

Über die Construction der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades.

Von Karl Schober in Innsbruck.

Das Problem, eine Fläche zweiten Grades nach einer gleichseitigen Hyperbel zu schneiden, wurde auf analytischem Wege schon vor längerer Zeit von Schlömilch¹⁾, ferner in neuester Zeit von M. Krewer²⁾ in Dorpat und auf elementarem Wege, nur den Kegel betreffend, von G. Weyer³⁾ in Kiel behandelt. Eine ältere Besprechung der letzteren Frage rührt von De la Chapelle⁴⁾ her.

Einer synthetischen und constructiven Behandlung scheint jedoch die genannte Aufgabe, einige besondere Fälle ausgenommen, noch nicht unterzogen worden zu sein. Dies soll nun im Folgenden versucht werden. Die betreffenden Erörterungen und Constructionen gestalten sich infolge der Benützung einer Hilfskugelfläche überraschend einfach und durchsichtig; sie führen außerdem zu einigen interessanten Sätzen über den Ort derjenigen Punkte der windschiefen Flächen zweiten Grades, in denen die beiden Erzeugenden zueinander normal sind.

Indem wir das dreiachsige Ellipsoid und das elliptische Paraboloid sammt den entsprechenden Rotationsflächen, ferner den elliptischen und den parabolischen Cylinder als Flächen, welche mit der unendlich fernen Ebene keinen Kegelschnitt gemein haben und deshalb von einer Ebene nach einer Hyperbel nicht geschnitten werden können, von vornherein aus dem Kreise unserer Erörterungen ausscheiden, haben wir uns nur mit den beiden dreiachsigen Hyper-

¹⁾ „Über die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades“, Zeitschrift f. Math. u. Physik, 6. Jahrg., pag. 418 ff.

²⁾ „Über das Problem, eine Fläche zweiten Grades in einem der Gestalt und Größe nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden“, Archiv f. Math. u. Physik, II. R., 12. Thl., pag. 185 ff.

³⁾ „Elementare Bestimmung der Lage der gleichseitigen Hyperbel im Kegel.“ Archiv f. Math. u. Physik, II. R., 14. Thl., pag. 139 ff.

⁴⁾ „Traité des sections coniques“, Paris 1750, deutsch von Böckmann, Karlsruhe 1791.

boloiden und den entsprechenden Rotationsflächen, dem hyperbolischen Paraboloid, dem hyperbolischen Cylinder und dem Kegel zu beschäftigen.

Betrachten wir zuerst den Kegel.

Die Asymptotenrichtungen irgend eines hyperbolischen Schnittes eines Kegels zweiten Grades sind bekanntlich diejenigen Erzeugenden des Kegels, welche zu der schneidenden Ebene parallel sind; dieselben müssen für den in Rede stehenden Fall der gleichseitigen Hyperbel zueinander normal sein. Es handelt sich somit um die Ermittlung derjenigen Durchmesser-ebenen eines Kegels, welche denselben in Paaren von zueinander normalen Erzeugenden schneiden. Zu jeder derartigen Durchmesser-ebene gehört eine Parallelschar von Ebenen, welche den Kegel nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden.

Da jeder beliebige Kegel zweiten Grades als ein Kreiskegel dargestellt werden kann, dessen Basis irgend ein Kreisschnitt jenes Kegels ist, so können wir uns, ohne der Allgemeinheit zu schaden, auf die Besprechung des Kreiskegels beschränken.

I. Der schiefe Kreiskegel.

Wir bringen denselben in möglichst einfache Lage zu den Projectionsebenen, indem wir den Basiskreis K in P_I und die zu demselben normale Hauptebene in P_{II} verlegen. Dann seien AS und BS die längste und die kürzeste Erzeugende, welche am Scheitel den Winkel α miteinander einschließen, ASB kurz das charakteristische Dreieck des schiefen Kreiskegels, SM die Mittellinie m und SS' die Höhe h ; ferner seien a, b, c die drei Halbachsen, u. zw. a und b die in P_{II} liegenden (a innerhalb des Kegels) und c die auf P_{II} normale.

Mit Rücksicht auf die Größe des Winkels α wollen wir die drei Fälle unterscheiden:

1. $\alpha = 90^\circ$. Dass in diesem Falle außer der Hauptebene P_{II} auch die beiden durch m und h gelegten zu P_{II} normalen Ebenen den Kegel SK ¹⁾ nach Erzeugenden schneiden, die aufeinander normal stehen, ist ohneweiters klar, da die Schnittdreiecke der letzten zwei Ebenen mit dem Kegel gleichschenkelig-rechtwinklig sind. Es schneidet aber auch jede beliebige durch m und jede beliebige durch h gelegte Ebene aus dem Kegel zwei zueinander normale Erzeugende aus; dies zeigt die Betrachtung der entstandenen rechtwinkligen Schnittdreiecke, von denen sich jedes der ersten

¹⁾ Der Kegel mit dem Scheitel S und dem Basiskreise K wird kurz mit SK bezeichnet.

Gruppe aus zwei gleichschenkligen Dreiecken mit dem gemeinsamen Schenkel m und jedes der zweiten Gruppe aus zwei rechtwinkligen Dreiecken mit h als gemeinsamer Kathete zusammensetzt. Noch leichter wird dies erkannt, wenn man sich über dem Basiskreise K des Kegels die Halbkugel construiert denkt, auf welcher der Kegelscheitel S liegt. Jede durch S und den Mittelpunkt des Basiskreises (gleichzeitig Kugelmittelpunkt M), also durch m , ebenso jede durch S normal zu P_1 , also durch h , gelegte Ebene schneidet die Halbkugel nach einem Halbkreise, somit den eingeschriebenen Kegel nach einem bei S rechtwinkligen Dreiecke.

Es gilt somit der Satz:

Jeder schiefe Kreiskegel, in welchem der Winkel am Scheitel des charakteristischen Dreieckes 90° beträgt, wird durch unendlich viele Parallelscharen von Ebenen nach gleichseitigen Hyperbeln geschnitten.¹⁾ Alle zu denselben parallelen Durchmesserbenen des Kegels erfüllen zwei Ebenenbüschel, deren Achsen die Mittellinien m und die Höhe h des Kegels sind.

