Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven.
(Ein Beitrag zur Theorie der „gefährlichen Örter".)

Von **Josef Krames** in Wien [1]).

Übersicht:

Die Rekonstruktion eines Objektes aus zwei gegebenen Perspektiven war schon wiederholt Gegenstand eingehender geometrischer Untersuchungen. So hat vor allem S. Finsterwalder[2]) gezeigt, daß die Rekonstruktion des Originals — abgesehen vom Maßstab — bestimmt ist, wenn die inneren Orientierungen der Perspektiven gegeben sind. Weiters hat E. Kruppa[3]) nachgewiesen, daß aus zwei Perspektiven mit bekannter innerer Orientierung, in denen die Bildpaare von *fünf Punkten* beliebig gewählt wurden, die gegenseitige räumliche Lage der Bildebenen und Zentren bestimmbar ist, wobei — abgesehen von

---

[1]) Diese Arbeit war in der vorliegenden Fassung bereits anfangs Dezember 1937 fertiggestellt, als der Verf. noch an der Technischen Hochschule in Graz tätig war; die Veröffentlichung verzögerte sich jedoch aus äußerlichen Gründen. Ein kurzer Bericht über die Hauptergebnisse wurde indessen bereits am 12. Jänner 1938 zwecks Wahrung der Priorität bei der Akademie der Wissenschaften in Wien hinterlegt. Vgl. J. Krames, *„Neue Nebenlösungen einer alten Aufgabe"*, Anzeiger der Akad. Wiss. Wien, math.-nat. 77 (1940) S. 26—30, wo auch bereits das Erscheinen der vorliegenden Abhandlung (allerdings in einer anderen Zeitschrift) angekündigt wurde. Der Arbeit wurden später bloß hinzugefügt: Ein Zitat (W. Ludwig) in Fußnote 20, ferner die Fußnoten 26, 27, in denen auf einige seither erschienene Arbeiten anderer Verfasser näher eingegangen wird.

[2]) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jhrsber. Dtsch. Math. Ver. 6 (1899), S. 1—44; s. insbesondere S. 10 und 15.

[3]) Sitzgsber. Akad. Wien, math.-nat., II*a*, 122 (1913), S. 1939—1948.

ähnlichen Umformungen — im allg. 22 (teils imaginäre) Lösungen möglich sind. Hierzu sagt Kruppa[4]) selbst: „Bezüglich der Mehrdeutigkeit der Orientierungsprobleme ist noch folgendes zu bemerken. Gründet man ein Orientierungsproblem auf tatsächliche Perspektiven — nicht willkürliche Annahmen — eines räumlich ausgedehnten Objektes, die mehr Elemente erkennen lassen, als zur Bestimmtheit des Problems erforderlich ist, so entsteht die neue Aufgabe, diejenigen Lösungen zu finden, durch die sich auch die übrigen Bildelemente in Einklang bringen lassen; i. a. gibt es dann nur eine Orientierungsmöglichkeit". Diese auch von Finsterwalder[2]) und anderen vertretene Ansicht ist bisher — wie es scheint — als ausnahmslos richtig angesehen worden[5]). H. Koppmair (z. Z. in Brünn) hat mir nun Ende Oktober 1937 (in Graz) die Frage vorgelegt, ob es nicht möglich sei, daß sämtliche von den einzelnen Punkten des aufgenommenen Objektes herrührenden Sehstrahlenpaare auch dann noch räumliche Schnittpunkte ergeben, wenn die (starr gedachten) Sehstrahlbündel aus der ursprünglichen Lage gegeneinander bewegt worden sind, so zwar, daß die von diesen Schnittpunkten gebildete Raumfigur zum gegebenen Objekt nicht ähnlich ist. Es war ihm nämlich aufgefallen, daß bei der Auswertung von Flugzeugaufnahmen gelegentlich Fehler aufgetreten sind, die sich mit den normalen Ungenauigkeiten der Instrumente nicht erklären ließen.

Es gelang mir binnen kurzem (im November 1937) diese Frage restlos zu klären. Es zeigte sich vor allem, daß tatsächlich für ein Objekt (Gelände), das im betrachteten Bereich die Form (eines Teiles) einer *orthogonalen Regelfläche zweiten Grades* von bestimmter Lage besitzt, aus den beiden Perspektiven samt bekannter innerer Orientierung allein keine eindeutige Rekonstruktion des Originals gewonnen werden kann. Es lassen sich vielmehr neben der richtigen gegenseitigen Orientierung der Perspektiven noch ein- oder zweimal zwei andere gegenseitige Lagen der Sehstrahlbündel finden, in denen die Sehstrahlenpaare aller aufgenommenen Geländepunkte sich ebenfalls schneiden, wobei aber die von den Schnittpunkten dieser Paare erfüllten Raumfiguren mit dem Original nicht ähnlich, ja nicht einmal kollinear sind. Jede solche Raumfigur liegt gleichfalls auf einer *orthogonalen Fläche zweiten Grades von gleicher Lage.* Diese besondere

---

[4]) A. a. O., S. 1948.

[5]) S. etwa auch O. v. Gruber, Ferienkurs der Photogrammetrie, Stuttgart 1930, S. 24. — Das in der oben zitierten Textstelle vorhandene „i. a." bezog sich wohl nur auf den Ausnahmsfall eines ebenen Objektes. Vgl. später unter Nr. 2.

Lage ist dadurch gekennzeichnet, daß zwei *adjungierte Erzeugenden* der Fläche (*aus denen die andere Schar durch kongruente Ebenenbüschel projiziert wird*) durch die Projektionszentren gehen. Da alle derartigen Flächen zweiten Grades eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit bilden, wird es verhältnismäßig nicht so selten vorkommen, daß das aufgenommene Gelände durch ein Stück einer solchen Fläche annähernd ersetzbar ist. In einem solchen Fall besteht also die Gefahr, daß beim mechanischen Einpassen — selbst bei fortschreitender Verbesserung der Schnittgenauigkeiten zusammengehöriger Sehstrahlen — nicht die richtige Geländeform sondern eine andere orthogonale Fläche zweiten Grades erhalten wird. Daran würde sich nichts ändern, wenn auch noch so viele Geländepunkte in beiden Perspektiven deutlich abgebildet sind.

Die erwähnten Flächen zweiten Grades bilden daher für die Grundaufgabe der Photogrammetrie — anscheinend noch nirgends bemerkte — *„gefährliche Örter“*[6]) von folgender Eigenart: *Falls die Punkte des aufgenommenen Objektes einer solchen Fläche angehören, besitzt die Orientierung der Aufnahmen zwei oder drei wesentlich verschiedene Lösungen.* In Sonderfällen können auch zwei dieser Lösungen *zusammenfallen*, wobei eine davon die richtige Orientierung darstellt; diese ist sodann mit einer Unsicherheit behaftet, indem beide Bündel eine unendlich kleine einparametrige Beweglichkeit aufweisen, welche die orientierte Lage nicht aufhebt. Ferner wird der Nachweis erbracht, *daß die genannten Flächen zweiten Grades, zu denen als Grenzfälle auch alle Ebenen des Raumes gehören, die* ***einzigen*** *Raumgebilde sind, für welche die Orientierungsaufgabe mehrdeutig sein kann.*

Damit ist u. a. auch klargestellt, daß die Kernpunkte zweier Perspektiven mit bekannten inneren Orientierungen bereits durch die Bildpaare von sechs Punkten eindeutig bestimmt sind, sofern diese sechs Punkte keiner Fläche von der erwähnten Beschaffenheit und Lage angehören. Mit dieser Feststellung ist die schon jahrzehntelang durchforschte Hauptaufgabe der Photogrammetrie in geometrischer Hinsicht erstmalig restlos geklärt.

Für die photogrammetrische Praxis, insbesondere für die Auswertung von Luftaufnahmen im Gebirge, dürften diese Ergebnisse von besonderer Bedeutung sein.

Nr. 1. Allgemeine Bemerkungen.

Wir betrachten zwei Perspektiven (photographische Aufnahmen) eines räumlich ausgedehnten Objektes und bezeichnen

[6]) S. etwa S. Finsterwalder, a. a. O., S. 25—30.

die beiden Bildebenen (Plattenebenen) mit . . . . Π_1, Π_2;
die Augpunkte (Zentren oder Aufnahmsstandpunkte) mit . . . O_1, O_2;
die beiden Bildpunkte eines Raumpunktes P mit . . . . P', P'';
die zu P führenden Sehstrahlen (Zielstrahlen) mit . . . . p_1, p_2;
die beiden Hauptstrahlen (Aufnahme- oder Kammerachsen) mit . a_1, a_2;
die beiden Hauptpunkte (Plattenhauptpunkte) mit . . . . A_1, A_2;
endlich die Bilddistanzen der Zentren (Brennweiten der Objektive) mit . . . . d_1, d_2.

A_1, d_1 und A_2, d_2 bilden die Elemente der *inneren Orientierung* dieser Perspektiven. Die Verbindungsgerade $k_1 = k_2 = [O_1\, O_2]$ der Augpunkte (der *Doppelsehstrahl*) wird nach *Guido Hauck* [7]) als *Kernachse* bezeichnet. Ihre Schnittpunkte mit Π_1 und Π_2 sind die *Kernpunkte (Ordnungspunkte)* $O_2' = K'$ und $O_1'' = K''$ der beiden Aufnahmen, d. s. die Scheitel der *Kernstrahlbüschel (Ordnungsbüschel)*, die von den *(doppelprojizierenden) Kernebenen* aus Π_1 und Π_2 ausgeschnitten werden. Die Kernstrahlbüschel haben den *Grundschnitt* $x = [\Pi_1\, \Pi_2]$ zur Perspektivitätsachse und die Bildpunkte jedes Raumpunktes P müssen auf entsprechenden Kernstrahlen liegen [8]). Als (äußere) *Orientierung* zweier Perspektiven bezeichnet man die Gesamtheit aller Angaben, welche die gegenseitige Lage der Bildebenen und Projektionszentren während der Aufnahmen (d. h. in den festgehaltenen Aufnahmestellungen der Geräte) bestimmen.

Zwei Strahlen p_1, p_2, die sich in einem Objektpunkt P schneiden, sollen in der Folge *zugeordnete Sehstrahlen* genannt werden [7]). Sind die zu den Punkten eines Objektes gehörigen Sehstrahlenpaare bekannt, so wollen wir sagen: *Die beiden Sehstrahlbündel sind aufeinander bezogen,* und zwar ohne Rücksicht darauf, ob die Anzahl der vorhandenen Zuordnungen eine endliche oder unendliche ist. Falls bloß eine diskrete Anzahl von Sehstrahlenpaaren gegeben ist, müßte man eigentlich von *„Bündelfiguren“* oder *„n-Strahlen im Bündel“* sprechen.

---

[7]) G. Hauck, Neue Konstruktionen der Perspektive und Photogrammetrie, Crelle J. f. Math. 95 (1883), S. 1—35, insbesondere § 2. Wegen der anderen hier gebrauchten Benennungen s. E. Müller—E. Kruppa, Vorlesungen über darstellende Geometrie, 1. Band: „Die Linearen Abbildungen“, Leipzig und Wien, 1923, II. Kapitel.

