Bemerkungen zu einer allgemeinen Ungleichung für Kurven.

Von **Hans Hornich** in Wien.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1] habe ich gezeigt, daß die Menge aller Punkte der Ebene, welche von einer in dieser Ebene gelegenen Kurve C mit der Länge L einen Abstand $\leqq d$ ($d > 0$) haben, einen Flächeninhalt $\leqq \pi d^2 + 2 L d$ hat; das Gleichheitszeichen kann hiebei nur dann stehen, wenn C stetig differenzierbar ist und jeder Kreis durch drei Punkte von C einen Radius $\geqq d$ hat. Weiter wurde gezeigt, daß diese Bedingungen, falls die Endpunkte der Kurve einen Abstand $\geqq 2\,d$ haben, auch hinreichend dafür sind, daß das Gleichheitszeichen besteht. Hier sollen nun einige Erweiterungen dieser Sätze gezeigt werden.

Verallgemeinerung auf Kurven eines R_n.

In einem R_n ist das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit dem Radius d gegeben durch:

$$V_n(d) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\, d^n.$$

Eine einfache Übertragung der Schlüsse der zitierten Arbeit ergibt für die Kurven des R_n mit den Koordinaten $x_1 \ldots x_n$:

Es sei C eine rektifizierbare Kurve der Länge L im R_n, etwa von der Form $x_i = x_i(s)$ $(i = 1, \ldots n)$, wo die $x_i(s)$ stetige Funktionen der Bogenlänge s als Parameter seien $(0 \leqq s \leqq L)$. Dann ist für die Menge aller Punkte des R_n, die von C einen Abstand $\leqq d$ haben (d beliebige Zahl > 0), der n-dimensionale Inhalt

$$\leqq L V_{n-1}(d) + V_n(d) = L \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}\, d^{n-1} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\, d^n$$

Dafür, daß hiebei das Gleichheitszeichen steht, sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend: 1. die Funktionen $x_i(s)$ sind

[1]) Monatsh. für Math. und Phys. 47, 432—438.

stetig differenzierbar; 2. jeder Kreis durch drei Punkte[2]) *von C hat einen Radius* $\geqq d$; *3. die Punkte* $s=0$ *und* $s=L$ *der Kurve haben einen Abstand* $\geqq 2d$.

Ist endlich C eine *geschlossene Kurve*, d. h. ist unter den nämlichen Voraussetzungen über C wie oben: $x_i(0)=x_i(L)$ $(i=1,\ldots n)$, so ist für die Menge aller Punkte des R_n, die von C einen Abstand $\leqq d$ haben, der n-dimensionale Inhalt:

$$\leqq L V_{n-1}(d)=L\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}d^{n-1}.$$

Dafür, daß hiebei das Gleichheitszeichen steht, sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend: 1. die Funktionen $x_i(s)$ sind stetig differenzierbar; 2. jeder Kreis durch drei Punkte von C hat einen Radius $\geqq d$.

Schließlich zeigen wir noch, daß die Eigenschaft 2 für sich schon die Eigenschaft 1 nach sich zieht, woraus sich eine entsprechende Vereinfachung der obigen Sätze ergibt. Es gilt:

Ein Kontinuum C des R_n sei so beschaffen, daß alle Kreise, welche drei Punkte von C enthalten, einen Radius $\geqq d$ haben $(d>0)$. Dann ist C das topologische Bild entweder eines Kreises oder einer Strecke und ist stetig differenzierbar.

Nach unserer Voraussetzung enthält jeder Kreis des R_n mit einem Radius $<d$ höchstens zwei Punkte von C; dann enthält jede zweidimensionale Kugelfläche mit einem Radius $<d$ ebenfalls höchstens zwei Punkte von C: denn irgend drei Punkte einer solchen Kugelfläche liegen auf einem Kreis und jeder Kreis auf einer solchen Fläche hat einen Radius $<d$. Analog schließt man weiter, daß jede k-dimensionale Kugel $(k\leqq n-1)$ mit einem Radius $<d$ höchstens zwei Punkte aus C enthalten kann.

Da nun die n-1-dimensionalen Kugeln des R_n die Begrenzungen der n-dimensionalen Kugeln darstellen, so folgt aus dem obigen sofort, daß das Kontinuum C eindimensional, also eine Kurve sein muß und weiter, daß jeder Punkt dieser Kurve in einer sich auf ihn zusammenziehenden Folge von Kugeln liegt, deren Begrenzungen höchstens zwei Punkte von C enthalten; die Kurve C hat also in jedem ihrer Punkte die Ordnung 1 oder 2; nach bekannten Sätzen[3]) ist dann C entweder ein topologischer Kreis oder eine topologische Strecke.

[2]) Dabei sollen Punkte mit verschiedenen s stets als verschieden gelten.

[3]) Vgl. Menger, Kurventheorie 1932, S. 267.