Da durch jede Erzeugende des Kegels SK eine Ebene des Büschels m und eine des Büschels h hindurchgeht, so gibt es zu jeder Erzeugenden zwei andere, die auf ihr normal stehen. Ausgenommen sind die Erzeugenden AS und BS , für welche die entsprechenden Ebenen der beiden Büschel zusammenfallen.

2. $\alpha > 90^\circ$. Die Möglichkeit von Durchmesserbenen, welche den Kegel nach zueinander normalen Erzeugenden schneiden, ist sofort einzusehen; denn die durch S gehende Normalebene irgend einer Erzeugenden schneidet in diesem Falle den Kegel stets nach zwei Erzeugenden, deren jede auf der ersteren normal steht, daher mit derselben eine Durchmesserebene von der verlangten Eigenschaft bestimmt. Alle jene Normalebene hüllen einen Kegel, den Normal- oder Reciprocalkegel, ein, dessen Tangierungsebenen zur Construction der verlangten Durchmesserbenen benützt werden können.²⁾ Hier soll jedoch ein anderer Weg eingeschlagen werden, indem wir die letztgenannten Ebenen mittelst ihrer Enveloppe direct ermitteln.

Wir construierten über dem Basiskreise K des gegebenen Kegels das Kugelsegment k (Fig. 1), welches den Kegelscheitel S enthält.

Jede Ebene, durch welche dieses Kugelsegment nach einem Halbkreise geschnitten wird, schneidet den Kegel offenbar nach zwei zueinander normalen Erzeugenden. Der in $K(P_1)$ gelegene Durchmesser eines jeden solchen Kreises halbiert die durch S normal zu jenem Durchmesser gelegte Kugelsehne. Nun liegen die

¹⁾ Vergl. G. Weyer, a. a. O., pag. 141, wo in diesem Falle nur von zwei Systemen von Schnittebenen gesprochen wird.

²⁾ Vergl. Peschka, Darst. und proj. Geometrie, III. Bd., pag. 59.

Endpunkte aller durch S gehenden Kugelsehnen, welche durch P_1 halbiert werden, auf demjenigen Kugelkreise x ($XY = x''$), dessen Ebene zu P_1 parallel ist und von S die Entfernung $2h$ besitzt. (Dann ist $SC = CX$, $SD = DY$ u. s. w.) Die Mittelpunkte dieser Sehnen erfüllen den Kreis K_1 in P_1 ($CD = \frac{1}{2} XY$). Jede Ebene ε ,

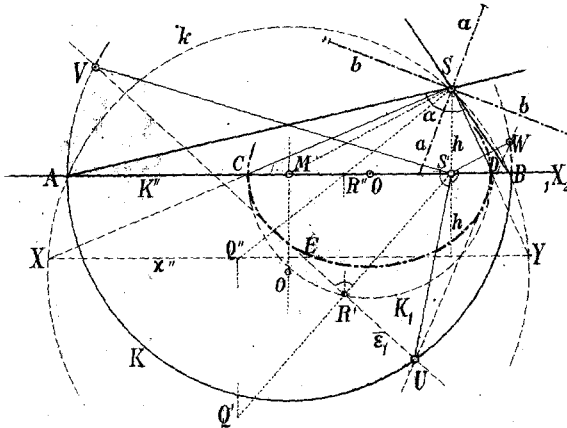


Fig. 1.

welche durch eine solche Sehne, z. B. $SQ = 2 SR$, derart gelegt wird, dass ihre erste Spur ε_1 auf ihr normal steht ($\varepsilon_1 \perp S'R'$), schneidet das Kugelsegment k nach einem Halbkreise und den Kegel SK nach einem über dem Durchmesser UV des Halbkreises errichteten, bei S rechtwinkligen Dreiecke USV .

Aus der Construction $UV \perp S'R'$ folgt, dass alle derartigen

Sehnen UV des Basiskreises K des gegebenen Kegels eine Ellipse E einhüllen, für welche der Durchmesser CD des Kreises K_1 (des Scheitelkreises von E) die Hauptachse und die Projection S' des Kegelscheitels ein Brennpunkt ist. Beachten wir noch, dass wegen der Gleichheit der Peripheriewinkel ASX und BSY im Kreise k die Winkel ASB und $XS Y$ der Contourerzeugenden der beiden Kegel SK und SE die nämliche Halbierende α besitzen, so erhalten wir folgenden Satz über das Kugelsegment:

Alle Ebenen, welche durch einen Punkt eines Kugelsegmentes, das kleiner als eine Halbkugel ist, hindurchgehen, und dasselbe nach Halbkreisen schneiden, hüllen einen elliptischen Kegel ein, dessen Achsenrichtungen mit denen der gleichartigen (inneren und äußeren) Achsen desjenigen Kegels zusammenfallen, der den gegebenen Punkt zum Scheitel und den Grenzkreis des Kugelsegmentes zur Basis hat.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Halbkreisschnittebenen des Kugelsegmentes für den Kegel SK können wir den vorigen Satz über das Kugelsegment ohneweiters auch für den schiefen Kreiskegel verwenden und ihn folgendermaßen ausdrücken:

Alle Durchmessersebenen eines schiefen Kreiskegels mit dem Winkel $\alpha > 90^\circ$, welche denselben nach Erzeugenden schneiden, die zu einander normal

sind, hüllen einen elliptischen Kegel ein, dessen Achsenrichtungen mit denen der gleichartigen (inneren und äußeren) Achsen des gegebenen Kegels zusammenfallen.

Jede Sehne (UV, UW) des Kreises K , welche gleichzeitig Tangente der Ellipse E ist, bestimmt mit S eine Tangentialebene des Kegels SE , somit eine Durchmessersebene des Kegels SK mit zwei zueinander normalen Schnitterzeugenden; diese selbst sind die Verbindungsgeraden des Kegelscheitels mit den Endpunkten der betreffenden Sehne (SU, SV und SU, SW).

Jede zu irgend einer Tangentialebene des Kegels SE parallele Ebene schneidet den Kegel SK nach einer gleichseitigen Hyperbel.

Es wird somit auch jeder schiefe Kreiskegel mit dem Winkel $\alpha > 90^\circ$ von unendlich vielen Parallelscharen von Ebenen, deren Stellungen durch die Tangentialebenen des Hilfskegels SE bestimmt sind, nach gleichseitigen Hyperbeln geschnitten.

