Ein neues Summenverfahren zur Berechnung der Momente.

Von **Kazuo Kimio Midutani** in Kobe.

Gegeben sei eine diskontinuierliche Verteilung:

(1) $$y_r = w(x_r) \qquad [r = 1, 2, 3, \ldots, p]$$

wobei

(1a) $$x_{r+1} - x_r = h \quad [r = 1, 2, 3, \ldots, (p-1)]$$

konstant ist.

Nun möchte ich folgende Methode des Summenverfahrens[1]) zur Berechnung der Momente l-ter Ordnung[2])

$$M_l = \sum_{i=1}^{p} x_i^l y_i$$

vorschlagen:

Wir können annehmen, daß die Argumente x_i symmetrisch in bezug auf 0 sind. Wir setzen dann

(2) $$x_r = u(r) \cdot d + c,$$

wobei

---

[1]) Vgl. dazu: W. P. Elderton, Frequency Curves and Correlation, London 1927, S. 19—23; E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, **1**, Leipzig und Berlin 1924, S. 407 u. f.

[2]) Vgl. z. B.: W. P. Elderton, a. a. O. S. 14; R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Wien 1931, S. 40.

für $p=2m+1$

$$d=h,\quad u(r)=r \qquad [r=-m,-(m-1),\dots -1,0,1,\dots,m]$$

für $p=2m$

$$d=\frac{h}{2},\quad u(r)=2r-1 \qquad [r=-(m-1),-(m-2),\dots -1,0,1,\dots,m]$$

ist.

Mit Hilfe des sogenannten allgemeinen Verschiebungssatzes[3])

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}x^r M_{k-r}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}(x-a)^r \mathfrak{M}_{k-r},$$

worin bekanntlich a das arithmetische Mittel der x_r bedeutet, und mit Hilfe der Identität

$$\sum_{r=1}^{p}\{u(r)\cdot h\}^k\cdot y_r=h^k\sum_{r=1}^{p}u^k(r)\cdot y_r \tag{3}$$

dürfen wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Annahme treffen:

$$x_r=u(r) \tag{4}$$

Wir führen nun einige abkürzende Bezeichnungen ein:

$$s_k=\sum_{i=k}^{m}y_i;\quad s'_k=\sum_{i=k}^{m}s_i;\quad \dots,\quad s_k^{(l)}=\sum_{i=k}^{m}s_i^{(l-1)} \tag{5}$$

$$s_{-k}=\sum_{i=k}^{m}y_{-i};\quad s'_{-k}=\sum_{i=k}^{m}s_{-i};\quad \dots,\quad s_{-k}^{(l)}=\sum_{i=k}^{m}s_{-i}^{(l-1)},$$

dabei bedeutet $y_r=w(u(r))$ wie in (1) und $m=\frac{p}{2}$ oder $\frac{p-1}{2}$, je nachdem p gerade oder ungerade ist.

Außerdem schreiben wir:

$$S_0^+=s_1;\quad S_1^+=s'_1;\quad \dots,\quad S_l^+=s_l^{(l)}; \tag{6}$$

$$S_0^-=s_{-1};\quad S_1^-=s'_{-1};\dots,\quad S_l^-=s_{-l}^{(l)}$$

$$S_k=S_k^++S_k^-;\quad D_k=S_k^+-S_k^-$$

---

[3]) R. v. Mises, a. a. O. S. 40.

Schließlich machen wir den Ansatz:

$$t^{[-k]} \equiv \prod_{r=0}^{k-1} (t-r), \qquad t^{[-0]} \equiv 1 \tag{7}$$

$$(at+b)^k \equiv \sum_{r=0}^{k} \alpha_{k,r}(a,b)\, t^{[-(k-r)]},$$

aus welchen Formeln die $\alpha_{k,r}(a,b)$ im speziellen Fall leicht eindeutig berechnet werden können. Insbesondere schreiben wir noch $\alpha_{k,r}(1,0) \equiv \alpha_{k,r}$. Nun erhalten wir aus (6), (7), (8) folgende Beziehungen:

$$S_0^+ = \sum_{i=1}^{m} y_i; \quad l!\, S_l^+ = \sum_{i=l}^{m} (i^{[-l]} y_i) \tag{8}$$

$$S_0^- = \sum_{i=1}^{m} y_{-i}; \quad l!\, S_l^- = \sum_{i=l}^{m} (i^{[-l]} y_{-i})$$

$$(\pm i)^l = (\pm 1)^l \sum_{r=0}^{l} \alpha_{l,r} \cdot i^{[-(l-r)]}$$

$$(2i-1)^l = \sum_{r=0}^{l} \{\alpha_{l,r}(2,-1) \cdot i^{[-(l-r)]}\}.$$

Daraus ergeben sich die Formelgruppen:

Für ungerades p:

$$
\begin{aligned}
M_0 &= S_0 + y_0 \\
M_1 &= D_1 \\
M_2 &= 2\, S_2 + S_1 \\
M_3 &= 6\, D_3 + 6\, D_2 + D_1 \\
M_4 &= 24\, S_4 + 36\, S_3 + 14\, S_2 + S_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M_l &= \sum_{r=0}^{l} \{(l-r)!\, \alpha_{l,r} \cdot A_{l-r}\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

und für gerades p:

$$
\begin{aligned}
M_0 &= S_0 \\
M_1 &= 2\, D_1 - D_0 \\
M_2 &= 8\, S_2 + S_0
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$M_3 = 48\,D_3 + 24\,D_2 + 2\,D_1 - D_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_l = \sum_{r=0}^{l} \{(l-r)!\,\alpha_{l,r}(2,\,-1)\cdot A_{l-r}\},$$

wobei M_l das Moment l-ter Ordnung bezogen auf den Ursprung bezeichnet und:

$$A_{l-r} = S_{l-r} \qquad \text{für gerades } l$$

$$A_{l-r} = D_{l-r} \qquad \text{für ungerades } l$$

gesetzt wurde. Für eindimensionale Verteilungen haben wir somit die Formeln zur Berechnung der Momente l-ter Ordnung abgeleitet.

Wir wenden uns nun dem selben Problem für mehrdimensionale Verteilungen zu. Wir setzen

$$(11)\quad M_{1^i 2^j \ldots (n-1)^k n^l} \equiv \sum_{r_1=1}^{p_1} \sum_{r_2=1}^{p_2} \ldots \sum_{r_{n-1}=1}^{p_{n-1}} \sum_{r_n=1}^{p_n} x_{r_1}^i x_{r_2}^j \ldots x_{r_{n-1}}^k x_{r_n}^l y_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1} r_n}$$

$$y_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1} r_n} = w(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_{n-1}}, x_{r_n})$$

insbesondere

$$(12)\qquad M_{ij} = M_{1^i 2^j}; \quad M_{ijk} = M_{1^i 2^j 3^k}$$

und

$$(13)\quad {}_{(r_n)}M_{1^i 2^j \ldots (n-1)^k} \equiv \sum_{r_1=1}^{p_1} \sum_{r_2=1}^{p_2} \ldots \sum_{r_{n-1}=1}^{p_{n-1}} x_{r_1}^i x_{r_2}^j \ldots x_{r_{n-1}}^k y_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1} (r_n)}$$

$$y_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1} (r_n)} = w(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_{n-1}}, (x_{r_n})),$$

wobei wir r_n und x_{r_n} eingeklammert haben, um anzuzeigen, daß diese Größen als konstant anzusehen sind.

Das Moment

$$M_{1^i 2^j \ldots (n-1)^k n^l}$$

erhalten wir dann aus den Momenten

$${}_{(r_n)}M_{1^i 2^j \ldots (n-1)^k} \qquad [r_n = 1,\ 2,\ \ldots,\ p_n]$$

mit Hilfe des Summenverfahrens auf die gleiche Art und Weise, wie wir früher das Moment M_l bei eindimensionaler Verteilung aus den y_i erhalten haben.