[8]) Daß die Kernstrahlbüschel bereits 21 Jahre vorher von dem spanischen Brigadegeneral Antonio Terrero verwendet wurden, hat J. M. Torroja mitgeteilt. Vgl. die Referate von Th. Schmid, Intern. Archiv für Photogrammetrie, 3 (1913), S. 236, und K. Domansky, ebenda 6 (1923), S. 376.

Im Interesse einer kürzeren Ausdrucksweise wird dies jedoch nicht immer eigens unterschieden.

Von aufeinander bezogenen Sehstrahlbündeln soll auch dann noch gesprochen werden, wenn beide (starr gedachten) Bündel in irgendeiner Weise gegeneinander bewegt worden sind. Zwei solche allgemein gelegene Bündel liegen z. B. vor, wenn von einem Objekt zwei Perspektiven mit bekannter innerer aber unbekannter äußerer Orientierung (in irgendeiner gegenseitigen Lage) gegeben sind. Man kennt dann eine Anzahl von Paaren zugeordneter Sehstrahlen, die sich (im allg.) nicht schneiden.

Wir sagen weiters: Zwei aufeinander bezogene Sehstrahlbündel sind (gegenseitig) orientiert, oder sie befinden sich in orientierter Lage, *wenn jeder Sehstrahl von seinem zugeordneten geschnitten wird.* Dabei wird lediglich vorausgesetzt, daß diese Orientierung durch die vorhandenen Sehstrahlzuordnungen tatsächlich bestimmt ist (s. Einleitung).

Aus einer orientierten Lage ergeben sich durch alle möglichen (gleich- oder gegensinnig-) ähnlichen oder kongruenten Umformungen des Raumes ∞^7 bzw. ∞^6 weitere orientierte Lagen; diese sollen aber nicht weiter unterschieden werden, zumal für alle derartigen Lagen die Schnittpunkte zugeordneter Strahlenpaare untereinander *ähnliche* bzw. *kongruente* Raumfiguren ergeben. Zwei orientierte Lagen sind jedoch als *wesentlich verschieden* anzusehen, wenn es keine ähnliche (kongruente) Raumtransformation gibt, die gleichzeitig beide Bündel aus der einen in die andere Lage überführt. Durch Ausübung von singulären Ähnlichkeiten gelangt man auch zu jenen orientierten Lagen zweier Bündel, bei denen die Bündelscheitel vereinigt sind.

Sind nun O_1, O_2 zwei in orientierter Lage befindliche Bündel und dreht man eines davon, etwa O_2, um die Kernachse durch den Winkel π, so fällt jeder Strahl von O_2 wieder in seine ursprüngliche Kernebene und beide Bündel bleiben orientiert. Dabei erfüllen die zu zwei solchen Lagen gehörigen Schnittpunkte zugeordneter Sehstrahlen zwei *harmonisch kollineare Raumfiguren.* Für diese ist O_1 das Kollineationszentrum und die Normalebene zur Kernachse durch O_2 die Kollineationsebene [9]). Umgekehrt ist auch klar, daß je zwei wesentlich verschiedene orientierte Lagen, bei denen dieselben Bündelstrahlen und Bündel-

---

[9]) Vgl. Th. Schmid, Int. Arch. f. Photogrammetrie 3 (1913), S. 306 und 308. Hier findet sich auch eine vollständig durchgeführte konstruktive Lösung der Aufgabe, zwei (durch photographische Aufnahmen eines Vierseits bestimmte) kollineare Bündel in perspektive Lage zu bringen.

ebenen als Kernachse bzw. als Kernebenen auftreten, durch den soeben beschriebenen Vorgang (und eine allenfalls darauffolgende Ähnlichkeit) ineinander übergehen. Man kann daher feststellen: *Die wesentlich verschiedenen orientierten Lagen zweier aufeinander bezogenen Sehstrahlbündel sind immer paarweise vorhanden.* Die beiden orientierten Lagen eines solchen Paares sollen *ergänzende* heißen.

Handelt es sich um Sehstrahlbündel, die durch zwei *Aufnahmen* eines Raumobjektes aufeinander bezogen sind, so kommt für jede mögliche Kernachse immer nur eine orientierte Lage in Frage. Bei einer photographischen Aufnahme ist nämlich mit der inneren Orientierung auch die Seite der Bildebene (die Schichtseite der Platte) bekannt, auf der das Zentrum und die aufgenommenen Objektpunkte sich während der Aufnahme befunden haben. Damit ist auch der stets zu beachtende Unterschied zwischen *„Aufnahmen“* und *„Perspektiven“* gekennzeichnet [10]).

Wären nun die Bündel in der richtigen Orientierung gegeben und würde man eines von ihnen um die Kernachse umwenden (d. h. durch den Winkel π drehen), dann läge jeder Punkt des rekonstruierten Objektes für eine der Aufnahmen im virtuellen Raum und nicht im eigentlichen Sehraum. *Für die Zwecke der praktischen Anwendung hat man daher von je zwei ergänzenden Orientierungen immer bloß eine zu berücksichtigen.*

Nr. 2. Zur Rekonstruktion eines ebenen Objektes.

Liegen beispielsweise alle Punkte P des abgebildeten Objektes innerhalb einer Raumebene ε, so ist die durch diese Punkte bestimmte Zuordnung zwischen den beiden Sehstrahlbündeln eine perspektive Kollineation mit ε als Perspektivitätsebene und $[O_1\, O_2] = k_1 = k_2$ als Kollineationsachse. In einer solchen Kollineation gibt es im allgemeinen nur zwei (reelle) Paare von kongruenten Ebenenbüscheln, die sich entsprechen. Es sind dies: Die identisch aufeinander bezogenen Kernebenenbüschel mit den Achsen $k_1 = k_2$ und die beiden Ebenenbüschel, deren Achsen l_1 und l_2 zu ε symmetrisch sind. Diese Büschelpaare fallen nur dann zusammen, wenn $k_1 = k_2$ zu ε normal ist. Gäbe es mehr als zwei reelle Paare von entsprechenden kongruenten Ebenen-

[10]) In der Praxis spricht man von *„Negativstellung“* bzw. *„Positivstellung“* (auch *„Diapositivstellung“*), je nachdem das Projektionszentrum zwischen der Bildplatte und dem aufgenommenen Objekt liegt (wie es bei der Aufnahme der Fall war) oder die Bildebene sich zwischen Zentrum und Objekt befindet. Vgl. O. v. Gruber, a. a. O., S. 11.

büscheln, dann wären die Bündel selbst kongruent, d. h. entweder zu ε symmetrisch oder (längs $k_1 = k_2$) ineinander verschiebbar (ε im Unendlichen).

Sind umgekehrt zwei Perspektiven eines ebenen Objektes (Geländes) samt ihren inneren Orientierungen gegeben, so ist damit auch die von den Objektpunkten hervorgerufene (allgemeine) Kollineation zwischen den Sehstrahlbündeln bestimmt. Eine solche Kollineation ist bekanntlich durch vier Strahlenpaare allgemeiner Lage eindeutig festgelegt. Um diese Bündel in orientierte (in diesem Fall perspektive) Lage zu bringen, hat man in ihnen die (einander entsprechenden) kongruenten Ebenenbüschelpaare aufzusuchen. Man erhält (wie oben) im allgemeinen zwei solche Paare und damit vier paarweise ergänzende Lösungen [10]). Wird nun das Bündel O_1 festgehalten und das Bündel O_2 auf vier wesentlich verschiedene Arten mit O_1 in orientierte Lage gebracht, so sind die von den Schnittpunkten zugeordneter Strahlen jeweils erfüllten Felder (Perspektivitätsebenen) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ offenbar paarweise perspektiv kollinear. Die zu ergänzenden orientierten Lagen gehörigen Felder entsprechen sich insbesondere in einer harmonischen Raumkollineation [9]). Nun gibt es in zwei kollinearen Bündeln im allgemeinen auch zwei (reelle) Paare von kongruenten Strahlbüscheln [9]). Sind im Bündel O_1 die Ebenen dieser Büschel bekannt, dann sind je zwei der Ebenen ε_i zu ihnen und untereinander parallel, also ähnlich aufeinander bezogen. Mittels einer leicht herzustellenden Figur überzeugt man sich nun, daß die beiden Projektionszentren hinsichtlich zweier Ebenen ε_i, etwa $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, auf derselben Seite liegen, während die zu ihnen parallelen Ebenen $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ die Zentren voneinander trennen. Man folgert daraus (vgl. Schluß von Nr. 1 und Fußn. [9]) den

Satz 1: *Ist durch zwei (mit inneren Orientierungen versehenen) Aufnahmen eines ebenen Objektes (Geländes) eine kollineare Zuordnung der Sehstrahlbündel gegeben, und achtet man darauf, daß die Objektpunkte in den eigentlichen Sehräumen der Perspektive liegen, so liefert die Rekonstruktion im allgemeinen nur noch zwei Lösungen, die untereinander kollinear (und nicht ähnlich) sind.*

In Sonderfällen können diese Lösungen auch zusammenfallen (s. oben). Es entsteht nun die weitere Frage: Welche der im Satz 1 genannten Lösungen ergibt den richtigen Plan des Geländes? Um die Auswahl treffen zu können, ohne Raumpunkte außerhalb der Objektebene ε heranzuziehen, müßte noch eine geeignete Eigenschaft einer in ε enthaltenen Figur bekannt sein. Z. B. würde es meistens genügen, wenn in einer der Perspektiven die ungefähre Lage der Fluchtlinie von ε bekannt wäre. In der Praxis werden nun gewöhnlich mehrere Bilder in der Weise hintereinander aufgenommen, daß benachbarte Bilder sich zum Teil übergreifen. Es läßt sich daher in jedem Bild die Flugrichtung ungefähr angeben und damit ist die richtige Auswahl ebenfalls möglich; denn die Aufnahmszentren müssen in der gleichen Reihenfolge wie die Bilder aufeinander folgen. Bei der anderen Lösung, die nach Satz 1 eine kollineare Verzerrung des Geländes darstellt, wäre aber die Reihenfolge der Zentren gegenüber den Bildern im allgemeinen vertauscht.

Nr. 3. Zur Konstruktion der Kernpunkte zweier Perspektiven.

Sind von einem räumlich ausgedehnten Objekt zwei Perspektiven ohne innere und gegenseitige Orientierung gegeben, so können die Kernpunkte u. a. auf Grund des folgenden Hilfssatzes ermittelt werden:

Zu sieben beliebig gewählten Punktepaaren P_i', P_i'' $(i = 1, 2 \dots 7)$ der Bildebenen Π_1 bzw. Π_2 gibt es im allgemeinen stets drei Punktepaare H_j', H_j'' $(j = 1, 2, 3)$, aus denen die P_i' bzw. P_i'' durch projektive Strahlseptupel projiziert werden [11]).

Die Aufgabe, durch zwei Gruppen von je sieben Punkten projektive Strahlbüschel zu legen, wird auch als „*Problem der Projektivität*" der Ebene bezeichnet. Lassen sich nun aus zwei Perspektiven genügend viele Bildpaare P', P'' entnehmen, so ergeben sich die Kernpunkte, wenn man dieses Problem der Projektivität für mehrere Gruppen von je sieben Bildpaaren löst und das allen Lösungen gemeinsame Punktepaar H', H'' aufsucht [12]).