Wir haben also nur noch die stetige Differenzierbarkeit von C nachzuweisen. Das gelingt ohneweiters mit Hilfe der in der früheren Arbeit entwickelten Methode. Sei C zunächst eine topologische Strecke. Seien ferner $P_1\ P_2\ P_3$ drei Punkte dieser Kurve, so daß P_2 zwischen P_1 und P_3 liegt; mit $a_1\ a_2\ a_3$ bezeichnen wir die Seiten, mit $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$ die Winkel des Dreiecks $P_1\ P_2\ P_3$. Betrachten wir die so gebildeten Dreiecke, so wird wegen der (gleichmäßigen) Stetigkeit der auftretenden Funktionen mit $a_2 \to 0$ auch a_1 und $a_3 \to 0$ streben und zwar gleichmäßig, genauer: für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß für jedes Punktepaar $P_1\ P_3$ aus C mit $\overline{P_1\ P_3} = a_2 < \delta(\varepsilon)$ und für jeden Punkt P_2 zwischen P_1 und P_3 auch $\overline{P_1 P_2} = a_3 < \varepsilon$ und $\overline{P_2 P_3} = a_1 < \varepsilon$ gilt.

Legen wir durch $P_1\ P_2\ P_3$ einen Kreis (der auch in eine Gerade ausarten kann), so ist dessen Radius nach Voraussetzung $\geqq d$, also:

$$R = \frac{a_i}{2 \sin \varphi_i} \geqq d \quad \text{oder}$$

$$a_i \geqq 2\, d \sin \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{*}$$

Wir halbieren die Strecke $P_1\ P_3$ und legen um den Halbierungspunkt als Zentrum eine n-dimensionale Kugel mit dem Radius $\frac{a_2}{2}$, deren Oberfläche daher durch P_1 und P_3 geht. Ist nun $a_2 < 2\, d$, so darf nach Voraussetzung außer P_1 und P_3 kein weiterer Punkt auf der Kugeloberfläche liegen. Es muß daher dann der P_2 enthaltende Kurvenbogen von C entweder ganz im Innern oder ganz im Äußern der Kugel liegen. Wir zeigen, daß für hinreichend kleine $a_2 = \overline{P_1\ P_3}$ der Kurvenbogen zwischen P_1 und P_3 stets im Innern der Kugel liegt. Es genügt dazu offenbar, dies von einem Punkt dieses Bogens zu zeigen, und zwar zeigen wir dies für einen zwischen P_1 und P_3 gelegenen Punkt von C, welcher von P_1 und P_3 gleichen Abstand hat. Nennen wir diesen Punkt für den Augenblick P_2, so ist mit Anwendung der früheren Bezeichnungsweise hier $a_1 = a_3$ und $\varphi_1 = \varphi_3$ und $2\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$. Für hinreichend kleines a_2 ist nun auch a_1 und a_3 beliebig klein; nach den Ungleichungen (*) ist dann auch $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_3$ beliebig klein. Da nun $2\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ ist, muß endlich für hinreichend kleines a_2 auch $\varphi_1 = \varphi_3$ beliebig klein werden. Ist nun a_2 so klein gewählt, daß $\varphi_1 = \varphi_3 < \frac{\pi}{4}$ ausfällt, so kann P_2 nicht außerhalb eines Halbkreises um $P_1\ P_3$, also außerhalb der oben definierten Kugel liegen, da ja sonst $\varphi_2 < \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_1 = \varphi_3 > \frac{\pi}{4}$ sein müßte. Also liegt für hinreichend kleine $a_2 = \overline{P_1 P_3}$ der Punkt P_2 und damit der ganze Kurvenbogen zwischen P_1 und P_3 innerhalb der Kugel um $P_1 P_3$ als Durchmesser.

Damit ist weiter gezeigt, daß für hinreichend kleine $a_2 = \overline{P_1 P_3}$ und für beliebige Punkte P_2 zwischen P_1 und P_3 der Winkel φ_2 beliebig nahe an π liegen muß, während φ_1 und φ_3 beliebig klein werden: denn durch Wahl eines hinreichend kleinen a_2 werden auch a_1 und a_3 beliebig klein und wegen (*) können auch die $\sin \varphi_i$ für alle i beliebig klein gemacht werden; weil für hinreichend kleine a_2 auch P_2 innerhalb der Kugel mit $P_1 P_3$ als Durchmesser liegt, muß $\varphi_2 > \frac{\pi}{2}$ sein, also φ_2 beliebig nahe an π und φ_1 und φ_3 beliebig klein sein. Daraus folgt aber, genau wie in der zitierten Arbeit ohneweiters die stetige Differenzierbarkeit von C.

Ist schließlich C ein topologischer Kreis, so können wir auf jeden aus C herausgegriffenen Bogen die vorstehenden Überlegungen anwenden, woraus sofort die stetige Differenzierbarkeit auch in diesem Falle folgt. Damit ist auch der angekündigte Satz vollständig bewiesen. Im Zusammenhang mit den früheren Resultaten folgt dann sofort auch, daß die Menge der Punkte des R_n, die von C einen Abstand $\leq \delta$ haben, das n-dimensionale Volumen: $L\, V_{n-1}(\delta) + V_n(\delta)$ oder $L\, V_{n-1}(\delta)$ hat, je nachdem C eine topologische Strecke oder ein topologischer Kreis ist; dabei bedeutet L die Länge von C und δ eine beliebige positive Zahl $\leq d$, welche im Fall, daß C eine topologische Strecke ist, noch $\leq$ der Hälfte des Abstandes von Anfangs- und Endpunkt von C sein soll.

(Eingegangen: 4. X. 1939.)