Der Aufbau von Perioden arithmetischer Reihen als Grundlage topologischer Erfahrungssätze Simony's

Von

Dr. Ernst Müller

(Mit 1 Textfigur)

Im folgenden soll eine Periodizitätseigenschaft arithmetischer Reihen in bezug auf gegebene Moduln entwickelt werden, die in anderer Gestalt zum Teile von E. B. Christoffel[1] formuliert ist und sodann von O. Simony[2] als Erfahrungstatsache bei Transformation von Torusknoten unabhängig entdeckt wurde.

Seien a, b zwei positive, ganze, teilerfremde Zahlen und sei ferner $r_n \equiv n\, b \pmod{a}$, $0 \leqq r_n < a$. Dieselben Reste sollen zur Unterscheidung von im folgenden aus denselben ausgewählten Restgruppen auch mit dem oberen Index 1 versehen werden. Ferner seien $r^1_{l_1}, r^1_{l_2} \ldots$ diejenigen dieser Reste in natürlicher Reihenfolge $(l_{\varkappa^1} < l_{\varkappa^1+1})$, für welche $r^1_{l_{\varkappa^1}} > r^1_{l_{\varkappa^1+1}}$, während sonst immer $r^1_i < r^1_{i+1}$. Dann soll jede Zahlengruppe $\left\{r^1_{l_{\varkappa^1}+1}, r^1_{l_{\varkappa^1}+2} \ldots r^1_{l_{\varkappa^1+1}}\right\}$, innerhalb deren also irgendein $r^1_{l_i+1} = r^1_{l_i} + b$, als »Umlauf erster Ordnung« bezeichnet werden. Die Gliederzahl eines solchen ist offenbar $= k_1 + 1$ oder $= k_1$, je nachdem das erste Glied $r^1_{l_{\varkappa^1}+1} <$ oder $\geqq s_1$,

[1] Siehe dessen Abhandlungen: »Observatio arithmetica« (lateinisch geschrieben), 1874 und »Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen«, 1888 (in Christoffel's »Gesammelten mathematischen Abhandlungen«). Der Verfasser wurde erst nach Formulierung seiner Lösung des gleichen Problems, welche die Aufstellungen Simony's erklären sollte, durch Herrn Prof. Dr. Heinrich Tietze in Erlangen auf die Arbeiten Christoffel's aufmerksam gemacht.

[2] Siehe dessen Abhandlungen: »Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze«, II. Teil (im 87. Bande der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, Wien 1883), sowie: »Über eine Reihe neuer Tatsachen aus dem Gebiete der Topologie« (Math. Annalen, Bd. 24, 1883) und ergänzend Teile I und III der »Mathematischen Erfahrungssätze« (Sitzungsberichte Wien, Bd. 85, 1882; 88, 1883), sowie »Neue Tatsachen auf dem Gebiete der Topologie« (Math. Annalen, Bd. 19, 1882).

wobei k_1 und s_1 durch: $a = k_1 b + s_1$, $s_1 < b$ bestimmt sind. Im ersteren Fall sei der Umlauf als »gesteigert« ($\overline{U}_1$), im zweiten als »normal« (U_1) bezeichnet. Der erste Umlauf, dargestellt durch die Zahlengruppe $\{0, b, 2b \ldots k_1 b\}$ ist ein gesteigerter. Im allgemeinen Symbol überschreiten die Reste r^1 nicht die Grenzen des Intervalls 0 bis a.

Es handelt sich im folgenden um die Gesetzmäßigkeit in der Aufeinanderfolge der zweierlei Umlaufstypen.[3] Diese steht in Zusammenhang mit der Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{a}{b} = k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{k_z}}},$$

beziehungsweise dem Euklid'schen Algorithmus:

$$\begin{aligned} a &= k_1 b + s_1, \\ b &= k_2 s_1 + s_2, \\ s_1 &= k_3 s_2 + s_3, \\ &\ddots \\ s_i &= k_{i+2} s_{i+1} + s_{i+2} \\ &\ddots \\ s_{z-3} &= k_{z-1} s_{z-2} + 1; \\ s_{z-2} &= k_z. \end{aligned}$$