Diese Konstruktion versagt jedoch, wenn zwischen den Bildebenen Π_1, Π_2 eine *quadratische Verwandtschaft* $\mathfrak{V}$ besteht, der alle vorhandenen Bildpaare P', P'' angehören. Denn alle Punktepaare einer solchen Verwandtschaft werden bekanntlich aus ihren drei Hauptpunktepaaren H_j', H_j'' durch projektive Strahlbüschel projiziert Die gegebenen Bilder von Raumpunkten, *also selbst* ∞^2 *Zuordnungen* P' P'' *liefern in einem solchen Fall keinen Anhaltspunkt* für die richtige Auswahl der Kernpunkte unter den drei Hauptpunktepaaren von $\mathfrak{V}$.

---

[11]) Über die Literatur dieses Satzes s. E. Müller-E. Kruppa, a. a. O., S. 150, Fußn. [1]).

[12]) Vgl. S. Finsterwalder, a. a. O., S. 10, und E. Müller-E. Kruppa, a. a. O., S. 151.

Es erhebt sich sofort die Frage: Welches räumliche Gebilde, d. h. welche Fläche bestimmt durch die ∞^2 Bildpaare ihrer Punkte P eine quadratische Verwandtschaft zwischen Π_1 und Π_2? Da $\mathfrak{B}$ durch sieben Punktepaare $P_i' P_i''$ allgemeiner Lage eindeutig festgelegt ist[13]), muß auch diese Fläche durch die sieben Raumpunkte P_i bestimmt sein. Nun läßt sich durch diese sieben Punkte und die beiden Augpunkte O_1, O_2 im allgemeinen eine einzige Fläche zweiten Grades Φ legen[14]). Projiziert man deren Punkte aus O_1 und O_2 auf Π_1 bzw. Π_2, so erhält man eine quadratische Verwandtschaft[15]), die ebenfalls die sieben Punktepaare P_i', P_i'' enthält und daher mit $\mathfrak{B}$ identisch ist. Also ist Φ bereits die gesuchte Fläche.

Die Hauptpunkte der Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ sind: Die beiden Kernpunkte $K' = O_2'$ und $K'' = O_1''$, die sich als Schnittpunkte der Kernachse $k_1 = k_2$ mit Π_1 bzw. Π_2 ergeben; ferner die Spurpunkte $E_1' F_1'$ und $E_2'' F_2''$ der durch O_1 bzw. O_2 gehenden Erzeugenden e_1, f_1 und e_2, f_2 von Φ auf Π_1 bzw. Π_2. Denn läßt man etwa P' eine Gerade g' von Π_1 durchlaufen, so beschreibt P im Raum auf Φ einen Kegelschnitt g, der durch O_1 geht und mit e_2, f_2 je einen (von O_1 verschiedenen) Punkt gemeinsam hat; demnach ist g'' ein Kegelschnitt, der durch K'', E_2'' und F_2'' geht, usw. Man überzeugt sich auch leicht, daß die zusammengehörigen Hauptpunkte $E_1' E_2''$ und $F_1' F_2''$ von $\mathfrak{B}$ den windschiefen Erzeugenden e_1, e_2 bzw. f_1, f_2 von Φ angehören. Die Erzeugenden dieser Paare und die zugehörigen Hauptpunkte können auch konjugiert imaginär sein oder zusammenfallen. Aus diesen Überlegungen ergeben sich folgende Sätze:

Satz 2: *Sind in zwei Perspektiven, deren innere Orientierungen nicht bekannt sind, beliebig viele (∞^2) Bildpaare P' P'' gegeben, die einer quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ angehören, so liegen die zugehörigen Raumpunkte P auf einer Fläche zweiten Grades, die beide Augpunkte enthält, und es läßt sich aus diesen Bildfeldern allein nicht erkennen, welches der drei Hauptpunktepaare von $\mathfrak{B}$ aus den Kernpunkten dieser Perspektiven besteht.*

Satz 2a: *Aus zwei (ohne innere Orientierungen) gegebenen Aufnahmen eines Geländes, das innerhalb des abgebildeten Bereiches mit einer durch beide Projektionszentren gehenden Fläche zweiten Grades übereinstimmt, lassen sich die Kernpunkte selbst dann nicht eindeutig*

---

13) H. Schröter, Crelle J. f. Math. 62 (1863), S. 224.

14) Enz. Math. Wiss. III C 2 (O. Staude), S. 211.

15) Th. Reye, Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), S. 280—310.

ermitteln, wenn die Bildpaare von beliebig vielen Geländepunkten vorhanden sind.

Der schon mehrmals bewiesene Satz, daß *die Kernpunkte aus acht widerspruchsfreien Bildpaaren mittels linearer Operationen eindeutig gefunden werden können*[16], ist demnach dahin zu ergänzen, *daß die zugehörigen acht Raumpunkte keiner Fläche zweiten Grades angehören dürfen, die beide Projektionszentren enthält* (vgl. weiter unten Nr. 6, Satz 8).

Sind hingegen die inneren Orientierungen der Perspektiven bekannt, so bestimmt eine quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{V}$ zwischen den Bildebenen Π_1, Π_2 eine ebensolche Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$ zwischen den Sehstrahlbündeln O_1, O_2. Denkt man sich die orientierte Lage dieser Bündel hergestellt und die zu $\mathfrak{V}$ gehörige Fläche Φ (Satz 2) ermittelt, so sind die Hauptstrahlen von $\mathfrak{Q}$ (s. oben): Die Kernachse $k_1 = k_2$ und die durch O_1, O_2 gehenden Erzeugendenpaare e_1, e_2 und f_1, f_2 von Φ. Da die Strahlenpaare zweier quadratisch verwandter Bündel aus den drei Hauptstrahlenpaaren durch projektive Ebenenbüschel projiziert werden, ergeben alle Paare von Sehstrahlen p_1, p_2, die sich in den Punkten P von Φ schneiden, mit den Strahlenpaaren $k_1 = k_2$, $e_1\, e_2$ und $f_1\, f_2$ verbunden, jedesmal projektive Ebenenbüschel. Insbesondere decken sich die (kongruenten) Ebenenbüschel k_1, k_2, d. h. jede ihrer Ebenen ist mit der entsprechenden zusammengefallen.

Ist für eine allgemeine Lage der beiden Sehstrahlbündel die quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$ gegeben, so hat man, um die Bündel zu orientieren, jene zwei Hauptstrahlen k_1, k_2 zu suchen, die Träger von entsprechenden kongruenten Ebenenbüscheln sind. Zwei solche Büschel sind immer vorhanden, wenn die Sehstrahlbündel von zwei wirklichen Perspektiven einer Fläche Φ herrühren. Werden sodann die Ebenenbüschel k_1, k_2 (wie in allgemeinen Fällen) zur Deckung gebracht (es bestehen dabei zwei Möglichkeiten, s. Schluß von Nr. 1), so sind damit die Kernebenen und — abgesehen vom Maßstab — die Elemente der gegenseitigen Orientierung der Aufnahmen gefunden. Ergänzende Orientierungen außer Betracht gelassen (Nr. 1), kann man also sagen:

Durch die Punktepaare $P'\, P''$ einer quadratischen Verwandtschaft zwischen den Bildebenen Π_1, Π_2 sind die Kernpunkte und die Elemente der gegenseitigen Orientierung der Perspektiven im allge-

[16]) H. v. Sanden, Die Bestimmung der Kernpunkte in der Photogrammetrie, Diss. Göttingen, 1908; J. Koppmair, Generelle Lösung der Grundaufgabe der Photogrammetrie, Allg. Verm. Nachr. 43 (1932), S. 39.

meinen ***eindeutig*** *bestimmt, sobald die inneren Orientierungen bekannt sind.*

Nr. 4. Die orthogonalen Regelflächen zweiten Grades der Mannigfaltigkeit (Ω).

Nun kann aber der Fall eintreten, daß neben k_1, k_2 auch noch zwei andere Hauptstrahlen der quadratischen Bündelverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ die Achsen von entsprechenden kongruenten Ebenenbüscheln sind. Ja, es ist sogar möglich, daß entsprechende Sehstrahlen p_1, p_2 aus allen drei Hauptstrahlenpaaren durch kongruente Ebenenbüschel projiziert werden.

Um festzustellen, wann solche Fälle vorliegen, bemerken wir zunächst, daß die oben betrachteten projektiven Ebenenbüschel e_1, e_2 bzw. f_1, f_2 je eine Regelschar der Fläche Φ erzeugen. Diese ist nämlich durch das windschiefe Erzeugendenviereck $e_1 f_1 e_2 f_2$ und einen allgemein liegenden Flächenpunkt P eindeutig festgelegt und dieselben Elemente bestimmen auch die Projektivitäten zwischen den genannten Büscheln.

Es gibt nun besondere Regelflächen zweiten Grades, *die durch* (reelle) **kongruente Ebenenbüschel** *erzeugt werden können* [17]); es sind dies die *orthogonalen Kegel*, die *orthogonalen Hyperboloide* und (als deren Grenzfälle) die gleichseitigen hyperbolischen (kürzer: *orthogonalen*) *Paraboloide*, schließlich die *Drehzylinder* und die *gleichseitigen hyperbolischen Zylinder.* Wir wollen diese Flächen zusammengefaßt **orthogonale Regelflächen zweiten Grades** nennen. Jede solche Fläche ist durch ∞^1 (der Drehzylinder sogar durch ∞^2) Paare von kongruenten Ebenenbüschel erzeugbar. Bei den windschiefen Flächen dieser Art gibt es für jede Erzeugendenschar ∞^1 solche Ebenenbüschelpaare. Je zwei Erzeugenden (derselben Schar), aus denen die Fläche (die andere Schar) durch kongruente Ebenenbüschel projiziert wird, sollen **adjungierte Erzeugenden** heißen. Beim orthogonalen Kegel sind die Paare adjungierter Erzeugenden zu jener Hauptebene η symmetrisch, die zu den Ebenen der reellen Kreisschnitte normal ist. Zu diesen Ebenen sind auch die in η befindlichen *Scheitelerzeugenden* normal. Letztere fallen mit ihren adjungierten Erzeugenden zusammen und sollen **Haupterzeugenden** heißen. Übrigens ist jeder Kegel zweiten Grades *orthogonal,* der eine Erzeugende enthält, die zur Ebene eines reellen Kreisschnittes normal ist.

[17]) H. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, usw., Leipzig 1880, §§ 12, 25.

Ein orthogonales Hyperboloid $\mathfrak{H}$ hat einen orthogonalen Kegel zum Asymptotenkegel. Bezeichnen a und b die große bzw. kleine reelle Halbachsenstrecke und c den absoluten Betrag der imaginären Halbachse, so ist $\mathfrak{H}$ dann und nur dann orthogonal, wenn die Relation

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0 \tag{1}$$

erfüllt ist [18]). Je zwei adjungierte Erzeugenden eines orthogonalen Hyperboloides sind stets achsial-symmetrisch in bezug auf die Hauptachse der Kehlellipse. Beim orthogonalen Paraboloid und beim gleichseitigen hyperbolischen Zylinder sind je zwei zur Achse symmetrische Erzeugenden adjungiert und beim Drehzylinder ist schließlich jede Erzeugende zu jeder anderen adjungiert. Die *zu sich selbst adjungierten* Scheitelerzeugenden eines orthogonalen Hyperboloides (oder Paraboloides) wollen wir ebenfalls **Haupterzeugenden** nennen.