3. $\alpha < 90^\circ$. In diesem Falle lässt nicht jeder schiefe Kreiskegel gleichseitige Hyperbelschnitte zu; die Möglichkeit solcher Schnitte ist an eine bestimmte Beziehung zwischen den Größen α, h und dem Radius r des Basiskreises K gebunden.¹⁾

Die constructive Untersuchung irgend eines vorliegenden Falles erfolgt mit Benützung der dem Kegel umgeschriebenen Kugel k äußerst einfach; das Segment, in welchem der Kegel liegt, ist hier größer als eine Halbkugel.

Die zu P_1 parallele Ebene im Abstände $2h$ vom Kegelscheitel S (Fig. 2) schneidet das untere Ergänzungssegment nach einem Kreise x ($XY = x''$), wenn die Höhe h des Kegels kleiner ist als die Höhe MN des Ergänzungssegmentes. Der Kugelkreis x bestimmt wie früher mit S den Kegel, dessen Erzeugenden durch P_1 in den Punkten des Kreises K_1 halbiert werden, und die Ebenen, welche durch diese Erzeugenden so gelegt werden, dass ihre ersten Spuren auf denselben normal

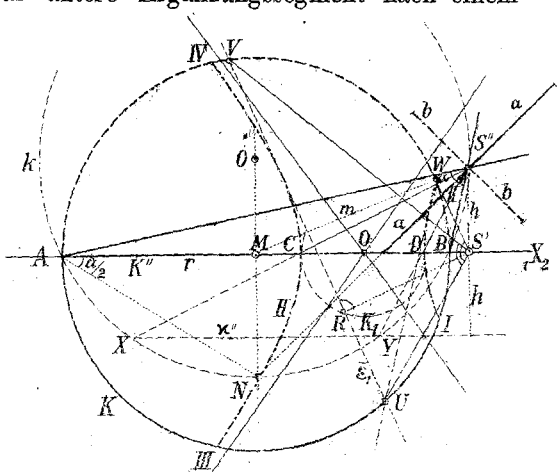


Fig. 2.

¹⁾ Vergl. G. Weyer, a. a. O., pag. 143, wonach α nicht unter 90° sein dürfte.

stehen, schneiden die Kugelsegmente nach Halbkreisen und den gegebenen Kegel SK nach zueinander normalen Erzeugenden. Die ersten Spuren dieser Ebenen hüllen jedoch in diesem Falle, da S' außerhalb des Kreises K_1 liegt, eine Hyperbel H ein; dieselbe ist die Schnittlinie von P_1 mit der Enveloppe jener Ebenen, einem elliptischen Kegel, dessen innere Achse mit der äußeren b des gegebenen Kegels zusammenfällt.

Es gelten somit in Betreff der Ebenen, welche ein Kugelsegment, das größer als eine Halbkugel ist, nach Halbkreisen und einen schiefen Kreiskegel mit dem Winkel $\alpha < 90^\circ$ nach zueinander normalen Erzeugenden, bezw. nach gleichseitigen Hyperbeln, schneiden, für den Fall, dass die Höhe h des Kegels kleiner ist als die Höhe MN des Ergänzungssegmentes, die den früheren Sätzen analogen, wobei jedoch die Achsen des Hilfskegels in die Richtungen der ungleichartigen des gegebenen fallen.

Nicht zu jeder Erzeugenden des Kegels SK gehören hier zwei zu derselben normale Erzeugenden wie in den beiden früheren Fällen, sondern nur zu denjenigen, deren Fußpunkte auf den zwischen den beiden Hyperbeln gelegenen Kreisbogen I III und II IV von K liegen, denn nur für solche Punkte ist es möglich, an die Hyperbel zwei Tangenten, somit durch die entsprechenden Kegelerzeugenden zwei Tangentialebenen an den Hilfskegel SH zu legen. Zu jeder der vier Erzeugenden $SI - SIV$ gehört nur eine normale Erzeugende, nämlich diejenige, deren Fußpunkt der zweite Schnittpunkt der Tangente des betreffenden Hyperbelpunktes mit dem Basiskreise K des gegebenen Kegels ist.

Die Bedingung dafür, dass der schiefe Kreiskegel mit dem Winkel $\alpha < 90^\circ$ durch unzählig viele Parallelscharen von Ebenen nach gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden könne, ist nach dem Obigen $h < MN$ oder mit Rücksicht auf $MN = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$h < r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ist $h = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, dann berührt die im Abstände $2h$ von S zu P_1 parallele Ebene die Kugel im Punkte N ; es gibt dann nur eine einzige Ebene, die durch die innere Achse a gehende zu P_{II} normale Hauptebene (ac), welche den Kegel nach zwei zueinander normalen Erzeugenden schneidet, somit auch nur eine einzige Parallelschar gleichseitiger Hyperbelschnitte.

Ist endlich $h > r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, dann kann der schiefe Kreiskegel nach gleichseitigen Hyperbeln nicht geschnitten werden.

Im letzteren Falle ist der Winkel, welchen die in der Hauptebene (ac) gelegenen Erzeugenden miteinander einschließen,

$\beta < 90^\circ$, während in dem unmittelbar vorhergehenden $\beta = 90^\circ$ und in allen früheren Fällen $\beta > 90^\circ$ ist.

Daraus ist zu erkennen, dass nicht der Winkel α derjenigen Erzeugenden, die in der Hauptebene (ab) liegen, auf der die Kreisschnittebenen normal stehen, für die Möglichkeit gleichseitig-hyperbolischer Schnitte eines Kegels zweiten Grades maßgebend ist, sondern der Winkel β , der von den Erzeugenden eingeschlossen wird, die in der Hauptebene (ac) liegen; und zwar gibt es keine, eine oder unendlich viele Parallelscharen derartiger Schnittebenen, je nachdem $\beta \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 90^\circ$ ist.

Es kann das oben in dem besonderen Falle $\alpha < 90^\circ$ für die Möglichkeit gleichseitig-hyperbolischer Schnitte aufgestellte Kriterium $h \leq r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ für jeden beliebigen Kreiskegel benützt werden; es ist allgemein gültig.

II. Der Rotationskegel.

Bezeichnen wir den Winkel der beiden in einem Achsenschnitte gelegenen Erzeugenden mit α , so ist ohneweiters klar, dass es für $\alpha < 90^\circ$ keine gleichseitigen Hyperbelschnitte gibt. Hingegen existieren deren unendlich viele für $\alpha = 90^\circ$ und $\alpha > 90^\circ$, und zwar sind die Parallelscharen der betreffenden Schnittebenen im ersten dieser zwei Fälle zur Rotationsachse parallel, im zweiten zu derselben geneigt.

