) = C_{\mathfrak{N}}(3, 3) = 2$, $C_{\mathfrak{N}}(1, 1) = C_{\mathfrak{N}}(2, 2) = 3$, $C_{\mathfrak{N}}(2, 3) = C_{\mathfrak{N}}(3, 2) = 0$, sonst $C_{\mathfrak{N}}(x, y) = 1$, $N_{\mathfrak{N}}(x)$ beliebig. — Ferner gilt folgender Satz: Erfüllt eine Matrix die Bedingungen des oben bewiesenen **Hauptsatzes**, so ist der Vollständigkeitsgrad von $\mathfrak{M}$ endlich. — Beide letzteren Behauptungen behalten ihre Richtigkeit bei, wenn der Gebrauch des N-Zeichens untersagt wird (und dann aus dem **Hauptsatz** die Aussagen Transp_1 und Transp_2 entfernt werden).

4. Zum Schlusse möchte ich das folgende, sehr evidente Ergebnis angeben: Für jede zwei Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ läßt noch eine Matrix $\mathfrak{P}$ mit der Eigenschaft $\mathrm{E}(\mathfrak{P}) = \mathrm{E}(\mathfrak{M}) \,.\, \mathrm{E}(\mathfrak{N})$ folgendermaßen definieren: $W(\mathfrak{P}) =$ die Menge aller geordneten Paare (a, b), wo $a \,\varepsilon\, W(\mathfrak{M})$ und $b \,\varepsilon\, W(\mathfrak{N})$; $B(\mathfrak{P}) =$ die Menge der geordneten Paare (a, b), wo $a \,\varepsilon\, B(\mathfrak{M})$ und $b \,\varepsilon\, B(\mathfrak{N})$; $C_{\mathfrak{P}}((x, (x')(y, y') = (C_{\mathfrak{M}}(x, y), C_{\mathfrak{N}}(x', y'), N_{\mathfrak{P}}(x, x')) = (N_{\mathfrak{M}}(x), N_{\mathfrak{N}}(x'))$. — Sind dabei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ endlich, dann ist offenbar auch $\mathfrak{P}$ endlich und damit ist gezeigt worden, daß es für zwei endliche Matrizen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ stets eine endliche Matrix $\mathfrak{P}$ gibt (man könnte sie das Produkt von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ nennen), derart daß $\mathrm{E}(\mathfrak{P}) = \mathrm{E}(\mathfrak{M}) \,.\, \mathrm{E}(\mathfrak{N})$.

Zusatz bei Korrektur. Beispiel nichtaxiomatisierbarer endlicher Matrizen $\mathfrak{M}$: $W(\mathfrak{M}) = \{0, 1, \ldots k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $B(\mathfrak{M} = \{0\}$, $C_{\mathfrak{M}}(x, y) = y$, $N_{\mathfrak{M}}(x) = 0$. Beachten wir, daß $E(\mathfrak{M}) =$ die Menge aller Aussagen des Typus $N\alpha$ oder $C\beta_1\, C\beta_2 \ldots C\beta_l\, N\alpha$ $(l = 1, 2, \ldots)$, so folgt die Nichtaxiomatisierbarkeit von $\mathfrak{M}$ aus der evidenten Tatsache, daß jede endliche Menge von Aussagen des obigen Typus für ein gewisses m aus $Cp_1\, Cp_2 \ldots Cp_m\, Nq$ ableitbar ist, von welcher aber die Aussage $Cp_1\, Cp_2 \ldots Cp_{m+1}\, Nq$ unabhängig ist.

Berichtigung. Das in meiner Abhandlung „Ein erweiterter Klassenkalkül", Monatsheft f. Math. u. Phys., **40**, 1. Heft, S. 125, angeführte Axiomensystem des kombinierten Aussagen- und Prädikatenkalküls von Hilbert und Ackermann wird vollständig erst nach Hinzufügung eines neuen Axioms der Gestalt $X \,\&\, \overline{X}$.

(Eingegangen, 6. X. 1933.)