Das Erzeugnis zweier perspektiv liegenden kongruenten Ebenenbüschel zerfällt in zwei zueinander normale Ebenen, nämlich in die Symmetrieebene der beiden Büschel und die Verbindungsebene der Büschelachsen (vgl. Nr. 2). Umgekehrt können je zwei normale Ebenen ε_1, ε_2 stets (und zwar auf ∞^2 Arten) als zerfallendes Erzeugnis zweier kongruenter Ebenenbüschel erhalten werden. Deren Achsen befinden sich in ε_1 (oder ε_2) und sind zur Schnittgeraden dieser Ebenen symmetrisch. *Die Paare normaler Ebenen bilden mithin die zerfallenden orthogonalen Regelflächen zweiter Ordnung.* Insbesondere ergibt jede Ebene zusammen mit der Fernebene ein solches Paar.

Sei nun Ω eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades und projizieren wir diese aus zwei Zentren O_1, O_2, die auf zwei (reellen getrennten) adjungierten Erzeugenden e_1 bzw. e_2 dieser Fläche liegen, so werden die ∞^2 Strahlenpaare $p_1\, p_2$ der quadratisch verwandten Sehstrahlbündel sowohl aus der Kernachse $k_1 = k_2$ als auch aus den Hauptgeraden e_1 und e_2 *durch kongruente Ebenenbüschel projiziert.* Bringt man nun die beiden (starr gedachten) Bündel in eine solche Lage, daß e_1, e_2 und desgleichen alle entsprechenden Ebenen dieser kongruenten Büschel zusammenfallen, so gelangen je zwei Sehstrahlen p_1, p_2, die sich zuerst in einem Punkt P von Ω schneiden, abermals in eine und dieselbe Ebene, nämlich in $[e_1\, p_1] = [e_2\, p_2]$. Man kann daher sagen: *Alle Sehstrahlenpaare, die sich in der ursprünglichen Lage der Bündel O_1, O_2 geschnitten haben, schneiden sich auch in der*

[18]) H. Schröter, a. a. O., S. 180, 189.

neuen Lage der beiden Bündel. Diese sind also wieder orientiert, nur ist jetzt $e_1 = e_2$ die Kernachse.

Wir zeigen sogleich, daß die Schnittpunkte zugeordneter Sehstrahlen auch in der zweiten Lage eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades Ω^0 erfüllen. Zu diesem Zweck beachten wir, daß die ∞^1 Strahlenpaare p_1, p_2 der ursprünglichen Lage, die einer Kernebene $\varkappa_1 = \varkappa_2$ angehören, zwei projektive Strahlbüschel bilden; deren Erzeugnis ist ja die Schnittkurve zweiter Ordnung s von Ω mit $\varkappa_1 = \varkappa_2$. Nach der Vereinigung der Ebenenbüschel e_1 und e_2 sind diese Strahlbüschel perspektiv geworden, denn die Schnittpunkte entsprechender Strahlen müssen jetzt auf der Schnittgeraden der (nicht mehr vereinigten) Ebenen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ liegen. Da weiters die (durch $k_1 = k_2$ gehenden) Ebenenpaare $\varkappa_1, \varkappa_2$ in der neuen Lage kongruente Ebenenbüschel mit (im allgemeinen) windschiefen Achsen k_1^0, k_2^0 bilden, ist Ω^0 tatsächlich — als Erzeugnis dieser Büschel — eine orthogonale Fläche zweiten Grades.

Im vorliegenden Fall können also die beiden (quadratisch verwandten) Sehstrahlbündel *auf* ***zweimal zwei*** *wesentlich verschiedene Arten* in solche Lage gebracht werden, *daß jeder Sehstrahl seinen zugeordneten schneidet.* Wären die durch O_1, O_2 gehenden Erzeugenden f_1, f_2 der anderen Schar von Ω gleichfalls adjungiert (und nicht zusammengefallen), dann gäbe es überdies noch ein d r i t t e s Paar von ergänzenden orientierten Lagen. Man hat somit folgende Ergebnisse:

Satz 3: *Wird eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades Ω aus den Zentren O_1, O_2 projiziert, die auf zwei (oder auf zweimal zwei) getrennten adjungierten Erzeugenden von Ω liegen, so sind die beiden Sehstrahlbündel derart quadratisch aufeinander bezogen, daß sie auf* ***zwei****(oder* ***drei-)mal zwei*** *wesentlich verschiedene Arten orientiert werden können.*

Satz 3*a*: *Aus zwei (mit inneren Orientierungen versehenen) photographischen Aufnahmen eines Geländes, das innerhalb des betrachteten Bereiches mit einer orthogonalen Regelfläche zweiten Grades Ω übereinstimmt, von der zwei (oder zweimal zwei) getrennte adjungierte Erzeugenden durch die Projektionszentren O_1 bzw. O_2 gehen, lassen sich die Kernpunkte und die gegenseitige Orientierung selbst dann* ***nicht eindeutig*** *ermitteln, wenn noch so viele Geländepunkte in beiden Aufnahmen deutlich abgebildet sind.*

Sind die Zentren O_1, O_2 im Raum gegeben, so gibt es ∞^5 orthogonale Regelflächen Ω von der im Satz 3 genannten Art. Denn diesen Flächen sind unter allen ∞^9 Flächen zweiten Grades des Raumes vier einfache Bedingungen auferlegt. Dies bestätigt sich auch im Laufe der späteren Überlegungen. Wir wollen die Mannigfaltigkeit aller orthogonalen Regelflächen zweiten Grades, von denen zwei adjungierte Erzeugenden durch O_1 bzw. O_2 gehen, mit (Ω) bezeichnen. Nach einer früheren Bemerkung gehören zu (Ω) auch alle *Paare normaler Ebenen*, von denen eine Ebene eine Kernebene ist. Eine systematische Besprechung der verschiedenen Sonderfälle soll weiter unten erfolgen (Nr. 7). Vorerst wollen wir die Punktverwandtschaft zwischen den Flächen Ω und Ω^0 näher untersuchen.

Nr. 5. Die Punktverwandtschaft $\mathfrak{P}$.

Wir betrachten wieder zwei quadratisch verwandte Sehstrahlbündel, die neben der orientierten Lage O_1, O_2 und deren Ergänzung (s. Nr. 1) noch eine zweite (wesentlich verschiedene) orientierte Lage O_1^0, O_2^0 einnehmen können. Die Kernachsen dieser Orientierungen seien: $k_1 = k_2 = [O_1\, O_2]$ bzw. $e_1^0 = e_2^0 = [O_1^0\, O_2^0]$. Ordnet man nun jedem Schnittpunkt P zweier zugeordneter Sehstrahlen $p_1\, p_2$ von O_1, O_2 den Schnittpunkt P^0 der ihnen entsprechenden Strahlen p_1^0, p_2^0 von O_1^0, O_2^0 zu, so sind die von den Punkten P und P^0 erfüllten orthogonalen Regelflächen zweiten Grades Ω und Ω^0 (Nr. 4) eineindeutig aufeinander bezogen. Diese Punktverwandtschaft soll abgekürzt mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden. Sie ist jedenfalls keine Kollineation, weil ja — wie oben gezeigt wurde — jedem *Kernschnitt* zweiter Ordnung s von Ω eine (k_1^0 und k_2^0 schneidende) Erzeugende s^0 von Ω^0 entspricht. Man erkennt leicht, daß auch umgekehrt zu den Kernschnitten zweiter Ordnung f_i^0 von Ω^0 die e_1 und e_2 schneidenden Erzeugenden f_i von Ω gehören.

Sei ferner $c\,(d^0)$ ein auf Ω (bzw. Ω^0) befindlicher Kegelschnitt, der O_1, O_2 (O_1^0, O_2^0) nicht enthält. Die Punkte P von c (Q^0 von d^0) werden aus $O_1, O_2\, (O_1^0, O_2^0)$ durch projektive Kegel zweiter Ordnung projiziert, die e_1, e_2 (k_1^0, k_2^0) als Erzeugenden enthalten. Diesen Kegeln entsprechen in der anderen orientierten Lage zwei Kegel zweiten Grades mit der gemeinsamen Erzeugenden $e_1^0 = e_2^0$ $(k_1 = k_2)$. Damit ist klargestellt, daß den Punkten eines beliebigen ebenen Schnittes $c\,(d^0)$ von Ω (bzw. Ω^0) auf $\Omega^0\,(\Omega)$ im allgemeinen die Punkte einer Raumkurve dritter Ordnung $c^0\,(d)$ zugeordnet sind, die durch O_1^0, $O_2^0 (O_1, O_2)$ geht. Im Besonderen entspricht auch der Fernkurve u (v^0) von Ω (Ω^0) eine solche Kurve dritter Ordnung u^0 (v). Ausgenommen sind nur die schon erwähnten Kernschnitte und jene Kegelschnitte von Ω (Ω^0), die bloß einen der Bündelscheitel O_1 oder O_2 (O_1^0 oder O_2^0) enthalten. Den letztgenannten Kurven entsprechen die durch O_1^0 oder O_2^0 (O_1 oder O_2) gehenden Kegelschnitte von Ω^0 (Ω).

Man kann auch sagen: *Auf jedem ebenen Schnitt c von Ω gibt es drei Punkte, denen zufolge $\mathfrak{P}$ drei Punkte eines beliebig gewählten ebenen Schnittes d^0 von Ω^0 zugeordnet sind.* Man erhält diese drei Punktepaare, wenn man die c und d^0 entsprechenden Raumkurven dritter Ordnung c^0 und d mit d^0 bzw. c zum Schnitt bringt. *Insbesondere enthält jede dieser Flächen drei und nur drei Fernpunkte, denen auf der anderen wieder drei Fernpunkte entsprechen.* Die Lage dieser Punkte wird weiter unten festgestellt.

Weiters läßt sich zeigen, daß die Schar (e_i) der zu e_1, e_2 windschiefen Erzeugenden e_i von Ω zufolge $\mathfrak{P}$ auf die k_1^0, k_2^0 enthaltende Erzeugendenschar (k_i^0) von Ω^0 eineindeutig abgebildet ist. Die Raumkurve dritter Ordnung c^0, die einem Kegelschnitt c entspricht, zerfällt nämlich in einen Kernschnitt f_i^0 und eine Erzeugende k_i^0 von Ω^0, wenn die Ebene von c die Fläche Ω berührt, d. h. je eine Erzeugende beider Scharen enthält. Den Erzeugenden e_1 und e_2 sind im besonderen die Erzeugenden k_2^0 bzw. k_1^0 zugeordnet. Dies stimmt auch mit folgendem überein: Die projektiven Ebenenbüschel mit den Achsen f_1, f_2, welche die Schar (e_i) von Ω erzeugen, sind in der zweiten orientierten Lage in die projektiven Ebenenbüschel mit den Achsen f_1^0, f_2^0 übergegangen und diese Büschel erzeugen die Schar (k_i^0) von Ω^0. *Die Geraden $f_1 . f_2$ (f_1^0, f_2^0) und die Erzeugenden e_i (k_i^0) sind also die einzigen Geraden auf Ω (Ω^0), denen auf der anderen Fläche wieder Geraden entsprechen.* Die Strahlenpaare p_1, p_2 von O_1, O_2, die sich in den Punkten einer Erzeugenden e_i schneiden, bilden mithin in der anderen Lage abermals perspektive Strahlbüschel; ihre Perspektivitätsachse ist die zugehörige Erzeugende k_i^0. Damit ist auch bewiesen, daß die Punktepaare P, P^0 auf zwei entsprechenden Erzeugenden e_i und k_i^0 projektive Punktreihen bilden. Auch auf den Erzeugendenpaaren f_1, f_1^0 und f_2, f_2^0 sind projektive Punktreihen vorhanden.