Im letzten Falle ist die Stellung jener Parallelscharen wieder durch die Ebenen bestimmt, welche den Rotationskegel nach zueinander normalen Erzeugenden schneiden. Dieselben hüllen einen mit dem gegebenen coaxialen Rotationskegel ein, dessen Basisradius ρ aus der Höhe h und dem Basisradius r des gegebenen Kegels mittelst der Gleichung $2\rho^2 = r^2 - h^2$ ¹⁾ leicht konstruiert werden kann.

Am einfachsten wird jedoch jener Hilfskegel auf constructivem Wege erhalten, indem man in analoger Weise wie früher beim schiefen Kreiskegel die dem Rotationskegel umgeschriebene Kugel benützt.

III. Das zweischalige dreiachsige Hyperboloid.

Da ein Hyperboloid und sein Asymptotenkegel von einer Ebene nach ähnlichen oder conjugiert ähnlichen Kegelschnitten geschnitten werden, gibt jede Ebene, welche den Asymptotenkegel nach einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, einen ebensolchen

¹⁾ Diese einfache Beziehung zwischen ρ , r und h wird durch eine kleine Rechnung aus der entsprechenden Figur erhalten.

Der Winkel ω eines Achsenschnittes des Hilfskegels ist durch die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{r^2 - h^2}{2h^2}}$ bestimmt.

Schnitt mit dem Hyperboloid. Somit ist die Untersuchung über die Möglichkeit gleichseitig-hyperbolischer Schnitte eines Hyperboloides zurückgeführt auf die analoge Untersuchung des zugehörigen Asymptotenkegels; dies erfolgt mit Benützung der Kreisschnitte desselben in der beim Kegel besprochenen Weise.

Beachtet man den Zusammenhang zwischen den Winkeln der in den Hauptebenen gelegenen Erzeugenden des Asymptotenkegels (den Asymptoten der beiden hyperbolischen Hauptschnitte des Hyperboloides) und den Achsen desselben, so folgt mit Rücksicht auf das beim Kegel über den Einfluss der beiden Winkel α und β Gesagte, dass das zweischalige Hyperboloid nur dann nach gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden kann, wenn die reelle Achse nicht die größte der drei Achsen ist.

Bringen wir den Asymptotenkegel in dieselbe Lage wie den schiefen Kreiskegel in Fig. 1 und 2, und behalten wir dieselbe Bezeichnung bei, dann ist für $\alpha > 90^\circ$ die reelle Achse $2a$ des Hyperboloides die kleinste ($a < b < c$), für $\alpha < 90^\circ$ hingegen die imaginäre $2b$ ($b < a < c$); für $\alpha = 90^\circ$ sind die reelle Achse $2a$ und die imaginäre $2b$ einander gleich, jedoch beide kleiner als die imaginäre $2c$ ($a = b, b < c$).

Es fällt daher die Richtung der inneren Achse des elliptischen Hilfskegels, welcher von denjenigen Ebenen eingehüllt wird, die den Asymptotenkegel nach zueinander normalen Erzeugenden schneiden und somit die Stellung der Parallelscharen von Ebenen bestimmen, welche das Hyperboloid nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, mit jener der kleinsten Achse des Hyperboloides zusammen.

Im Falle $\alpha = 90^\circ$, wo es nicht eine, sondern zwei kleinste Achsen gibt, geht jener Hilfskegel in eine mit der Hauptebene (ab) zusammenfallende Ebene über, welche von denjenigen Durchmessern des Hyperboloides begrenzt wird, die den beiden Kreisschnittsystemen conjugiert sind; die Tangentialebenen jenes Hilfskegels bilden dann die zwei Ebenenbüschel, deren Achsen die genannten zwei Durchmesser sind.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich auch der Satz, dass alle Ebenen, welche durch einen Punkt gehen und das Hyperboloid nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden (die Möglichkeit solcher Schnitte vorausgesetzt), einen elliptischen Kegel (den Parallelkegel unseres Hilfskegels) einhüllen, dessen innere Achse mit der kleinsten des Hyperboloides parallel ist¹⁾.

¹⁾ Dieser Satz, der natürlich auch für den Kegel und, was sich aus dem Folgenden ergeben wird, für die übrigen hier in Frage kommenden Flächen zweiten Grades gilt, wurde von Schlömilch am Schlusse seiner eingangs erwähnten analytischen Abhandlung angeführt; jener Kegel, bezw. seine Bestimmungselemente, wurden jedoch dort nicht näher besprochen.

Es ergibt sich auch weiter, dass in dem besonderen Falle, wo $a = b$ ist, alle diese Ebenen zwei Büschel bilden, deren Achsen durch jenen Punkt gehen und zu den den Kreisschnittebenen conjugierten Durchmesser des Hyperboloides parallel sind.

IV. Das zweischalige Rotationshyperboloid.

Dasselbe kann nur dann nach gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden, wenn die Erzeugenden eines Achsenschnittes des Asymptotenkegels einen Winkel einschließen, der nicht kleiner als 90° ist. Dies tritt dann ein, wenn die reelle (Rotations-) Achse des Hyperboloides nicht größer ist als die imaginären Achsen.

Für $a = b = c$, ($\alpha = 90^\circ$), ist das Hyperboloid gleichseitig; jede zur Rotationsachse parallele Ebene schneidet es nach einer gleichseitigen Hyperbel.

Ist $a < b$, $b = c$, ($\alpha > 90^\circ$), dann gibt es unendlich viele gegen die Rotationsachse geneigte Durchmesser-Ebenen und deren Parallelebenen, welche gleichseitige Hyperbelschnitte liefern. Der Radius ρ des Parallelkreises des von jenen Durchmesser-Ebenen eingehüllten Rotationskegels ist im Abstände a vom Scheitel durch die Gleichung $2\rho^2 = b^2 - a^2$ bestimmt.¹⁾

V. Das einschalige dreiachsige Hyperboloid.

Es ist wohl sofort klar, dass hier gleichseitige Hyperbelschnitte nur dann möglich sind, wenn die imaginäre Achse nicht die längste der drei Achsen ist.