Besonders wichtig ist die Berechnung des Zählers eines Korrelationskoeffizienten bei einer zweidimensionalen Verteilung:

$$(14) \qquad f_{ij} = f(x_i, y_j) \qquad \begin{bmatrix} x_i = -n, -(n-1), \ldots, 0, \ldots, (m-1), m \\ y_j = -q, -(q-1), \ldots, 0, \ldots, (p-1), p \end{bmatrix}.$$

Der Korrelationskoeffizient sei:

$$r = \frac{\Sigma\,\Sigma\, f_{ij}\,.\,x_i\,.\,y_j}{N\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

wobei $N = \Sigma\,\Sigma f_{ij}$ und σ_x, σ_y die Standardabweichungen der x resp. y sind.

In einem derartigen Falle, wo es lediglich auf die Berechnung der D_i oder S_i $[i = 0, 1, 2, \ldots]$ ankommt, kann das Verfahren stets abgekürzt werden. An obigem Beispiel soll die Berechnung durchgeführt werden, welche das Rechnungsschema derartiger Fälle vollkommen erkennen läßt.

Wir setzen

$$(15) \qquad F_{r,s} = f_{r,s} + f_{-r,-s} - f_{r,-s} - f_{-r,s}$$

$$\begin{bmatrix} r = 1, 2, 3, \ldots, \bar{m}, & \text{wobei} \; \bar{m} \text{ die größere der Zahlen } m \text{ und } n \text{ ist} \\ s = 1, 2, 3, \ldots, \bar{p}, & \phantom{\text{wobei}} \; \bar{p} \text{ die größere der Zahlen } p \text{ und } q \text{ ist} \end{bmatrix}.$$

$$u_{r,h} = \sum_{s=h}^{\bar{p}} F_{r,s}; \qquad U_r = \sum_{h=1}^{\bar{p}} u_{r,h}$$

$$v_k = \sum_{r=k}^{\bar{m}} U_r, \qquad V = \sum_{k=1}^{\bar{m}} v_k.$$

Dann ist V der gesuchte Wert des Zählers, denn es ist

$$V = \sum_{r=1}^{\bar{m}} r \left(\sum_{s=1}^{\bar{p}} s\,.\,F_{r,s} \right) = \sum_{r=1}^{\bar{m}} \sum_{s=1}^{\bar{p}} rs \left(f_{r,s} + f_{-r,-s} - f_{r,-s} - f_{-r,s} \right).$$

In den entwickelten Methoden habe ich die Struktur der Koeffizienten in den Formeln des Summenverfahrens durch die Einführung der Symbole $\alpha_{k,r}$ etc. beleuchtet; damit gelang es mir die Hauptformeln (9) und (10), welche bisher[4]) unbekannt waren, abzuleiten.

---

[4]) Vgl. dazu: W. P. Elderton, Frequency Curves and Correlation, London 1927, S. 21; E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, **1**, Leipzig u. Berlin 1924, S. 411. Eine weitere, bisher unveröffentlichte Methode des Summenverfahrens hat mir Herr O. Boschan mündlich mitgeteilt.

Mit den Symbolen $\alpha_{k,r}$ etc. kann man auch die Formeln von Lidstone und von Czuber, und zwar folgendermaßen wiedergeben:

Die Formeln von Lidstone:

$$\begin{cases} M_0 = S_1 + y_0 \\ M_l = \sum\limits_{r=0}^{l} (-r)^r \left\{ (l-r)!\, \alpha_{l,r}\, S_{l-r+1} \right\}, \end{cases}$$

wobei S_1 und S_{l-r+1} im Sinne Lidstones[5]) gemeint sind.

Die Formeln von Czuber:

$$M_0 = \Sigma_0 + y_0 = S_0 + y_0$$

$$M_l = \sum_{r=0}^{l} \left\{ (l-r)!\, \alpha_{l+1,r} \,.\, A'_{l-r} \right\},$$

wobei

$$\begin{cases} A'_{l-r} = \Sigma_{l-r} & \text{für gerades } l \\ A'_{l-r} = \Delta_{l-r} & \text{für ungerades } l \end{cases}$$

im Sinne Czubers[6]) sind.

