Über die Zerlegung der ganzen Zahlen.

Von **Karl Glösel** in Bielitz.

Bei Beantwortung der Frage, auf wie viele Arten sich eine gegebene Zahl σ in r positive Summanden zerlegen lässt, hat man bekanntlich zu unterscheiden, ob die Summanden durchaus verschieden sein sollen oder ob unter ihnen auch gleiche vorkommen können. Im ersten Falle ist die Frage identisch mit der nach der Anzahl $C_r(\sigma)$ der Combinationen r^{ter} Classe ohne Wiederholung der ganzen positiven Zahlen zur Summe σ, im zweiten Falle handelt es sich um die Anzahl $C_r^w(\sigma)$ der Combinationen dieser Elemente mit Wiederholung.

Wegen der Beziehung

$$C_r^w(\sigma) = C_r\left(\sigma + \binom{r}{2}\right)$$

genügt es die Werte der $C_r(\sigma)$ zu kennen. Für die Werte von $r < 5$ hat man sehr einfache independente Ausdrücke derselben aufgestellt, von denen der zu $r = 3$ gehörige von De Morgan Sylvester gefunden und im Bande IV, 1893 der Monatshefte von J. Zuchristian bewiesen wurde, der bei dieser Gelegenheit auch einen solchen für $C_4(\sigma)$ ermittelte.

In den folgenden Zeilen sollen nun die bekannten Formeln für $C_1(\sigma)$, $C_2(\sigma)$, $C_3(\sigma)$ auf einem einfachen Wege neuerdings abgeleitet, für den zu $r = 4$ gehörigen Zuchristian'schen Ausdruck ein einfacherer ermittelt und überdies eine independente Darstellung von $C_5(\sigma)$ gegeben werden.

I. Setzt man

$$(1) \qquad C_r^\mu(\sigma) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} C_r^{\mu-1}(\sigma-\lambda),$$

so folgt aus der bekannten Relation:

$$C_r\sigma = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{\sigma-\binom{r+1}{2}}{r}\right]} C_{r-1}(\sigma-\lambda r)$$

die Beziehung

$$(2)\qquad C_r^\mu(\sigma)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{\sigma-\binom{r+1}{2}}{r}\right]} C_{r-1}^\mu(\sigma-\lambda r).$$

Da $C_1^1(\sigma)$ die Anzahl derjenigen Combinationen erster Classe der Elemente $1, 2, 3, \ldots, \infty$ ist, deren Summe σ nicht übersteigt, so ist

$$C_1^1(\sigma)=\binom{\sigma}{1}$$

und daher nach (2)

$$(3)\qquad C_2^1(\sigma)=\binom{\sigma-2}{1}+\binom{\sigma-4}{1}+\binom{\sigma-6}{1}+\cdots$$

oder

$$C_2^1(2\varkappa)=\varkappa(\varkappa-1)\qquad C_2^1(2\varkappa+1)=\varkappa^2,$$

welche Formeln sich in die folgende vereinigen lassen:

$$(4)\qquad C_2^1(\sigma)=\left[\frac{\sigma}{2}\right]\cdot\left[\frac{\sigma-1}{2}\right],$$

aus welcher sich wegen der aus (1) folgenden Relation:

$$(5)\qquad C_r^{\mu-1}(\sigma)=C_r^\mu(\sigma)-C_r^\mu(\sigma-1)$$

die Gleichung

$$(6)\qquad C_2(\sigma)=\left[\frac{\sigma-1}{2}\right] \text{ und demnach } C_2^{(w)}(\sigma)=\left[\frac{\sigma}{2}\right]$$

ergibt.

Aus (1) und (3) leitet man unter Berücksichtigung der Relation

$$\binom{\sigma}{r-1}+\binom{\sigma-1}{r-1}+\binom{\sigma-2}{r-1}+\cdots=\binom{\sigma+1}{r}$$

zunächst die Beziehung

$$(7)\qquad \begin{aligned} C_3^1(\sigma)=&\binom{\sigma-6}{2}+\binom{\sigma-12}{2}+\binom{\sigma-18}{2}+\cdots+\\ &+\binom{\sigma-5}{1}+\binom{\sigma-11}{1}+\binom{\sigma-17}{1}+\cdots\end{aligned}$$

ab, aus welcher folgt:

$$C_3^1(\sigma)-C_3^1(\sigma-6)=\binom{\sigma-6}{2}+\binom{\sigma-5}{1}=$$
$$=\frac{1}{36}\left((\sigma-3)^3-(\sigma-9)^3\right)+\frac{1}{24}\left((\sigma-4)^2-(\sigma-10)^2\right)$$