Mit Rücksicht auf die Beantwortung einer Frage, die weiter unten über das einschalige Hyperboloid, dasselbe als Regelfläche betrachtet, gestellt wird, sollen die einzelnen durch die verschiedenen Größenverhältnisse der drei Achsen bedingten Fälle kurz besprochen werden, wobei wir die aus der Betrachtung des schiefen Kreiskegels gewonnenen Resultate benutzen.

Ist $2a$ die imaginäre Achse, so liegen die beiden hyperbolischen Hauptschnitte der Fläche in den Hauptebenen (ab) und (ac); die Winkel der in den letzteren gelegenen Erzeugenden des Asymptotenkegels (oder die äußeren Winkel der Asymptoten jener zwei Hauptschnitte) seien α , bezw. β .

¹⁾ Der Winkel ω des Achsenschnittes dieses Rotationskegels oder der Neigungswinkel $\frac{\omega}{2}$ jener Durchmesser-Ebenen mit der Rotationsachse ergibt sich wie oben beim Kegel aus $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2a^2}}$.

1. $a > b > c$; ($\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$). Die imaginäre Achse ist die längste. Es sind keine gleichseitigen Hyperbelschnitte möglich.

2. $a = c$, $a > b^1$. ($\alpha < 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$). Nur der Hauptschnitt (ac) und die zu demselben parallelen Schnitte sind gleichseitige Hyperbeln.

3. $a = b$, $a < c$; ($\alpha = 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$). In diesem Falle schneiden die Hauptebene (ab) und unendlich viele andere Durchmessererebenen sammt ihren Parallelebenen das Hyperboloid nach gleichseitigen Hyperbeln. Jene Durchmessererebenen erfüllen zwei Ebenenbüschel, deren Achsen die zwei den Kreisschnittebenen des Hyperboloides conjugierten Durchmesser d_1 und d_2 sind (Fig. 3).

4. $a < b < c$; ($\alpha > 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$). Die imaginäre Achse ist die kleinste. Alle unendlich vielen Durchmessererebenen mit gleichseitigen Hyperbelschnitten hüllen einen elliptischen Kegel ein, dessen innere Achse mit der imaginären Achse des Hyperboloides zusammenfällt.

5. $b < a < c$; ($\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$). Die kleinste Achse ist die reelle $2b$. Alle unendlich vielen Durchmessererebenen mit gleichseitigen Hyperbelschnitten hüllen in diesem Falle einen elliptischen Kegel ein, dessen innere Achse mit der kleineren ($2b$) der beiden reellen Achsen des Hyperboloides zusammenfällt.

Die Eigenschaft, dass das einschalige Hyperboloid eine Regelfläche ist, durch deren Punkte je zwei Erzeugende hindurchgehen, führt uns unwillkürlich zu der Frage nach dem Orte derjenigen Punkte des Hyperboloides, in denen die beiden Erzeugenden zueinander normal sind.

In jeder Parallelschar von Ebenen, welche das einschalige oder windschiefe Hyperboloid nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, befinden sich auch zwei Berührungsebenen desselben; die durch ihre Berührungspunkte hindurchgehenden Erzeugendenpaare sind degenerierte gleichseitige Hyperbeln, sie stehen auf einander normal. Es sind dies diejenigen Erzeugenden des Hyperboloides, welche zu den Erzeugenden des Asymptotenkegels parallel sind, die in der jener Parallelschar entsprechenden Durchmessererebene liegen.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich der folgende Satz:

Alle Berührungsebenen eines windschiefen Hyperboloides, welche zu denjenigen Durchmessererebenen desselben und seines Asymptotenkegels parallel sind, die den letzteren nach zueinander normalen Erzeugenden schneiden, hüllen eine developpable Fläche vierter Classe

¹⁾ Der Fall, wo die beiden reellen Halbachsen b und c miteinander vertauscht erscheinen, soll weder hier, noch in den übrigen Fällen eigens erwähnt werden, denn er ergibt nichts Neues; es erscheint nur das Hyperboloid um die imaginäre Achse um 90° gedreht.

ein, welche dem Hyperboloide umgeschrieben ist und den von jenen Durchmessererebenen eingehüllten elliptischen Kegel zum Richtkegel hat. Diese Developpable D berührt das Hyperboloid nach einer Curve vierter Ordnung C_4 , welche der Ort derjenigen Punkte des Hyperboloides ist, in denen die Erzeugenden zueinander normal sind.

Da das Hyperboloid und der Richtkegel alle drei Hauptebenen gemeinsam haben, sind dieselben für die C_4 Ebenen orthogonaler Symmetrie; daher sind die Projectionen der C_4 auf alle drei Hauptebenen Kegelschnitte, deren Achsen mit denen der entsprechenden Hauptschnitte der Lage nach zusammenfallen.

Infolge der dreifachen orthogonalen Symmetrie ist die C_4 für den Mittelpunkt M des Hyperboloides als Centrum auch centrisch symmetrisch.

Die constructive Ermittlung der C_4 erfolgt am besten in der Weise, dass man sie nicht als Berührungcurve des Hyperboloides mit der Developpabeln, sondern als Durchdringungcurve desselben mit einem der drei ihr doppelt umschriebenen Cylinder (welche die C_4 auf die Hauptebene als Kegelschnitte projicieren) oder mit dem ihr aus M , dem im Endlichen gelegenen Eckpunkte des gemeinsamen Poltetraeders, doppelt umschriebenen Kegel (welcher die oben hervorgehobene centrische Symmetrie der C_4 bestimmt) construirt. Die in den Hauptebenen gelegenen Erzeugenden des letzteren werden als die Verbindungsgeraden des Mittelpunktes M mit denjenigen Punkten der C_4 , die in den Hauptschnitten des Hyperboloides liegen, leicht erhalten; diese Punkte sind aber die Berührungspunkte der Hauptschnitte mit denjenigen Tangenten, welche zu den in den gleichnamigen Hauptebenen gelegenen Erzeugenden des von den wiederholt erwähnten Durchmessererebenen des Asymptotenkegels eingehüllten Hilfskegels parallel sind.

In den einzelnen, oben besprochenen fünf Fällen des einschaligen Hyperboloides ist über den Ort der Punkte mit zueinander normalen Erzeugenden Folgendes zu bemerken:

1. Das Hyperboloid enthält keine solchen Punkte.
2. Es gibt nur zwei solche Punkte, nämlich die Endpunkte B_1 und B_2 der zum gleichseitig-hyperbolischen Hauptschnitte (ac) normalen Achse $2b$.