Werden Ω und Ω^0 aus zwei beliebigen ihrer Punkte, die sich in $\mathfrak{P}$ entsprechen, auf zwei Ebenen projiziert, so ergeben sich quadratisch verwandte Felder mit den Bildern von $k_1 = k_2$, e_1, e_2 bzw. von $e_1^0 = e_2^0$, k_1^0, k_2^0 als Hauptgeraden. *Mithin kann $\mathfrak{P}$ auch als spezielle quadratische Verwandtschaft zwischen Ω und Ω^0 angesehen werden.*

Aus obigem ergibt sich ferner unmittelbar, daß irgend vier Punkten A, B, C, D von Ω, die einer Ebene ε angehören, im allgemeinen immer vier Punkte A^0, B^0, C^0, D^0 von Ω^0 entsprechen, die nicht in einer Ebene liegen. Der Schnittkurve von ε mit Ω entspricht ja eine Raumkurve dritter Ordnung auf Ω^0. Wird vorausgesetzt, daß ε keine Tangentialebene von Ω ist und weder O_1 noch O_2 enthält, und lägen die Punkte A^0, B^0, C^0, D^0 dennoch in einer Ebene ε^0, dann wären die beiden orientierten Lagen der Bündel entweder ergänzend oder nicht wesentlich verschieden. Wir stoßen nämlich auf einen Widerspruch, wenn wir in einem solchen Fall annehmen, daß die Kernachsen $k_1 = k_2$ und $e_1^0 = e_2^0$ dieser Lagen verschieden sind. Denn durch die Punkte $A\,B\,C\,D$ von ε (oder $A^0\,B^0\,C^0\,D^0$ von ε^0) ist zwischen den Sehstrahlbündeln (oder zwischen den ebenen Feldern ε und ε^0) eine (allgemeine) Kollineation festgelegt (Nr. 2) und durch zwei weitere Punkte, die außerhalb ε oder ε^0 der Fläche Ω bzw. Ω^0 (nicht aber derselben Kernebene) angehören, wären die Kernachsen der Bündel eindeutig bestimmt[19]).

Damit sind die wichtigsten Eigenschaften der Punktverwandtschaft $\mathfrak{P}$ angegeben. Halten wir folgende Ergebnisse fest:

Satz 4: *Lassen sich zwei quadratisch verwandte Bündel in zwei (oder drei) wesentlich verschiedene (nicht ergänzende) orientierte Lagen bringen, so erfüllen die jeweiligen Schnittpunkte zugeordneter Bündelstrahlen zwei (drei) orthogonale Regelflächen zweiten Grades der Mannigfaltigkeit* (Ω) *und diese Flächen sind dabei (paarweise) eineindeutig quadratisch aufeinander bezogen.*

Die zu zwei ergänzenden Orientierungen gehörigen Flächen Ω sind hingegen nach Nr. 1 (vgl. Fußn. [9]) harmonisch kollinear. Bezeichnen also $O_1\,O_2$, $O_1'\,O_2'$ und $O_1^0\,O_2^0$, $O_1''O_2''$ zwei wesentlich verschiedene ergänzende Paare von orientierten Lagen der beiden Bündel und Ω, Ω' bzw. Ω^0, Ω'' die entsprechenden orthogonalen Regelflächen zweiten Grades, so gilt für die Flächenpaare $\Omega\,\Omega^0$, $\Omega\,\Omega''$, $\Omega'\,\Omega^0$, $\Omega'\,\Omega''$ der Satz 4, während Ω und Ω' bzw. Ω^0 und Ω'', wie gesagt, harmonisch kollinear aufeinander bezogen sind.

Wir betrachten nochmals die Raumkurven dritter Ordnung u^0 und v von Ω^0 bzw. Ω, die den Fernkurven zweiter Ordnung u und v^0 von Ω bzw. Ω^0 zufolge $\mathfrak{P}$ entsprechen. Es läßt sich nachweisen, daß u^0 (v) ein *gerader kubischer Kreis* ist, auf dem O_1^0, O_2^0 (O_1, O_2) liegen (und zwar symmetrisch zum Kurvenscheitel). Zu diesem Zweck beachten wir, daß

[19]) S. Finsterwalder, a. a. O., S. 10, und Th. Schmid, a. a. O., S. 307.

die beiden (kongruenten) orthogonalen Kegel ω_1, ω_2 (φ_1^0, φ_2^0), die u (v^0) aus O_1, O_2 (O_1^0, O_2^0) projizieren, in der anderen orientierten Lage (bei der $\omega_i^0 \cong \omega_i$ und $u^0 = [\omega_1^0 \omega_2^0]$ bzw. $\varphi_i \cong \varphi_i^0$ und $v = [\varphi_1\ \varphi_2]$ ist) aus allen jenen Strahlen zweier kongruenter Bündel bestehen, die ihre entsprechenden Strahlen schneiden. In der Tat sind die beiden Sehstrahlbündel $O_1\ O_2$ (bzw. O_1^0, O_2^0) durch die Punkte der Fernebene kongruent aufeinander bezogen und alle Strahlenpaare, die sich auf (u) v^0 schneiden, schneiden sich auch in der anderen Orientierung. Zwei kongruente Bündel allgemeiner Lage erzeugen aber immer einen geraden kubischen Kreis [20]). Die reellen Asymptoten der geraden kubischen Kreise v und u^0 müssen zu je einer Haupterzeugenden e_s bzw. k_s^0 der Schar (e_i) bzw. (k_i^0) von Ω bzw. Ω^0 parallel sein. Die anderen Haupterzeugenden dieser Scharen spielen jeweils in den ergänzenden Orientierungen die gleiche Rolle [20]). Man erkennt nun auch folgendes:

Von den drei Paaren entsprechender Fernpunkte der Flächen Ω und Ω^0 ist im allgemeinen nur eines reell, nämlich jenes, das von den Fernpunkten zweier entsprechenden Haupterzeugenden e_s und k_s^0 gebildet wird, die übrigen bestehen aus den absoluten Punkten der zu e_s bzw. k_s^0 normalen Stellung [20]). Dies hat u. a. zur Folge, *daß allen Kreisen auf Ω (Ω^0), deren Ebenen zu e_s (bzw. k_s^0) normal sind, in der Punktverwandtschaft $\mathfrak{P}$* (im allgemeinen schiefe) *kubische Kreise auf Ω^0* (bzw. Ω) *entsprechen.*

In Sonderfällen können die kubischen Kreise u^0 und v auch zerfallen (Nr. 7, Fall 1, 2, 4, 5, 6).

[20]) Daß der Ort der Schnittpunkte entsprechender (und inzidenter) Strahlen zweier kongruenter Sehstrahlbündel im allgemeinen eine solche metrisch spezielle Raumkurve dritter Ordnung *(Horopterkurve)* ist, hat als Erster H. v. Helmholtz, Poggend. Ann. 123 (1862), S. 158, angegeben. Vgl. auch W. Ludwig, Die Horopterkurve (Math. Abh. aus dem Verlage M. Schilling), Halle a. d. Saale, 1902, sowie Enz. Math. Wiss. III C 2 (O. Staude), S. 233. — Jeder Kegel, der einen geraden kubischen Kreis aus einem seiner Punkte projiziert, ist ein orthogonaler Kegel, von dem eine Haupterzeugende durch den Kurvenscheitel geht, während die andere zur reellen Asymptote der Kurve parallel ist (vgl. J. Krames, Sur une propriété remarquable du cercle cubique droit, Mathesis 51, Brüssel 1937, S. 39—41). Da je zwei adjungierte Erzeugenden e_1, e_2 eines orthogonalen Hyperboloides Ω mit jeder Haupterzeugenden von Ω, also auch mit jeder Haupterzeugenden der orthogonalen Kegel ω_1, ω_2 gleiche Winkel bilden, bestätigt sich damit, daß O_1^0, O_2^0 (O_1, O_2) zum Scheitel von u^0 (v) symmetrisch liegen. Bei den ergänzenden Orientierungen vertauschen die Haupterzeugendenpaare von ω_1, ω_2 (φ_1^0, φ_2^0) bzw. ω_1^0, ω_2^0 (φ_1, φ_2) ihre Bedeutung hinsichtlich der entsprechenden geraden kubischen Kreise.

Nr. 6. Allgemeinster Fall der mehrdeutigen Orientierung zweier Sehstrahlbündel.

Es ist noch die Frage zu untersuchen, ob nicht auch durch die Punkte von anderen Raumgebilden (Flächen) eine solche Zuordnung zwischen den beiden Sehstrahlbündeln verursacht wird, *daß diese auf mehrere wesentlich verschiedene Arten orientierbar sind.* Wir denken uns zu diesem Zweck alle Punkte des Raumes aus den beiden Zentren O_1, O_2 auf Π_1 bzw. Π_2 projiziert und nennen irgend zwei Strahlen der beiden Bündel, die sich in einem Raumpunkt schneiden, *konjugierte Sehstrahlen.* Je zwei solche Strahlen gehören einer durch $k_1 = k_2 = [O_1 O_2]$ gehenden Kernebene an. Jedem Strahl durch O_1 (O_2) entsprechen demnach ∞^1 konjugierte Strahlen, nämlich die Strahlen des Büschels mit dem Scheitel O_2 (O_1), das in derselben Kernebene liegt. Alle ∞^3 derartigen Zuordnungen bestimmen zugleich die Paare von *konjugierten Strahlen*[21]) einer *ausgearteten Korrelation* zwischen den Bündeln O_1 und O_2. In dieser Korrelation entspricht jedem Strahl des einen Bündels die mit ihm inzidente Kernebene, der Kernachse aber (in beiderlei Sinn) jede Ebene des anderen Bündels und schließlich gehören zu jeder Ebene der beiden (zusammengefallenen) Kernebenenbüschel die ∞^1 in ihr enthaltenen Strahlen des zweiten Bündels.