Diese Relation führt aber unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $C_3^1(\tau)$ den Wert 0 hat, wenn τ den Rest bedeutet, welchen σ bei der Division durch 6 gibt, sofort zu der Beziehung:

$$(8)\quad 72\,C_3^1(\sigma)=2(\sigma-3)^3+3(\sigma-4)^2-2(\tau-3)^3-3(\tau-4)^2.$$

Nun hat für

τ	$-2(\tau-3)^3-3(\tau-4)^2$ den Wert
0	6
1	-11
2	-10
3	-3
4	-2
5	-19

und demnach unterscheidet sich $C_3^1(\sigma)$ von $\frac{2(\sigma-3)^3+3(\sigma-4)^2}{72}$ absolut genommen um weniger als $\frac{1}{2}$, so dass also

$$(9)\qquad C_3^1(\sigma)=\left\{\frac{2(\sigma-3)^3+3(\sigma-4)^2}{72}\right\},$$

wo mit $\{\alpha\}$ die an α zunächst liegende ganze Zahl bezeichnet ist.

Aus (8) leitet man unter Benützung von (5) unmittelbar die De Morgan-Sylvester'sche Formel ab; man hat nämlich

$$72\,C_3(\sigma)=72\left(C_3^1(\sigma)-C_3^1(\sigma-1)\right)=$$
$$=6(\sigma-3)^2-7-2(\tau-3)^3-3(\tau-4)^2+2(\tau_1-3)^3+3(\tau_1-4)^2,$$

wo τ_1 der Rest ist, welchen $\sigma-1$ bei der Division durch 6 ergibt

Nun ist aber für

τ	$-7+2(\tau_1-3)^3+3(\tau_1-4)^2-2(\tau-3)^3-3(\tau-4)^2$
0	18
1	-24
2	-6
3	0
4	-6
5	-24

und daher

$$C_3(\sigma) = \left\{\frac{(\sigma-3)^2}{12}\right\}.$$

II. Aus (2) und (4) folgt ferner wegen:

$$(\varkappa-\alpha)^2 = \binom{\varkappa-\alpha}{2} + \binom{\varkappa-\alpha+1}{2}$$

$$C_3^1(2\varkappa+1) = \binom{\varkappa}{3} + \binom{\varkappa-1}{3} + \binom{\varkappa-4}{2} + \binom{\varkappa-7}{2} + \cdots$$

oder nach (7)

$$C_3^1(2\varkappa+1) = \binom{\varkappa}{3} + C_3^1(\varkappa+3) + C_3^1(\varkappa+2)$$

und analog

$$C_3^1(2\varkappa) = \binom{\varkappa}{3} + C_3^1(\varkappa+1) + C_3^1(\varkappa),$$

welche Formeln sich ebenfalls zur Berechnung von $C_3^1(\sigma)$ recht gut verwenden lassen. Verbindet man dieselben mit (2), so erhält man

$$(10)\left\{\begin{aligned} C_4^1(2\varkappa+1) &= \binom{\varkappa-2}{3} + \binom{\varkappa-4}{3} + \cdots + C_3^1(\varkappa+1) + C_3^1(\varkappa) + \cdots \\ &= \binom{\varkappa-2}{3} + \binom{\varkappa-4}{3} + \cdots + C_3^2(\varkappa+1) \\ C_4^1(2\varkappa) &= \binom{\varkappa-2}{3} + \binom{\varkappa-4}{3} + \cdots + C_3^1(\varkappa-1) + C_3^1(\varkappa-2) + \\ &= \binom{\varkappa-2}{3} + \binom{\varkappa-4}{3} + \cdots + C_3^2(\varkappa-1). \end{aligned}\right.$$

Durch Subtraction der unteren Gl. (10) von der oberen folgt nach (5)

$$(11a) \qquad C_4(2\varkappa+1) = C_3^1(\varkappa+1) + C_3^1(\varkappa).$$

Setzt man jedoch in der oberen Gl. (10) statt $\varkappa$, $\varkappa-1$ und subtrahiert diese Gl. von der unteren, so folgt zunächst:

$$C_4(2\varkappa) = \binom{\varkappa-3}{2} + \binom{\varkappa-5}{2} + \binom{\varkappa-7}{2} + \cdots + C_3^2(\varkappa-1) - C_3^2(\varkappa).$$

