Die Natur des Reduzibilitätsaxioms.

Von **Friedrich Waismann** in Wien.

In dem Aufbau der Mathematik, wie er in dem grundlegenden Werk der logischen Schule, in den „Principia Mathematica“ [1]), durchgeführt ist, spielt das sog. Reduzibilitätsaxiom eine hervorragende Rolle. Dies Axiom besagt [2]): *für jede beliebige Aussagefunktion $\varphi \hat{x}$ gibt es stets eine prädikative Aussagefunktion $\psi ! \hat{x}$, die mit $\varphi \hat{x}$ formal äquivalent ist.* Das Reduzibilitätsaxiom soll also den Übergang von beliebigen Funktionen zu prädikativen ermöglichen und dadurch die Schwierigkeiten beseitigen, welche die Aufstellung der sog. verzweigten Hierarchie [3]) mit sich bringt. Im Rahmen der „Principia Mathematica“ ist ein solches Axiom unentbehrlich. Ohne dasselbe oder ein ihm gleichkommendes würde die dort entwickelte Theorie der reellen Zahlen, die wesentliche Grundlage der Analysis, zusammenbrechen. Andererseits hatten schon *Russell* und *Whitehead* bei Aufstellung dieses Axioms instinktiv gefühlt, daß dasselbe einen anderen Charakter besitzt als die übrigen Grundsätze der Logik und daß ihm nicht derselbe Grad der Gewißheit zugeschrieben werden darf; da aber die eigentliche Natur des Axioms im Dunkeln blieb, haben sich die Verfasser damit begnügt, ihr Werk so anzuordnen, daß an jedem Punkt zu erkennen ist, welche Sätze vom Reduzibilitätsaxiom abhängen und welche nicht.

Die Sätze der Logik besitzen eine Eigenschaft, die sie charakteristisch von allen übrigen Sätzen unterscheidet: sie sind Tautologien. Eine Tautologie ist ein Satz, der auf Grund seiner bloßen Struktur wahr ist. Genauer gesprochen: eine Tautologie ist eine

---

[1]) *Whitehead* und *Russell*, Principia Mathematica, Cambridge. I, 1. Aufl., 1910, 2. Aufl., 1925, II, 1912, III, 1913.

[2]) l. c. [1]) I, 1. Aufl., S. 59 und S. 174.

[3]) l. c. [1]) I, 1. Aufl., S. 51. Vergl. auch *Ramsey*, Proc. London Mathem. Soc. II, 23, 1925, S. 356, 358 f.

Wahrheitsfunktion, die bei allen Wertverteilungen ihrer Argumente wahr bleibt[4]). Ein Satz der Logik teilt daher keine Sachlage mit. Zur Mitteilung von Sachlagen sind nur Sätze brauchbar, die die Fähigkeit haben, auch falsch zu sein (wenn die im Satz behauptete Sachlage nicht besteht). Das ist auch der Grund, warum die Sätze der Logik der Prüfung durch die Erfahrung entzogen sind. Einen Satz durch die Erfahrung prüfen, bedeutet ja, ihn mit der Wirklichkeit (mit einer wirklichen Sachlage) vergleichen. Eine Tautologie hingegen drückt weder das Bestehen noch das Nichtbestehen einer Sachlage aus; sie kann daher durch die Erfahrung weder bestätigt noch widerlegt werden. Eine Tautologie muß, um mit Leibniz zu sprechen, in jeder Welt wahr sein, nicht bloß in unserer. Ist ein Satz nur in unserer Welt wahr, so ist das ein sicheres Anzeichen dafür, daß er keine Tautologie ist und nicht in die Logik gehört.

Dem von Russell und Whitehead gefühlten Bedenken läßt sich jetzt präzise Ausdruck verleihen in dem Satz: Das Reduzibilitätsaxiom stellt — im Gegensatz zu den logischen Grundsätzen — keine Tautologie dar und seine Einführung in die Logik ist nicht zu entschuldigen. Der Nachweis dieser Tatsache soll der Zweck der folgenden Mitteilung sein.