Nimmt man zwei Bündel konjugierter Sehstrahlen O_1, O_2 aus ihrer ursprünglichen (perspektiven) Lage und bringt man sie in eine andere gegenseitige Lage O_1^0, O_2^0, ohne dabei die frühere Zuordnung konjugierter Strahlen zu verändern, so wird immer noch jeder Strahl beider Bündel von mindestens einem konjugierten Strahl geschnitten. Denn die beiden Kernebenenbüschel bilden jetzt kongruente Ebenenbüschel mit (im allgemeinen) windschiefen Achsen, so daß jeder Punkt auf der Schnittgeraden zweier entsprechenden Ebenen dieser Büschel auch als Schnittpunkt zweier konjugierter Sehstrahlen erhalten wird. Das Erzeugnis dieser Ebenenbüschel ist aber eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades Ω^0 oder eine Ausartungsform einer solchen (Nr. 4). Die Paare konjugierter Strahlen p_1^0, p_2^0 von O_1^0, O_2^0, die sich in den Punkten P^0 von Ω^0 schneiden, entsprechen sich daher in einer quadratischen Verwandtschaft (Satz 3). Überträgt man diese Paare in die ursprüngliche Lage der Bündel, so sind auch diese quadratisch aufeinander bezogen, wobei die Schnittpunkte zugeordneter Strahlen wieder eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades Ω erfüllen. Den Kernebenenbüscheln von O_1^0, O_2^0 mit den Achsen e_1^0, e_2^0 entsprechen näm-

[21]) Enz. Math. Wiss. III A B 5, S. 411.

lich in O_1, O_2 die kongruenten Ebenenbüschel mit den (im allgemeinen) windschiefen Achsen e_1, e_2. Damit sind folgende Ergebnisse gewonnen:

Satz 5: *Wird der Raum aus zwei Zentren O_1 und O_2 projiziert und nennt man je zwei Sehstrahlen p_1, p_2 der beiden Bündel O_1, O_2 konjugiert, die sich in irgendeinem Raumpunkt P schneiden, so gibt es nach jeder gegenseitigen Verlagerung dieser Bündel immer noch ∞^2 Paare konjugierter Strahlen, die sich schneiden. Die Schnittpunkte dieser letzteren Strahlenpaare erfüllen in der neuen und in der ursprünglichen Lage je eine* ***orthogonale Regelfläche zweiten Grades,*** *von der* ***zwei adjungierte Erzeugenden*** *durch die jeweiligen Bündelscheitel gehen.*

Oder kurz gesagt:

Satz 5 *a*: *Zwei starre Bündel konjugierter Sehstrahlen erzeugen in jeder beliebigen gegenseitigen Lage eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades*[22] *der Mannigfaltigkeit* (Ω).

Wird das Bündel O_1^0 festgehalten und das andere in alle ∞^6 möglichen Lagen O_2^0 gebracht, so erhält man nach Obigem ∞^6 quadratische Verwandtschaften zwischen O_1^0 und O_2^0. Zu diesen gehören aber nur ∞^5 quadratische Verwandtschaften zwischen den Bündeln O_1, O_2, weil je ∞^1 Lagen von O_2^0, die durch die Streckungen aus O_1^0 ineinander übergehen, immer dieselbe Verwandtschaft zwischen O_1 und O_2 bestimmen. Da umgekehrt jeder zu O_1, O_2 gehörigen Fläche Ω nach Satz 3 ∞^1 solche Lagen von O_2^0 entsprechen, bestätigt sich damit, daß die Mannigfaltigkeit (Ω) aus ∞^5 Flächen Ω besteht (Nr. 4, letzter Absatz).

Ist nun durch die Punkte einer Raumfigur eine hinreichende (endliche oder unendliche) Anzahl von Paaren zugeordneter Sehstrahlen gegeben und lassen sich die so aufeinander bezogenen Bündelfiguren auf zwei-(oder drei-)mal zwei wesentlich verschiedene Arten orientieren, so kann man sich diese Bündelfiguren in der ersten Orientierung aus zwei perspektiven Bündeln konjugierter Sehstrahlen, in einer zweiten (nicht ergänzenden) Orientierung aus einer anderen gegenseitigen Lage dieser Bündel herausgegriffen denken. Nach Satz 5 gehören dann die

---

[22]) Dies ist eigentlich nur ein Sonderfall des bekannten Satzes von der Erzeugung einer Fläche zweiten Grades durch zwei korrelative Bündel (Enz. Math. Wiss., III C 2 [O. Staude], Nr. 47), denn der Schnittpunkt eines Bündelstrahls mit der entsprechenden Ebene des anderen Bündels kann immer als Schnittpunkt zweier konjugierter Strahlen dieser Korrelation angesehen werden; vgl. Fußn. [21]).

Schnittpunkte zugeordneter Strahlen in beiden Orientierungen je einer orthogonalen Regelfläche zweiten Grades an und dies liefert den

Satz 6: *Die Raumfiguren, deren sämtliche Punkte einer* ***orthogonalen Regelfläche zweiten Grades*** *angehören, von der* ***zwei*** *(oder* ***zweimal zwei) getrennte adjungierte Erzeugenden durch die Projektionszentren gehen,*** *sind die* ***einzigen*** *Raumgebilde, die eine solche Zuordnung zwischen den beiden Sehstrahlbündeln verursachen, daß diese auf zwei (oder drei-) mal zwei wesentlich verschiedene Arten orientierbar sind.*

Aus den Sätzen 4, 6 und 1 ergibt sich nunmehr der

Satz 7: *Lassen sich zwei aufeinander bezogene Sehstrahlbündel in zwei (oder drei) wesentlich verschiedene (nicht ergänzende) orientierte Lagen bringen, so liegen die von den Schnittpunkten zugeordneter Strahlen jeweils erfüllten Raumfiguren auf* ***orthogonalen Regelflächen zweiter Ordnung der Mannigfaltigkeit*** (Ω) *und diese Flächen sind im allgemeinen eineindeutig quadratisch aufeinander abgebildet. Diese Verwandtschaft reduziert sich nur dann auf eine Kollineation, wenn die Raumfiguren eben sind.*

Sind die Bildpaare der Punkte einer Raumfigur gegeben, die einer Fläche Ω angehört, und ist dadurch die quadratische Verwandtschaft zwischen den Sehstrahlbündeln nicht eindeutig (oder überhaupt nicht) bestimmt, so kann es natürlich auch mehr als drei (unendlichviele) wesentlich verschiedene Paare von Orientierungen geben. Hieher gehört z. B. der von E. Kruppa behandelte Fall eines räumlichen Fünfeckes (s. Einleitung). Ermittelt man in diesem Fall für irgendeine orientierte Lage der Sehstrahlbündel die Schnittpunkte der fünf vorhandenen Sehstrahlenpaare und sucht man alle Flächen der Mannigfaltigkeit (Ω), die durch diese fünf Punkte gehen, so erhält man nach den Sätzen 3, 5 und 7 unter den (von E. Kruppa nachgewiesenen) 22 Lösungen alle reellen. Um auch zu den imaginären Lösungen zu gelangen, müßte man in ähnlicher Weise mit jenen besonderen Flächen zweiten Grades Ω (dreiachsigen Ellipsoiden oder zweischaligen Hyperboloiden) operieren, die sich durch imaginäre kongruente Ebenenbüschel (mit imaginären Trägern *erster* Art, weil ja O_1 und O_2 reell sein sollen) erzeugen lassen. Nach obigem würde es dann insgesamt 10 Flächen Ω geben, die durch O_1 O_2 und fünf (allgemein gelegene) Raumpunkte bestimmt sind. Wenn nämlich dabei etwa m orthogonale Flächen Ω (mit ∞^1 reellen Erzeugenden) vorkommen, so sind damit nach Satz 6 in beiden Sehstrahlbündeln je $m+1$ reelle Geraden als Kernachsen wählbar, während die anderen

$10-m$ Flächen Ω (von der letztgenannten Art) in diesen Bündeln bloß auf je eine imaginäre Kernachse führen. Zu jeder dieser reellen und imaginären Kernachsen gehören sodann zwei ergänzende Orientierungen [23].

Man beweist jetzt auch mittels der Sätze 3 und 6 (vgl. Einleitung und Nr. 3, Fußn. [16]) den

Satz 8: *Durch die Bildpaare P', P'' von sechs (oder mehr) Raumpunkten und die inneren Orientierungen der Perspektiven sind die Kernpunkte dann und nur dann* ***eindeutig*** *bestimmt, wenn diese Raumpunkte* ***keiner orthogonalen Fläche zweiten Grades*** *angehören,* ***von der zwei*** *(nicht zusammenfallende)* ***adjungierte Erzeugenden durch die Projektionszentren gehen.***

Weil jede Ebene des Raumes im Verein mit der zu ihr normalen Kernebene eine zu (Ω) gehörige zerfallende Fläche zweiter Ordnung bildet (Nr. 4), sind damit auch alle Fälle gekennzeichnet, bei denen die sechs Punkte auf einer Ebene (insbesondere auf einer Geraden) liegen (vgl. Nr. 2, Satz 1 und Nr. 7, Fall 9) oder etwa auf zwei windschiefen Geraden verteilt sind usw.

Man erkennt zugleich, daß die in Nr. 2 behandelte *Rekonstruktion eines ebenen Objektes bloß einen Sonderfall des Satzes 3 oder 3a* betrifft. Denn die quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$ der beiden Sehstrahlbündel zerfällt in eine perspektive und eine zweifach singuläre Kollineation, wenn die Fläche Ω in eine (beliebige) Ebene und die dazu normale Kernebene zerfällt.

Im Interesse der Genauigkeit wird in der Praxis wohl noch gefordert werden, daß die im Satz 8 genannten Bildpaare auf den beiden Bildfeldern nicht ungünstig verteilt sind.

Nr. 7. Sonderfälle.

Wie in Nr. 4 näher erklärt wurde, gehören zu den orthogonalen Regelflächen zweiten Grades die orthogonalen Hyperboloide, die orthogonalen Paraboloide, die orthogonalen Kegel, die gleichseitig-hyperbolischen Zylinder und die Drehzylinder. Als zerfallende orthogonale Flächen zweiter Ordnung haben wir ferner die Paare normaler Ebenen in Betracht zu ziehen. Hinsichtlich der Lage der (verschieden vorausgesetzten) Zentren O_1 und O_2 auf einer solchen Fläche Ω sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

[23]) Eine nähere Untersuchung dieses Zusammenhanges wäre wohl von einigem Interesse, zumal sich hierbei auch die von E. Kruppa gefundene Anzahl von Lösungen bestätigen müßte.

A) Ω ***ist ein orthogonales Hyperboloid oder Paraboloid*** und

1) O_1 *und* O_2 *sind beliebig gewählte Punkte zweier (windschiefen) adjungierten Erzeugenden* e_1 *bzw.* e_2.

Wird Ω als Hyperboloid vorausgesetzt, so liegt der allgemeine Fall vor. Es gibt neben dem Paar von ergänzenden Orientierungen mit der richtigen Kernachse $k_1 = k_2$ noch ein Paar von Orientierungen mit der Kernachse $e_1^0 = e_2^0$. Um diese letzteren Orientierungen herzustellen, hat man die Ebenen $[e_1 f_1]$ und $[e_1 f_2] = [e_1 k_1]$ mit den Ebenen $[e_2 f_1] = [e_2 k_2]$ bzw. $[e_2 f_2]$ zur Deckung zu bringen. Die Ω nach Satz 4 entsprechenden Flächen sind im allgemeinen ebenfalls orthogonale Hyperboloide, auf denen die Zentren O_1^0, O_2^0 die unter 1) angegegebene Lage haben.