Aus (7) aber folgt leicht, dass

$$C_3^1(\varkappa) + C_3^1(\varkappa-1) + C_3^1(\varkappa-2) = \binom{\varkappa-4}{2} + \binom{\varkappa-6}{2} + \binom{\varkappa-8}{2} + \cdots,$$

mithin auch

$$C_4(2\varkappa)=C_3^1(\varkappa+1)+C_3^1(\varkappa-1) \tag{11b}$$

oder allgemein:

$$C_4(\sigma)=C_3^1\left(\left[\frac{\sigma+2}{2}\right]\right)+C_3^1\left(\left[\frac{\sigma-1}{2}\right]\right).$$

Durch Verbindung von (8) und (11) ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}72\,C_4(2\varkappa+1)=4\varkappa(\varkappa-3)^2+5-2(\rho_1-3)^3-\\-3(\rho_1-4)^2-2(\rho_2-3)^3-3(\rho_2-4)^2,\end{aligned} \tag{12a}$$

wo ρ_1 und ρ_2 die Reste vorstellen, welche sich bei der Division von $\varkappa+1$ beziehungsweise $\varkappa$ durch 6 ergeben.

Nun ist für

ρ_1	ρ_2	$5-2(\rho_1-3)^3-3(\rho_1-4)^2-2(\rho_2-3)^3-3(\rho_2-4)^2$
0	5	-8
1	0	0
2	1	-16
3	2	-8
4	3	0
5	4	-16

und daher wird

$$C_4(2\varkappa+1)=\left\{\frac{2\varkappa(\varkappa-3)^2}{36}\right\}. \tag{13a}$$

Ebenso erhält man:

$$\begin{aligned}72\,C_4(2\varkappa)=(4\varkappa-6)(\varkappa-3)^2+12-2(\rho_1-3)^3-\\-3(\rho_1-4)^2-2(\rho_3-3)^3-3(\rho_3-4)^2,\end{aligned} \tag{12b}$$

wo wie früher ρ_1 der Rest ist, welchen $\varkappa+1$ und ρ_3 der Rest, den $\varkappa-1$ bei der Division durch 6 gibt.

Nun ist für

ρ_1	ρ_3	$12-2(\rho_1-3)^3-3(\rho_1-4)^2-2(\rho_3-3)^3-3(\rho_3-4)^2$
0	4	$+16$
1	5	-18
2	0	$+8$
3	1	-2
4	2	0
5	3	-10

und daher wird

$$(13b) \qquad C_4(2\varkappa) = \left\{\frac{(2\varkappa-3)(\varkappa-3)^2}{36}\right\}$$

oder allgemein

$$(14) \qquad C_4(\sigma) = \left\{\frac{\left[\frac{\sigma-6}{2}\right]^2 \cdot \left(3\left[\frac{\sigma-1}{2}\right] - \left[\frac{\sigma}{2}\right]\right)}{36}\right\},$$

denn wie man leicht ersieht, ist, ob $\sigma = 2\varkappa + 1$ oder $\sigma = 2\varkappa$

$$\left[\frac{\sigma-6}{2}\right] = \varkappa - 3$$

und ebenso

$$3 \cdot \left[\frac{\sigma-1}{2}\right] - \left[\frac{\sigma}{2}\right] = 2\varkappa - 3 \text{ für } \sigma = 2\varkappa \text{ und}$$

$$3\left[\frac{\sigma-1}{2}\right] - \left[\frac{\sigma}{2}\right] = 2\varkappa \qquad \text{für } \sigma = 2\varkappa + 1,$$

womit erwiesen ist, dass (14) beide Formen (13 *a*) und (13 *b*) in sich schließt.

Die Formeln kann man auch aus (10) ableiten, indem man $C_3^2(\sigma)$ durch dasselbe Verfahren bestimmt, welches zur Ermittelung von $C_3^1(\sigma)$ benützt wurde. Aus (7) folgt

$$C_3^2(\sigma) = \binom{\sigma-5}{3} + \binom{\sigma-11}{3} + \binom{\sigma-17}{3} + \cdots +$$
$$+ \binom{\sigma-4}{2} + \binom{\sigma-10}{2} + \binom{\sigma-16}{2} + \cdots$$

somit

$$144\left(C_3^2(\sigma) - C_3^2(\sigma-6)\right) = 144\left(\binom{\sigma-4}{3} + \binom{\sigma-5}{2}\right) = 24\sigma^3 - 360\sigma^2 + $$
$$+ 1920\sigma - 3600$$
$$= \sigma^4 - 8\sigma^3 + 16\sigma^2 - \left((\sigma-6)^4 - 8(\sigma-6)^3 + \right.$$
$$\left. + 16(\sigma-6)^2\right)$$

und somit, wenn τ_1 den Rest bezeichnet, den σ bei der Division durch 6 gibt, weil $C_3^2(\tau_1) = 0$ ist