Durch die dargelegte Methode glaube ich unnötige Umwege möglichst vermieden und dadurch die Rechnung vereinfacht zu haben. Die Formeln zur Berechnung der Momente bei geradem p und symmetrischer Anordnung der Argumente, die in den zitierten Werken fehlen, fand ich manchmal nützlich. Außerdem ist es mir auch gelungen, die Methode des Summenverfahrens zur Berechnung n-dimensionaler Produktmomente höherer Ordnung[7]) abzuleiten.

Einen großen Teil der vorliegenden Abhandlung habe ich 1931 in „Kokuminkeizai-zasshi" (Zeitschrift für Volkswirtschaftslehre) **50**, Heft 6, zu Kobe in Japan veröffentlicht. Zum Schlusse möchte ich es nicht unterlassen, Frau Dr. Olga Taussky, Herrn Dr. Gerhard Tintner und Herrn Dr. Alfred Müller für die freundliche Durchsicht meines Manuskriptes und ihre wertvollen Ratschläge meinen herzlichen Dank auszudrücken.

---

[5]) W. P. Elderton, a. a. O. S. 19—23.

[6]) E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, **1**, Leipzig u. Berlin, 1924, S. 411.

[7]) Bei einer Berechnung eines zweidimensionalen Produktmomentes 1-ter nung hat Herr H. Iyemoto eine ähnliche Methode verwendet.

Das Schema der Summenbildung.

$x_{\pm i}$	$\pm i$	$y_{\pm i}$	$s_{\pm i}$	$s'_{\pm i}$	$s''_{\pm i}$	$s'''_{\pm i}$	. . . .	
x_{-m}	$-m$	y_{-m}	s_{-m}	s'_{-m}	s''_{-m}	s'''_{-m}	. . .	$(s_{-m}=y_{-m})$
$x_{-(m-1)}$	$-(m-1)$	$y_{-(m-1)}$	$s_{-(m-1)}$	$s'_{-(m-1)}$	$s''_{-(m-1)}$	$s'''_{-(m-1)}$	.	$(s_{-(m-1)}=y_{-m}+y_{-(m-1)})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	.	$\vdots$
						$s'''_{-3}=S_3^-$		
x_{-2}	-2	y_{-2}	s_{-2}	s'_{-2}	$s''_{-2}=S_2^-$			
x_{-1}	-1	y_{-1}	$s_{-1}=S_0^-$	$s'_{-1}=S_1^-$				$(s_{-1}=y_{-m}+y_{-(m-1)}+\dots+y_{-1})$
x_0	0	y_0						
x_1	1	y_1	$s_1=S_0^+$	$s_1=S_1^+$				$(s_1=y_m+y_{m-1}+\dots+y_2+y_1)$
x_2	2	y_2	s_2	s'_2	$s''_2=S_2^+$			$(s_2=y_m+y_{m-1}+\dots+y_2)$
					s''_3	$s'''_3=S_3^+$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	. . .	$\vdots$
x_{m-1}	$m-1$	y_{m-1}	s_{m-1}	s'_{m-1}	s''_{m-1}	s'''_{m-1}	. . .	$(s_{m-1}=y_m+y_{m-1})$
x_m	m	y_m	s_m	s'_m	s''_m	s'''_m	. . . . . .	$(s_m=y_m)$.

Berechnung des Zählers eines Korrelationskoeffizienten.

$F_{1,\bar{p}}$		$u_{1,\bar{p}}$	$F_{2,\bar{p}}$	$u_{2,\bar{p}}$	. . . .		$F_{m,\bar{p}}$	$u_{m,\bar{p}}$	
$F_{1,\bar{p}-1}$		$u_{1,\bar{p}-1}$	$F_{2,\bar{p}-1}$	$u_{2,\bar{p}-1}$	. . . .		$F_{m,\bar{p}-1}$	$u_{m,\bar{p}-1}$	
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	
$F_{1,1}$		$u_{1,1}$	$F_{2,1}$	$u_{2,1}$	. . . .		$F_{m,1}$	$u_{m,1}$	
	U_1			U_2	. . . .			U_m	
V	v_1			v_2	. . . .			v_m	

(Eingegangen: 6. III. 1934.)