Seien wieder $O_1' \, O_2'$ und $O_1'' \, O_2''$ die zu $O_1 \, O_2$ bzw. $O_1^0 \, O_2^0$ ergänzenden Orientierungen und Ω', Ω'' bzw. Ω und Ω^0 die zugehörigen orthogonalen Regelflächen zweiten Grades (s. Nr. 5). Ist nun eine dieser Flächen, etwa Ω, ein orthogonales Paraboloid, so gilt dies auch für eine Fläche des anderen Paares, z. B. für Ω^0. Um dies einzusehen, beachten wir zunächst, daß die Gemeinlote der Erzeugenden e_1, e_2 und f_1, f_2 in diesem Fall die Scheitelerzeugenden f_s bzw. e_s der beiden Scharen bilden. Die kongruenten Ebenenbüschel mit den adjungierten Erzeugenden e_1, e_2 als Achsen kommen nun zur Deckung, das heißt die Bündel bleiben orientiert, wenn man z. B. das Bündel O_2 an e_s spiegelt[24]). Die e_s normal schneidenden Erzeugenden f_1, f_2 gehen dabei in sich über. Demnach schneiden sich die durch O_1 und O_2 gelegten Parallelebenen zu f_1 und f_2 vor und nach dieser Spiegelung in der Fernerzeugenden e_u bzw. k_u^0 der anderen Schar von Ω bzw. Ω^0 und damit ist die Behauptung erwiesen. Die zu den ergänzenden Orientierungen gehörigen Flächen Ω' und Ω'' sind im allgemeinen orthogonale Hyperboloide, auf welchen die Zentren eine solche Lage haben, daß ihre Symmetrieebene die Fläche berührt (vgl. Nr. 1, Fußnote 9).

Die geraden kubischen Kreise u^0 und v (vgl. Schluß von Nr. 5) zerfallen auf den Paraboloiden Ω und Ω^0 in die Ferngerade k_u^0 bzw. e_u und je eine gleichseitige Hyperbel. Tatsächlich gehen die beiden kongruenten Strahlbüschel, welche die Fernerzeugende f_u der anderen

---

[24]) Nähere Begründungen wurden hier und später im Interesse der Kürze weggelassen. — In allgemeinen Fällen hätte man O_2 um e_s durch einen bestimmten Winkel zu drehen, wie bei anderer Gelegenheit noch gezeigt werden soll.

Schar von Ω aus O_1 und O_2 projizieren, nach der erwähnten Spiegelung in zwei gegensinnig kongruente Büschel über, die der Ebene $[e_1 \| e_2]$ angehören. Die gleichseitige Hyperbel auf Ω^0 enthält die Fernpunkte von e_s und der Achse von Ω. In den ergänzenden Orientierungen erzeugen dieselben Strahlbüschelpaare als zerfallende Kurven v'', u' je einen Kreis und eine ihn schneidende Gerade, die zur Kreisachse parallel ist.

2) O_1, O_2 *sind die Schnittpunkte zweier adjungierten Erzeugenden* e_1, e_2 *mit einer Erzeugenden* f_i *der anderen Schar.*

Hier sind die durch O_1, O_2 gehenden Erzeugenden f_1, f_2 der anderen Schar mit $k_1 = k_2$ zusammengefallen. In der Orientierung mit $e_1^0 = e_2^0$ als Kernachse kommen daher die Ebenen $[e_1 f_i] = [e_1 k_1]$ und $[e_2 f_i] = [e_2 k_2]$ zur Deckung, so daß die neuen Lagen k_1^0, k_2^0 von $k_1 = k_2$ sich schneiden. Man schließt daraus, daß die Flächen Ω^0 und Ω'' im allgemeinen orthogonale Kegel sind. Ist Ω ein Hyperboloid, so könnten k_1^0 und k_2^0 nur dann parallel werden, wenn $\sphericalangle e_1 f_i = \sphericalangle e_2 f_i$, d. h. wenn f_i eine Haupterzeugende wäre (s. Fall 5). Wird jedoch Ω als Paraboloid vorausgesetzt, so ist aus Symmetriegründen $\sphericalangle e_1 f_i$ stets $= \sphericalangle e_2 f_i$ und man zeigt leicht, daß dann einer dieser orthogonalen Kegel, etwa Ω^0, zu einem gleichseitigen hyperbolischen Zylinder wird; auf ihm zerfällt die Kurve v^0 in die Fernerzeugende k_u^0 und eine gleichseitige Hyperbel.

3) O_1, O_2 *sind beliebige Punkte einer (zu sich selbst adjungierten) Haupterzeugenden* $e_1 = e_2$.

In diesem Fall sind die beiden möglichen Paare von Orientierungen zusammengefallen. Man kann daher sagen, daß jetzt die beiden Bündel eine unendlichkleine einparametrige Bewegung gegeneinander ausführen können, bei der die orientierte Lage erhalten bleibt. Diese Art der Unsicherheit der Orientierungsaufgabe bildet ein Seitenstück zu jener, die beim *„räumlichen Rückwärtseinschnitt“* auftritt, wenn der Augpunkt auf dem sogenannten *„gefährlichen Drehzylinder“* [25]) liegt. In der Praxis wird überdies eine e n d l i c h e Beweglichkeit der orientierten Bündel feststellbar sein, *wenn die beiden adjungierten Erzeugenden* e_1 *und* e_2 *(Fall 1)* ***sehr nahe*** *liegen. Dabei braucht die Fläche* Ω *keineswegs auszuarten oder einer Degenerationsform nahe zu kommen.*

4) O_1, O_2 *liegen gleichzeitig auf zwei (zu verschiedenen Scharen gehörigen) Paaren von adjungierten Erzeugenden* e_1 e_2 *und* f_1 f_2.

---

[25]) S. Finsterwalder, a. a. O., S. 28.

Es gibt sodann drei wesentlich verschiedene Paare von Orientierungen. Die vier Erzeugenden e_1, f_1, e_2, f_2 bilden jetzt ein windschiefes Viereck mit paarweise gleichlangen Gegenseiten, denn seine Symmetrieachse ist zugleich die Hauptachse der Kehlellipse des Hyperboloides (oder die Hauptachse des Paraboloides) Ω (vgl. Nr. 4). Weil nun die Dreikante $k_1\, e_1\, f_1$ und $k_2\, e_2\, f_2$ kongruent sind, erkennt man unmittelbar, daß die Zentren bei jeder möglichen Orientierung der Bündel auf der betreffenden Fläche Ω immer wieder die unter 4) angegebene Lage haben. Wäre Ω insbesondere ein Paraboloid, dann hätte das windschiefe Viereck auch die beiden Scheitelerzeugenden zu Symmetrieachsen. Im übrigen gilt für jede mögliche Kernachse das Gleiche wie im Fall 1).

5) *O_1, O_2 sind die Schnittpunkte zweier adjungierten Erzeugenden e_1, e_2 mit einer (zu sich selbst adjungierten) Haupterzeugenden f_s der anderen Schar.*

Hier ist der Mittelpunkt der Strecke $O_1\, O_2$ bereits ein (der) Scheitel von Ω. Im übrigen liegt wegen $k_1 = k_2 = f_s$ und $\sphericalangle\, e_1 f_s = \sphericalangle\, e_2\, f_s$ ein Sonderfall von 2), 3) und 4) vor. Von den drei Paaren von Orientierungen fallen demnach zwei zusammen, so daß wieder eine unendlich kleine einparametrige Beweglichkeit der orientierten Bündel vorhanden ist, während das dritte Paar zur Kernachse $e_1'' = e_2^0$ gehört. Als entsprechende Flächen Ω^0 und Ω'' ergeben sich im allgemeinen ein orthogonaler Kegel und ein Drehzylinder. Ersterer wird insbesondere zu einem gleichseitigen hyperbolischen Zylinder, wenn Ω ein Paraboloid ist. Dabei zerfallen die Kurven v^0 und v'' auf Ω^0 und Ω'' in eine gleichseitige Hyperbel und eine Ferngerade bzw. in einen Kreis und eine Gerade, die ihn schneidet und zur Kreisebene normal ist.

B) Ω ist ein orthogonaler Kegel, ein gleichseitig-hyperbolischer Zylinder oder ein Drehzylinder und

6) *O_1, O_2 liegen auf zwei getrennten adjungierten Erzeugenden e_1, e_2.*

Bei den orthogonalen Kegeln und Zylindern sind die beiden Scharen (e_i) und (f_i) zusammengefallen. Im vorliegenden Fall gibt es wieder zwei Paare von orientierten Lagen mit der Kernachse $k_1 = k_2$ und $e_1^0 = e_2^0$. Für einen orthogonalen Kegel Ω sind die zum zweiten Paar gehörigen Flächen Ω^0 und Ω'' im allgemeinen orthogonale Hyperboloide, auf denen die Lage der Zentren dem Fall 2) entspricht. Einem hyperbolischen Zylinder Ω entspricht aber als Fläche Ω^0

(oder Ω'') ein Paraboloid (s. Fall 2), wobei v^0 wieder in eine Ferngerade und eine gleichseitige Hyperbel zerfällt.

Besonders einfache Beziehungen liegen vor, wenn Ω als Drehzylinder angenommen wird. Projiziert man nämlich einen solchen aus zwei Zentren, die nicht der selben Erzeugenden angehören, so ergeben sich quadratisch verwandte Bündel, die auch in orientierte Lage kommen, wenn man das eine, etwa O_1, festhält, das andere, O_2, mit dem Zylinder starr verbindet und diesen so in sich verschiebt, daß O_2 auf die durch O_1 gehende Erzeugende fällt. Die zur neuen Lage gehörige Fläche Ω^0 (oder Ω'') ist sodann im allgemeinen ein orthogonales Hyperboloid, auf dem die Zentren die unter 5) angegebene Lage haben. Die ergänzende Orientierung zur ursprünglichen Lage liefert als Fläche Ω' im allgemeinen einen orthogonalen Kegel. Liegen aber O_1 und O_2 auf demselben Parallelkreis von Ω, so ist Ω^0 ein Paraboloid (s. Fall 5) und Ω' ein gleichseitiger hyperbolischer Zylinder.

7) *O_1 (oder O_2) fällt in den Scheitel des Kegels oder Zylinders.*

Bei dieser Annahme ist die quadratische Verwandtschaft zwischen den Bündeln O_1, O_2 ausgeartet, da alle Punkte des Kegels (Zylinders) in einem der Bilder in die Punkte eines Kegelschnittes projiziert werden.

C) Ω ist ein orthogonaler Kegel oder ein Drehzylinder und

8) *O_1, O_2 liegen auf einer zu sich selbst adjungierten Erzeugenden $e_1 = e_2$.*

In diesem Fall rücken wieder je zwei mögliche Orientierungen zusammen, so daß die richtige Orientierung — wie unter 3) und 5) — mit einer Unsicherheit behaftet ist[26]). Es gibt aber keine andere Orientierung der Bündel.