$$144\, C_3^2(\sigma) = \sigma^2(\sigma-4)^2 - \left(\tau_1^4 - 8\tau_1^3 + 16\tau_1^2\right)$$
$$= \sigma^2(\sigma-4)^2 - \tau_1^2(\tau_1-4)^2$$

und weil für

τ_1	$-\tau_1^2 \cdot (\tau_1 - 4)^2$ den Wert hat
0	0
1	-9
2	-16
3	-9
4	0
5	-25

$$C_3^2(\sigma) = \left\{\frac{\sigma^2(\sigma-4)^2}{144}\right\} \tag{15a}$$

oder auch

$$C_2^2(\sigma) = \frac{\sigma^2(\sigma-4)^2 - 16\left(\left[\frac{\sigma+1}{3}\right] - \left[\frac{\sigma}{3}\right]\right) - 9\left(\left[\frac{\sigma+1}{2}\right] - \left[\frac{\sigma}{2}\right]\right)}{144} \tag{15b}$$

denn $16\left(\left[\frac{\sigma+1}{3}\right] - \left[\frac{\sigma}{3}\right]\right)$ gibt den Wert 16 für $\tau_1 = 2$ und 5

und $9\left(\left[\frac{\sigma+1}{2}\right] - \left[\frac{\sigma}{2}\right]\right)$ gibt den Wert 9 für $\tau_1 = 1$, 3 und 5, während diese Glieder beziehungsweise für die Reste 0, 1, 3, 4 und 0, 2, 4 verschwinden. Mit Hilfe der Gl. (15) könnte man jetzt wieder (12) und (13) beweisen.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass durch Subtraction der Gleichungen (10) die bemerkenswerte Beziehung:

$$C_4(2\varkappa+1) - C_4(2\varkappa) = C_3(\varkappa)$$

entsteht, welche auch für Combinationen mit Wiederholungen giltig ist, da $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = \binom{3}{2}$. Aus derselben kann man unter Benützung von (12) wieder die De Morgan-Sylvester'sche Formel ableiten.

III. Weit complicierter als die bisher aufgestellten, ist der independente Ausdruck für $C_5(\sigma)$, dessen Herstellung nun durchgeführt werden soll.

Aus (2) und (11) folgt

$$C_5(2\varkappa+1) =$$
$$= C_3^2(\varkappa-1) - \left(C_3^1(\varkappa-2) + C_3^1(\varkappa-7) + C_3^1(\varkappa-12) + \cdots\right)$$
$$C_5(2\varkappa) =$$
$$= C_3^2(\varkappa-2) - \left(C_3^1(\varkappa-5) + C_3^1(\varkappa-10) + C_3^1(\varkappa-15) + \cdots\right)$$

Nun ist nach (7)

$$C_3^1(\varkappa)+C_3^1(\varkappa-1)+\cdots C_3^1(\varkappa-5)=\binom{\varkappa-5}{3}+\binom{\varkappa-4}{2}$$

und demnach

$$C_3^1(\varkappa-5)+C_3^1(\varkappa-10)+C_3^1(\varkappa-15)+\cdots=$$
$$=\binom{\varkappa-5}{3}+\binom{\varkappa-10}{3}+\cdots+\binom{\varkappa-4}{2}+\binom{\varkappa-9}{2}+\cdots-C_3^2(\varkappa).$$

Die Summe der Reihen

$$\binom{\varkappa-5}{3}+\binom{\varkappa-10}{3}+\cdots+\binom{\varkappa-4}{2}+\binom{\varkappa-9}{2}+\cdots$$

lässt sich nun sehr leicht in folgender Art bestimmen; bezeichnet man

$$\binom{\varkappa-4}{3}+\binom{\varkappa-9}{3}+\binom{\varkappa-14}{3}+\cdots+\binom{\varkappa-3}{2}+\binom{\varkappa-8}{2}+\binom{\varkappa-13}{2}+\cdots$$

mit $S(\varkappa)$, so ergibt sich leicht

$$120\left(S(\varkappa)-S(\varkappa-5)\right)=20\varkappa^3-240\varkappa^2+1060\varkappa-1680=$$
$$=\varkappa^4-6\varkappa^3+11\varkappa^2-6\varkappa-\left((\varkappa-5)^4-6(\varkappa-5)^3+11(\varkappa-5)^2-6(\varkappa-5)\right),$$

es folgt wieder, da $S(\rho)$ gleich Null ist, wenn ρ den Rest bedeutet, der sich bei der Division von $\varkappa$ durch 5 ergibt und

$$\varkappa^4-6\varkappa^3+11\varkappa^2-6\varkappa=\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)(\varkappa-3)$$

ist

$$120\,S(\varkappa)=\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)(\varkappa-3)-\rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3),$$