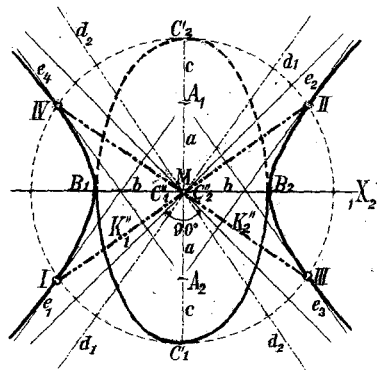


Fig. 3.

In den übrigen drei Fällen gibt es jederzeit unendlich viele Punkte mit zueinander normalen Erzeugenden.

3. Die Developpable D zerfällt in zwei Cylinderflächen zweiten Grades, deren Achsen d_1 und d_2 (Fig. 3) die den Kreis-schnittebenen des Hyperboloides conjugierten Durchmesser desselben sind. Die Berührungcurve C_4 besteht aus den beiden Durchmesser-Kreisschnitten K_1 und K_2 des Hyperboloides.

4. Die Developpable D berührt das Hyperboloid in keinem Punkte der Kehlellipse. Deshalb schneidet die C_4 die Kehl-ellipse nicht, sondern sie besteht aus zwei durch die Ebene der letzteren voneinander getrennten, geschlossenen Zweigen. Die Projection derselben auf die Hauptebene (ab) ist eine Hyperbel, deren reelle Achse mit der imaginären des Hyperboloides zusammenfällt, jene auf die Hauptebene (ac) ist eine Ellipse mit parasitischen Theilen innerhalb jedes der beiden Äste dieses hyperbolischen Hauptschnittes, und jene auf die Hauptebene (bc) ist eine Ellipse, welche die Kehlellipse einschließt.

5. Die Developpable D berührt das Hyperboloid in vier Punkten der Kehlellipse. Deshalb schneidet die C_4 die Kehlellipse in vier Punkten; sie besteht aus zwei geschlossenen, durch die Hauptebene (ac) voneinander getrennten Zweigen. Die Projection derselben auf die Hauptebene (ab) ist eine Hyperbel, deren imaginäre Achse mit der imaginären des Hyperboloides zusammenfällt; jene auf die Hauptebene (ac) ist eine Ellipse zwischen den beiden Ästen des betreffenden hyperbolischen Hauptschnittes, und jene auf die Hauptebene (bc) eine Ellipse mit parasitischen Theilen innerhalb der Kehlellipse.

In Fig. 4 sind die diesen Fall betreffenden Constructionen für ein Hyperboloid durchgeführt, dessen Hauptebene (ab) mit der zweiten Projectionsebene zusammenfällt, und dessen imaginäre Achse A_1, A_2 zur ersten Projectionsebene normal ist.

Mittelst eines Kreisschnittes K des Asymptotenkegels wurde in der früher besprochenen Weise jener elliptische Hilfskegel erhalten, dessen Berührungsebenen das Hyperboloid nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, und der gleichzeitig der Richtkegel der Developpabeln D ist. Seine innere Achse fällt in die Richtung der reellen B_1, B_2 des Hyperboloides; die in der Hauptebene (ab) liegenden Erzeugenden sind d_1 und d_2 , und die Spurcurve in der ersten Projectionsebene ist die Hyperbel H . Die im Hauptschnitte (ab) des Hyperboloides gelegenen Punkte I, II, III, IV der C_4 sind die Berührungspunkte der zu d_1 und d_2 paarweise parallelen Erzeugenden e_1, e_2, e_3, e_4 der Developpabeln mit dieser Hyperbel, und die im Hauptschnitte (bc), der Kehlellipse, gelegenen Punkte V, VI, VII, VIII jene der horizontalen Erzeugenden e_5, e_6, e_7, e_8 der Developpabeln mit der Kehlellipse. Die entsprechenden

horizontalen Erzeugenden $\varepsilon_5, \varepsilon_6$ des Richtkegels werden am einfachsten mittelst der beiden horizontalprojicierenden Durchmessersebenen (Berührungsebenen des Richtkegels) erhalten, welche den Asymptotenkegel nach rechten Winkeln schneiden; die Hori-

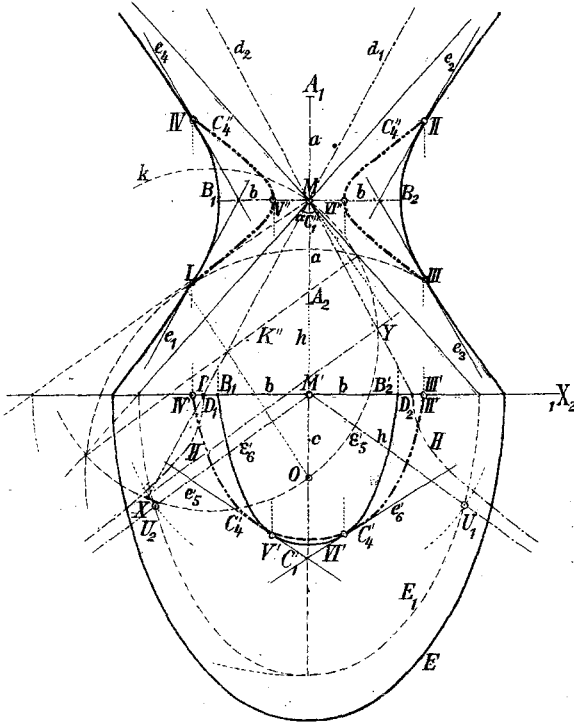


Fig. 4.

zontalspuren dieser zwei Ebenen sind offenbar die Verbindungsgeraden von M' mit den Punkten U_1 und U_2 , in denen die Horizontalspur E_1 des Asymptotenkegels von dem Kreise mit dem Radius h ($M'M$) und dem Mittelpunkte M' geschnitten wird.

VI. Das einschalige Rotationshyperboloid.

Für dasselbe liegen die Verhältnisse so wie beim zweischaligen Rotationshyperboloid, es darf nämlich der Winkel des Achsenschnittes des Asymptotenkegels nicht unter 90° sein. Das ist dann der Fall, wenn die imaginäre (Rotations-)Achse $2a$ nicht größer ist als die reellen Achsen.