[26]) Der einfachste Sonderfall davon wurde von R. Finsterwalder (Hannover) in den Abhandlungen „Der gefährliche Zylinder beim Normalfall der räumlichen Doppelpunkteinschaltung", Zeitschr. f. Vermessungswesen 67 (**1938**), S. 433—441, und „Der gefährliche Ort der photogrammetrischen Hauptaufgabe und seine Bedeutung besonders bei der Auswertung von Luftaufnahmen im Gebirge", Bildmessung und Luftbildwesen 13 (**1938**), S. 103—109, eingehend behandelt. Hierzu sei ergänzend bemerkt, daß in diesem Fall (s. oben unter C 8) das „verbogene" Gelände (in der unendlich benachbarten Nebenlösung) *nur die Form eines orthogonalen Hyperboloides* annehmen kann (weil ja der Fall C 8 des Textes durch Spezialisierung aus dem Fall B 6 hervorgeht). Auch in seiner „Photogrammetrie", Berlin **1939**, S. 126—128, hat R. Finsterwalder diesen Sonderfall aufgenommen.

Ferner hat E. Gotthardt in dem Aufsatz „Der gefährliche Ort bei der photogrammetrischen Hauptaufgabe", Zeitschr. f. Vermessungswesen 68 (**1939**), S. 297—304, mittels gewisser Differentialformeln die (allgemeine) Gleichung des

D) Ω ist eine Ebene ε und

9) *O_1, O_2 haben gegenüber ε allgemeine Lage.*

Fügt man der Ebene ε die durch O_1 und O_2 gehende Normalebene $\bar{\varepsilon}$ hinzu, so bilden ε und $\bar{\varepsilon}$ eine zerfallende orthogonale Regelfläche zweiter Ordnung der Mannigfaltigkeit (Ω), denn die durch O_1

„gefährlichen Ortes" mit zusammenfallenden Lösungen der Orientierungsaufgabe (es handelt sich also um die oben unter 3, 5, 8 und 10 besprochenen Sonderfälle) berechnet und die Lage der Projektionszentren auf ihm im wesentlichen wie oben gekennzeichnet. Daß es sich aber um orthogonale Hyperboloide (mit der Halbachsenrelation $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$ usw.) handelt, hat er indessen nicht herausgefunden. Ebenso fehlt auch bei ihm jede Andeutung über die geometrischen Zusammenhänge, wie sie hier dargelegt wurden. Er zitiert aber eine Mitteilung von E. C. P. Poivilliers (Paris) im Internat. Archiv f. Photogrammetrie VIII, 2. Teil (1937), S. 244—246, und scheint zu glauben, daß dort ebenfalls nur Teillösungen der von ihm behandelten Aufgabe berücksichtigt seien. Dies wäre jedoch dahin richtig zu stellen, daß der Genannte überhaupt keinen der besonderen „gefährlichen" Örter erwähnt, die durch Gotthardts Gleichung darstellbar sind. Poivilliers hat vielmehr bereits (und zwar bezeichnenderweise so wie oben auf *synthetischem* Wege) erkannt, daß die Orientierungsaufgabe auch eine von der richtigen Lösung (nach unserer Ausdrucksweise) wesentlich verschiedene Nebenlösung haben kann, nämlich dann, wenn die Geländefläche die Form von gewissen Flächen zweiten Grades annimmt. Aber auch hier fehlt jede nähere Darlegung der geometrischen Eigenschaften dieser Flächen, ihrer Lage gegenüber den Projektionszentren sowie die nähere Untersuchung der Punktverwandtschaft $\mathfrak{P}$ (s. oben Nr. 5) zwischen der aufgenommenen Geländefläche und ihrer „Verbiegung" (richtig gesagt: ihrer „geometrischen Verformung") durch die Rekonstruktion im Zuge dieser Nebenlösung usw. Im besonderen fehlt hier auch die Erkenntnis, *1. daß es auch noch eine* **zweite** *derartige Nebenlösung geben kann, 2. daß für jedes Standpunktepaar O_1, O_2 ∞^5 solche Flächen möglich sind,* und vor allem 3. der Nachweis, *daß damit bereits die* **allgemeinsten** *„gefährlichen Örter" der photogrammetrischen Hauptaufgabe gefunden sind.*

Schließlich sei noch die Arbeit von H. Jung (Clausthal), Zeitschr. f. Vermessungswesen 69 (**1940**), S. 113—124, erwähnt, in der die oben unter 3, 5, 8 und 10 behandelten Sonderfälle ähnlich wie bei Gotthardt, a. a. O., abgeleitet, aber in den Ergebnissen etwas ausführlicher besprochen werden. Zu dieser erst vor kurzem erschienenen Arbeit sei noch folgendes gesagt: 1. Die in der Einleitung ausgesprochene Frage nach *„anderen Möglichkeiten für gefährliche Orte"* wurde durch obige Untersuchungen jedenfalls *bereits restlos beantwortet.* 2. Die auf S. 113 ausgesprochene Vermutung, daß die Mitten der zur Kernachse normalen Schnittkreise eines „gefährlichen" Ortes eine Raumkurve erfüllen könnten, bestätigt sich keineswegs, *denn diese Mittelpunkte liegen stets auf einer Geraden, nämlich auf der Polaren zur Ferngeraden dieser Kreisschnittebenen.* 3. Bei den Bemerkungen über das Vermeiden der *„gefährlichen Kurven"* (S. 121 f.) wäre zu bedenken, *daß durch jede solche Kurve* (im allgemeinen) ∞^1 *orthogonale Regelflächen zweiten Grades gelegt werden können, die alle ebenfalls solche „gefährliche Örter" bilden.*

bzw. O_2 gehenden und zu ε symmetrischen Geraden e_1, e_2 sind Träger kongruenter Ebenenbüschel, die ε und $\bar{\varepsilon}$ erzeugen (Nr. 4 und Schluß von Nr. 6). Es gibt also zwei (wesentlich verschiedene) Paare von Orientierungen mit den Kernachsen $[O_1\ O_2] = k_1 = k_2$ und $\overset{0}{e_1} = \overset{0}{e_2}$ (s. wieder Nr. 2).

10) $k_1 = k_2 = [O_1\ O_2]$ *ist normal zu* ε.

In diesem Fall sind die beiden Paare von Orientierungen zusammengefallen (vgl. Nr. 2), so daß die Orientierung wie in den Fällen 3), 5) und 8) eine gewisse Unsicherheit aufweist. Wären die Zentren O_1, O_2 insbesondere zu ε symmetrisch, dann könnten die (jetzt kongruenten) Sehstrahlbündel auf ∞^2 (wesentlich verschiedene) Arten in orientierte Lage gebracht werden (vgl. wieder Nr. 2).

Die trivialen Fälle von Ebenen ε, die O_1 oder O_2 enthalten, sollen nicht näher besprochen werden.

Nr. 8. Schlußbemerkungen.

Aus den vorangegangenen Darlegungen ergibt sich für die praktische Anwendung vor allem folgendes: *Jede Geländefläche, die im abgebildeten Bereich mit einem Stück* von *einer der* ∞^5 *Flächen der Mannigfaltigkeit* (Ω) (annähernd) *übereinstimmt*, verursacht eine solche Zuordnung (quadratische Verwandtschaft) zwischen den beiden Sehstrahlbündeln, *daß deren gegenseitige Orientierung* aus den Bildpaaren *von beliebig vielen Geländepunkten* ***nicht eindeutig*** *festgestellt werden kann* (Satz 3). Hiezu kommt noch, daß die Schnittpunkte zugeordneter Strahlen bei den zwei oder drei möglichen Orientierungen Raumobjekte liefern, die untereinander nicht ähnlich, ja im allgemeinen (vgl. jedoch Satz 1) nicht einmal kollinear sind (Satz 4).

Wird nun die orientierte Lage zweier Aufnahmen, deren innere Orientierungen bekannt sind, mit Hilfe einer *Orientierungsmaschine* hergestellt, so läßt sich aus solchen Bildern allein nicht erkennen, welche der zwei oder drei allenfalls vorhandenen Lösungen der richtigen räumlichen Lage entspricht. *Denn nähert sich die Einpassung einer der möglichen Nebenlösungen*, so wird die Schnittgenauigkeit zugeordneter Strahlen *ebenso ständig verbessert* wie beim Einpassen der richtigen Lösung. Die sonst übliche Kontrolle mittels zahlreicher Bildpaare $P'\ P''$ versagt somit in einem derartigen Fall vollständig.

In diesem Sinne stellen die ∞^5 Flächen der Mannigfaltigkeit (Ω) **„gefährliche Örter“**, man könnte auch sagen **„gefährliche Geländeformen“** dar, deren Kenntnis für die photogrammetrische Praxis

— besonders bei der Auswertung von Luftaufnahmen eines gebirgigen Geländes — von einiger Wichtigkeit sein dürfte. Weiters werden die in Nr. 7, unter 3), 5) und 8) besprochenen Fälle der **unsicheren Einstellung** der richtigen Orientierung besondere Beachtung verdienen[27]).

Weil jede Ebene des Raumes als Teil einer zerfallenden Fläche der Mannigfaltigkeit (Ω) zu gelten hat (Nr. 7, Fall 10), können wir überdies feststellen: *Je flacher ein Gelände ist, desto eher wird es* (innerhalb des betrachteten Bereiches) *durch eine der orthogonalen Regelflächen Ω approximierbar sein.* In solchen Fällen wird sich aber — ähnlich wie bei der Rekonstruktion von ebenen Objekten (Nr. 2) — aus der Kenntnis der ungefähren Flugbahn bei Reihenaufnahmen die richtige Auswahl unter den theoretisch möglichen Lösungen treffen lassen.

Für die übrigen oben besprochenen Fälle gilt dies jedoch keineswegs, und zwar deshalb nicht, *weil die allenfalls vorhandenen Nebenlösungen von der richtigen Orientierung **beliebig wenig** verschieden sein können.* Dies ist nämlich der Fall, *wenn O_1 und O_2 auf zwei adjungierten Erzeugenden liegen, die beide in der Nähe einer Haupterzeugenden verlaufen* (vgl. Nr. 7, Fall 3, 5, 8 oder 10). Wie in einem solchen für die Praxis *besonders „gefährlichen“* Fall die richtige Orientierung zweckmäßig gefunden werden kann, bleibt noch dahingestellt.

Für eine rohe Abschätzung können wir aber mit Rücksicht auf den Satz 6 und den Schluß von Nr. 1 jedenfalls folgendes feststellen:

Sind in den Aufnahmen Geländeformen abgebildet (z. B. solche mit elliptischen Flächenpunkten), die offensichtlich keiner Fläche der Mannigfaltigkeit (Ω) *angehören, so ist die Orientierung der Aufnahmen eindeutig bestimmt.*

Man kann auch noch sagen (vgl. Satz 5 und 6):

Ist bei einer Rekonstruktion eine Geländeform erhalten worden, die keiner Fläche zweiten Grades angehört (auf der beide Projektionszentren liegen usw.), dann gibt es nur diese eine Lösung und keine andere Orientierung der beiden Sehstrahlbündel.

---

[27]) Das große Interesse der Praktiker an den „gefährlichen Örtern“ kommt bereits durch die zahlreichen, in letzter Zeit erschienenen Veröffentlichungen über die erwähnten Sonderfälle (s. Fußnote [26]) deutlich zum Ausdruck.

(Eingegangen: 14. X. 1940.)