$\rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3)$ ist aber für die Werte von $\rho=0,\ 1,\ 2,\ 3$ gleich 0 und hat nur für $\rho=4$ den Wert 24; im letzteren Falle ist jedoch immer

$$\left[\frac{\varkappa+1}{5}\right]=\left[\frac{\varkappa}{5}\right]+1,$$

in allen anderen Fällen

$$\left[\frac{\varkappa+1}{5}\right]-\left[\frac{\varkappa}{5}\right]=0,$$

somit geht der Wert $S(\varkappa)$ über in:

$$S(\varkappa)=\frac{1}{5}\left(\binom{\varkappa}{4}-\left[\frac{\varkappa+1}{5}\right]+\left[\frac{\varkappa}{5}\right]\right)=\left\{\frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)(\varkappa-3)}{120}\right\}$$

und nun folgen unter Benützung von (13) die Relationen:

$$C_5(2\varkappa) = \left\{\frac{\varkappa^2(\varkappa-4)^2}{144}\right\} + \left\{\frac{(\varkappa-2)^2(\varkappa-6)^2}{144}\right\} - \left\{\frac{\binom{\varkappa-1}{4}}{5}\right\} \tag{15}$$

$$C_5(2\varkappa+1) = \left\{\frac{(\varkappa+3)^2(\varkappa-1)^2}{144}\right\} + \left\{\frac{(\varkappa-1)^2(\varkappa-5)^2}{144}\right\} - \left\{\frac{\binom{\varkappa+2}{4}}{5}\right\}. \tag{14}$$

Es lassen sich zwar diese beide Formen in eine einzige vereinigen. Doch dürfte dieselbe ihrer Compliciertheit wegen weniger brauchbar sein.

$$\begin{aligned} C_5(\sigma) &= \\ &= \frac{\begin{gathered}\left(\left(5\left[\frac{\sigma-1}{2}\right]-4\left[\frac{\sigma}{2}\right]+3\right)^2\left(5\left[\frac{\sigma-1}{2}\right]-4\left[\frac{\sigma}{2}\right]-1\right)^2 - \right.\\ -16\left(\left[\frac{\sigma+1}{3}\right]+\left[\frac{\sigma-1}{3}\right]-\left[\frac{\sigma}{3}\right]-\left[\frac{\sigma-2}{3}\right]\right)-18\left(\left[\frac{\sigma-1}{4}\right]-\left[\frac{\sigma-2}{4}\right]\right)-\\ \left.-18\left(\left[\frac{\sigma-2}{4}\right]-\left[\frac{\sigma-3}{4}\right]\right)+\left(2\left[\frac{\sigma}{2}\right]-\left[\frac{\sigma-1}{2}\right]-1\right)^2\left(2\left[\frac{\sigma}{2}\right]-\left[\frac{\sigma-1}{2}\right]-5\right)^2\right)\end{gathered}}{144} + \\ &+ \frac{1}{5}\left(\binom{3\left[\frac{\sigma-1}{2}\right]-\left[\frac{\sigma}{2}\right]+2}{4} - \left(\left[\frac{\sigma}{5}\right]-\left[\frac{\sigma-1}{5}\right]\right)\right). \end{aligned}$$

Auf einem anderen Wege lässt sich noch folgende einheitliche Form für $C_5(\sigma)$ ableiten:

$$\begin{aligned} C_5(\sigma) &= \\ & 1\,.\binom{\left[\frac{\sigma+1}{3}\right]}{4} + 3\binom{\left[\frac{\sigma}{3}\right]}{4} + 6\binom{\left[\frac{\sigma-1}{3}\right]}{4} + 7\binom{\left[\frac{\sigma-2}{3}\right]}{4} + 6\binom{\left[\frac{\sigma-3}{3}\right]}{4} + \\ &+ 3\binom{\left[\frac{\sigma-4}{3}\right]}{4} + 1\,.\binom{\left[\frac{\sigma-5}{3}\right]}{4} - \binom{\left[\frac{\sigma-4}{2}\right]}{4} - \\ &- 2\left(1\,.\binom{\left[\frac{\sigma+3}{4}\right]}{4} + 3\binom{\left[\frac{\sigma+1}{4}\right]}{4} + 3\binom{\left[\frac{\sigma-1}{4}\right]}{4} + 1\binom{\left[\frac{\sigma-3}{4}\right]}{4} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{5}\left(\binom{\sigma-6}{4} - \left[\frac{\sigma-5}{5}\right] + \left[\frac{\sigma-6}{5}\right]\right)\right). \end{aligned}$$