In Betreff des Ortes der Punkte mit zueinander normalen Erzeugenden ist hier Folgendes zu beachten:

Ist $a = b = c$, ($\alpha = 90^\circ$), das einschalige Rotationshyperboloid also gleichseitig, dann ist die demselben umgeschriebene Developpable D ein mit ihm coachsialer Rotationscylinder, und die Berührungscurve mit dem Hyperboloid der Kehlkreis desselben.

Ist $a < b$, ($\alpha > 90^\circ$), dann zerfällt die Developpable D in zwei mit dem Hyperboloid coachsiale Rotationskegel, welche mit dem von den Durchmesserbenen, die das Hyperboloid nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, eingehüllten Hilfskegel congruent sind. Die Berührungscurve C_4 zerfällt in zwei zu beiden Seiten des Kehlkreises in gleichen Abständen gelegene Parallelkreise; die constructive Ermittlung derselben bedarf keiner weiteren Erörterung, sie ergibt sich aus dem Früheren.

VII. Das hyperbolische Paraboloid.

Jede zur Achse des hyperbolischen Paraboloides nichtparallele Ebene schneidet dasselbe nach einer Hyperbel, für welche bekanntlich die Schnittlinien jener Ebene mit den beiden Richtebenen des Paraboloides die Asymptotenrichtungen sind. Im Falle des gleichseitigen Hyperbelschnittes müssen diese zwei Schnittlinien zu einander normal sein.¹⁾

Es handelt sich somit zunächst um die Ermittlung solcher Ebenen, deren Schnittlinien mit zwei sich schneidenden Ebenen zueinander normal sind.

Ist die eine, g , der beiden Geraden in der Ebene λ gegeben, so schneidet die im Schnittpunkte derselben mit der zweiten Ebene μ auf g normale Ebene die μ nach der zu g normalen Geraden g_1 . Und so kann in jedem einzelnen Falle, wenn λ und μ die beiden Richtebenen des hyperbolischen Paraboloides sind, zu einer gegebenen Asymptotenrichtung eines gleichseitigen Hyperbelschnittes die dazugehörige zweite und damit die Stellung der schneidenden Ebene und ihrer Parallelschar gefunden werden.

Wir wollen aber nicht einzelne, sondern wie bei den früher behandelten Flächen die Gesammtheit derartiger Ebenen, welche durch einen Punkt gelegt werden, betrachten.

Es seien λ und μ (Fig. 5) die beiden durch den Scheitel A des hyperbolischen Paraboloides gelegten verticalprojicirenden Richtebenen, die außerdem gegen die erste Projectionsebene P_1 gleiche Neigung besitzen; ferner sei der größere der beiden Neigungswinkel der Richtebenen ($\alpha > 90^\circ$) gegen P_1 gekehrt. Wir

¹⁾ Siehe Peschka, Darst. und proj. Geom., III. Bd., pag. 172 u. 173. Dasselbst wird die Aufgabe gelöst, „durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu führen, welche ein hyperbolisches Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet“.

nehmen in der Schnittlinie von λ und μ (der Achse des Paraboloides) irgend einen Punkt, z. B. den Scheitel A , an und legen durch denselben alle Ebenen, welche λ und μ nach zueinander normalen Geraden schneiden. Zu jeder Geraden g in λ gehört nur eine auf ihr normale g_1 in μ ; es bilden somit die Spurpunkte solcher Geradenpaare in F_1 zwei projectivische Punktreihen, deren Träger die Horizontalspuren $\bar{\lambda}_1$ und $\bar{\mu}_1$ der Richtebenen sind. Die

Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ($PP_1, QQ_1, TT_1^\infty, U^\infty U_1, \dots$) sind die Horizontalspuren der gesuchten Ebenen; sie hüllen die Ellipse E ein, deren große Achse offenbar TU_1 und deren Mittelpunkt A' ist. Die kleine Achse $B_1 B_2$ wird am einfachsten mittelst der gegen λ und μ gleichgeneigten Ebenen erhalten, deren Horizontalspuren PP_1 und QQ_1 zu TU_1 parallel sind. Die in denselben gelegenen Dreiecke APP_1 und AQQ_1 sind gleichschenkelig-rechtwinklig, daher $AB_1 = (A)B_1 = PB_1 = TA' = a$.

Es gilt somit der folgende Satz:

Alle Ebenen, welche durch irgend einen Punkt der Schnittlinie zweier sich unter schieferm Winkel schneidenden Ebenen so gelegt werden, dass sie dieselben nach zueinander normalen Geraden schneiden, hüllen einen elliptischen Kegel ein, welcher die gegebenen Ebenen zu Tangentialebenen besitzt, und dessen innere Achse im größeren (stumpfen) Winkelraum derselben liegt und auf ihrer Schnittlinie normal steht.

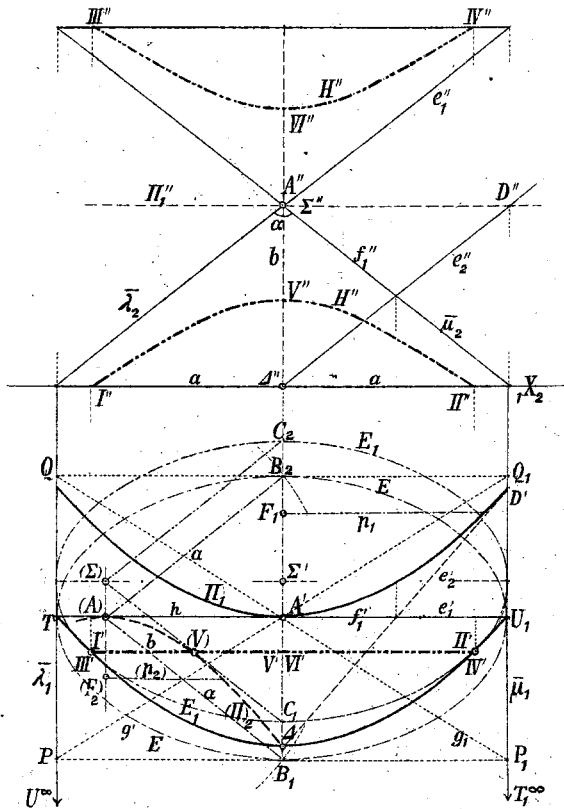


Fig. 5.

Dieser Satz¹⁾ kann ohne weiteres auf diejenigen Ebenen bezogen werden, welche ein hyperbolisches Paraboloid nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, wenn jene zwei Ebenen als die durch die Achse des Paraboloides gelegten Richtebenen desselben angenommen werden.