Wenn das Reduzibilitätsaxiom eine Tautologie ist, so muß es in jeder Welt gelten, nicht bloß in der unsrigen. Wenn wir also eine Welt konstruieren können, in der das Reduzibilitätsaxiom nicht gilt, so wird damit gezeigt sein, daß es gewiß keine Tautologie ist. Wir denken uns eine Welt von folgenden Eigenschaften[5]):

1. Es gibt in ihr unendlich viele Individuen.
2. Jedes Individuum hat unendlich viele prädikative Eigenschaften.
3. Es soll keine zwei Individuen geben, die alle prädikativen Eigenschaften gemeinsam haben.
4. Kommt eine prädikative Eigenschaft einem Individuum zu, so soll sie stets auch einem zweiten zukommen. M. a. W.: es gibt keine prädikative Eigenschaft, die ausschließlich einem Individuum zukäme.

---

[4]) Vgl. Ludwig Wittgenstein, Logisch-philosophische Abhandlung, 4·46.
[5]) Vgl. auch Ramsey l. c. S. 381.

Bedeutet nun „a" den Namen eines Individuums, so ist die Klasse k von Individuen, die alle prädikativen Eigenschaften mit a gemeinsam haben, definiert durch

$$(\varphi) . \varphi ! \hat{x} . \equiv . \varphi ! a .$$

Die so konstruierte Aussagefunktion ist gewiß nicht prädikativ (denn sie appelliert an eine Gesamtheit von prädikativen Eigenschaften); bezeichnen wir sie mit $\varphi_1 \hat{x}$. Nach dem Reduzibilitätsaxiom müßte es dann eine prädikative Aussagefunktion $\psi ! \hat{x}$ geben, die mit $\varphi_1 \hat{x}$ formal äquivalent ist:

$$\vdash : (\exists \psi) : \varphi_1 x . \equiv_x . \psi ! x .$$

Eine solche prädikative Aussagefunktion kann es aber nicht geben. Denn nach Annahme 3) stimmt kein Individuum in allen prädikativen Eigenschaften mit a überein; die Klasse k enthält also nur das einzige Individuum a. Auf der anderen Seite kommt jede prädikative Eigenschaft, wenn sie a zukommt, nach Forderung 4) auch einem zweiten Individuum zu. Folglich gibt es unter den prädikativen Funktionen keine, die mit $\varphi_1 \hat{x}$ umfangsgleich wäre — das Reduzibilitätsaxiom hat versagt.

Es bleibt jetzt noch das Bedenken zu prüfen, ob die soeben konstruierte Welt nicht etwa widerspruchsvoll ist, d. h. ob unsere vier Forderungen verträglich sind. Zu diesem Zweck wollen wir eine Abbildung der Dinge unserer Welt auf einen andern Bereich vornehmen, dessen Widerspruchsfreiheit bereits feststeht; dann werden auch unsere vier Forderungen zu keinem Widerspruch führen können[6]). Der Bereich R, auf den wir die Dinge unserer Welt abbilden, sollen die rationalen Zahlen sein. Jedem Individuum soll eine rationale Zahl entsprechen. Den prädikativen Eigenschaften der Individuen lassen wir Klassen rationaler Zahlen entsprechen nach folgender Vorschrift: der rationalen Zahl r sollen alle offenen, r enthaltenden und von rationalen Zahlen begrenzten Intervalle entsprechen, soweit sie in den Bereich R fallen, d. h. die Durchschnitte dieser Intervalle mit R. Dann sind die Forderungen 1—4 erfüllt. Forderung 1 besagt: es gibt unendlich viele rationale Zahlen; Forderung 2: jede rationale Zahl r liegt in unendlich vielen Inter-

[6]) Die Anregung zum folgenden Beweis verdanke ich Herrn R. Carnap.

vallen; Forderung 3: es gibt keine zwei rationale Zahlen, die zugleich in allen Intervallen liegen; Forderung 4: jedes offene Intervall enthält mehr als eine rationale Zahl. Damit ist die Widerspruchslosigkeit unserer Forderungen dargetan.

Zum Schlusse sei noch hervorgehoben, daß wir uns absichtlich auf rationale Zahlen und auf konstruierbare Klassen beschränkt haben, um die im Begriff des reellen Kontinuums resp. im Begriff der beliebigen Teilklasse liegenden Schwierigkeiten zu vermeiden — Schwierigkeiten, die ja zum Teil gerade in dem Charakter des Reduzibilitätsaxioms begründet sind.