Hiebei ist jedoch zu beachten, dass unter allen Tangentialebenen des Kegels die beiden Richtebenen Grenzlagen einnehmen, in denen die Schnittcurve aus einer Scheitelerzeugenden und der unendlich fernen Geraden der betreffenden Richtebene besteht.

Stehen die beiden Ebenen λ und μ aufeinander normal, so gehört zu jeder durch einen Punkt A der Schnittlinie gehenden und zu derselben schiefen Geraden in der einen Ebene dieselbe normale in der anderen Ebene, nämlich die Normale in A zur Schnittlinie.

Es erfüllen somit alle Ebenen, welche durch einen Punkt der Schnittlinie zweier sich unter rechtem Winkel schneidenden Ebenen gehen und dieselben nach zueinander normalen Geraden schneiden, zwei Ebenenbüschel, deren Achsen die in den beiden Ebenen liegenden Normalen der Schnittlinie in jenem Punkte sind.

Stellen die Ebenen λ und μ die Richtebenen eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides vor, so ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass die in den Richtebenen liegenden Normalen ihrer Schnittlinie zu den Scheitelerzeugenden parallel sind, aus dem Vorangehenden folgender Satz:

Alle Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen und ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, erfüllen zwei Ebenenbüschel, deren Achsen zu den Scheitelerzeugenden der Fläche parallel sind.

Hiebei stellen wieder die zu den Richtebenen parallelen Ebenen der beiden Büschel Grenzlagen dar, in denen die Schnittcurve aus einer Erzeugenden und der unendlich fernen Geraden der betreffenden Ebene oder der entsprechenden Richtebene besteht.

Aus dem Vorangehenden erhellt auch sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

¹⁾ Beachtet man, dass der im stumpfen Winkel der beiden Richtebenen λ und μ (Fig. 5) liegende Hauptschnitt Π_2 des hyperbolischen Paraboloides jener mit dem kleineren Parameter p_2 ist, so ergibt sich daraus der früher erwähnte Schlämilch'sche Satz, nach welchem „alle Ebenen, die durch einen festen Punkt gehen und ein hyperbolisches Paraboloid nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, einen elliptischen Kegel einhüllen, dessen Achse zum kleineren Parameter der Fläche parallel ist“.

Nach dem Obigen sind die Bestimmungselemente dieses Kegels leicht zu ermitteln.

Aus der Figur ist ersichtlich, dass der Punkt (A) ein Brennpunkt der Basisellipse E des Kegels SE ist; die Excentricität der Ellipse E ist somit gleich der Höhe h des Kegels.

Jede zu einer Scheitelerzeugenden des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides parallele und zur Achse geneigte Ebene schneidet dasselbe nach einer gleichseitigen Hyperbel.

Ist die betreffende Ebene zu beiden Scheitelerzeugenden parallel, so liefert sie einen Normalschnitt zur Achse.

In Betreff des Ortes der Punkte mit zueinander normalen Erzeugenden sind die Verhältnisse beim hyperbolischen Paraboloid viel einfacher als beim windschiefen Hyperboloid. Da der Richtkegel der dem Paraboloid umgeschriebenen Developpabeln D zwei Tangentialebenen besitzt, welche zu den Richtebenen des Paraboloides parallel sind, degeneriert die Developpable D in einen Kegel zweiten Grades ΣE_1 (Fig. 5), welcher mit dem Richtkegel congruent ist. Der Scheitel Σ dieses Kegels liegt auf der Achse des Paraboloides und zwar innerhalb des Hauptschnittes Π_1 , mit dem größeren Parameter; er wird am einfachsten erhalten, indem man an das Paraboloid, bzw. an den Hauptschnitt Π_2 , die Tangentialebene parallel zur Ebene APP_1 (AE als Richtkegel vorausgesetzt) legt. (Σ) $C_1 \parallel (A) B_1$.

Die Berührungscurve des Kegels ΣE_1 mit dem hyperbolischen Paraboloid, d. h. der Ort der Punkte mit zueinander normalen Erzeugenden, ist die Hyperbel H , deren Ebene auf der Achse des Paraboloides normal steht, deren Asymptoten somit zu den Scheitelerzeugenden parallel sind; die reelle Achse derselben ist parallel zur inneren Achse des Richtkegels oder zum kleineren Parameter des Paraboloides.

Ist das hyperbolische Paraboloid gleichseitig, dann degeneriert die Developpable D in die Tangentialebene im Scheitel, und der Ort der Punkte mit zueinander normalen Erzeugenden in die beiden Scheitelerzeugenden; es wird somit jede der beiden Scheitelerzeugenden von allen Erzeugenden der anderen Schar rechtwinklig geschnitten, eine Eigenschaft des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides, die bekanntlich unmittelbar aus seiner Entstehung folgt.

VIII. Der hyperbolische Cylinder.

Jede Ebene, die nicht zur Achse des Cylinders parallel ist, schneidet den hyperbolischen Cylinder nach einer Hyperbel, deren Asymptoten die Schnittlinien der Ebene mit den beiden Asymptoten-

Der bei jeder der besprochenen Flächen zweiten Grades erwähnte Hilfskegel kann bei der Lösung der Aufgabe, durch eine gegebene Gerade Ebenen zu legen, welche eine gegebene Fläche zweiten Grades nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden (die Möglichkeit solcher Schnitte vorausgesetzt), mit Vortheil benützt werden, indem man irgend einen Punkt dieser Geraden als Scheitel des Kegels wählt. Nach der Anzahl der Tangentialebenen, welche durch die Gerade an den Kegel gelegt werden können, (je nachdem die Gerade außerhalb, auf oder innerhalb der Kegelfläche liegt) hat die genannte Aufgabe zwei, eine oder keine Lösungen.

ebenen des Cylinders sind; diese Schnittlinien müssen in dem vorliegenden Falle zueinander normal sein.

Es ist leicht einzusehen, dass in Bezug auf die Ebenen, welche einen allgemeinen oder einen gleichseitigen hyperbolischen Cylinder nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, die oben für das hyperbolische Paraboloid entwickelten Sätze mit geringen Abänderungen ebenfalls Giltigkeit haben, wenn die Asymptotenebenen des Cylinders an die Stelle der durch die Achse des Paraboloides gelegten Richtebenen λ und μ treten.