Nun sei die Gesamtheit eines gesteigerten und aller eventuell unmittelbar nachfolgenden normalen Umläufe erster Ordnung als »Umlauf zweiter Ordnung« definiert. Ein solcher kann symbolisch durch die Anfangsglieder der ihn zusammensetzenden Umläufe erster Ordnung bezeichnet werden, in der Form:

$$\left\{r^2_{l_{\varkappa^2}}, r^2_{l_{\varkappa^2}+1}, \ldots r^2_{l_{\varkappa^2+1}-1}\right\},$$

wobei etwa

$$r^1_{l_{\varkappa^1}+1} = r^2_{l_{\varkappa^2}},\ r^1_{l_{\varkappa^1}+i+1} = r^2_{l_{\varkappa^2}+(i-1)}$$

und das Anfangsglied des nächsten gesteigerten Umlaufs erster Ordnung $= r^2_{l_{\varkappa^2}+1}$ gesetzt wird. Ersichtlicherweise nun ist in obigem Symbole $r^2_{l_{\varkappa^2}+1} = r^2_{l_{\varkappa^2}} + b - s_1$, beziehungsweise allgemein $r^2_{l_{\varkappa^2}+i} = r^2_{l_{\varkappa^2}} + b - i s_1$, daher die Gliederzahl $= k_2$ oder $k_2 + 1$, je nachdem $r^2_{l_{\varkappa^2}} + b - k_2 s_1$, d. i. $r^2_{l_{\varkappa^2}} + s_2 <$ oder $\geqq s_1$, oder, anders ge-

[3] Von Christoffel als »Charakteristik« bezeichnet. Derselbe Begriff wird von ihm in erweitertem Sinne zur vollständigen Beschreibung von Irrationalzahlen verwendet.

schrieben: $r^2_{l_{\varkappa^2}} <$ oder $\geqq s_1 - s_2$. Im ersteren Falle sei der Umlauf zweiter Ordnung als »normal« (U_2), im zweiten als »gesteigert« $(\overline{U}_2)$ bezeichnet. Der erste Umlauf zweiter Ordnung, dargestellt durch das Symbol: $\{0, b-s_1, b-2s_1 \ldots b-(k_2-1)s_1\}$ ist ein normaler. Im allgemeinen Symbol ist für jedes $i > 0$ $r^2_{l_{\varkappa^2}+i} > r^2_{l_{\varkappa^2}+i+1}$ und nur $r^2_{l_{\varkappa^2}} < r^2_{l_{\varkappa^2+1}-1}$, also a fortiori kleiner als jedes andere $r^2_{l_{\varkappa^2}+i}$. Sämtliche Reste r^2 fallen in ein Intervall $< b$ und sind daher durch Reste $< b$ darstellbar.

Es wird nun der »Umlauf dritter Ordnung« definiert als die Gesamtheit eines gesteigerten und aller eventuell unmittelbar vorangehenden normalen Umläufe zweiter Ordnung. Ein solcher kann symbolisch durch die Anfangsglieder dieser Umläufe zweiter Ordnung bezeichnet werden in der Form:

$$\left\{r^3_{l_{\varkappa^3}+1}, r^3_{l_{\varkappa^3}+2}, \ldots r^3_{l_{\varkappa^3+1}}\right\},$$

wobei etwa

$$r^2_{l_{\varkappa^2}} = r^3_{l_{\varkappa^3}+1}, \; r^2_{l_{\varkappa^2}+i} = r^3_{l_{\varkappa^3}+(i+1)},$$

und das Anfangsglied des dem nächsten gesteigerten unmittelbar vorhergehenden normalen Umlaufs zweiter Ordnung $= r^3_{l_{\varkappa^3+1}}$ (beziehungsweise das des folgenden gesteigerten Umlaufs zweiter Ordnung $= r^3_{l_{\varkappa^3+1}+1}$) gesetzt wird. In obigem Symbole ist nun ersichtlicherweise $r^3_{l_{\varkappa^3}+i} = r^3_{l_{\varkappa^3}+(i-1)} + s_3$, daher die Gliederzahl des Symbols $= k_3 + 1$ oder $= k_3$, je nachdem $r^3_{l_{\varkappa^3}+1} + k_3 s_2 <$ oder $\geqq s_1$, d. h. je nachdem $r^3_{l_{\varkappa^3}+1} <$ oder $\geqq s_3$. Im ersteren Falle wird der Umlauf dritter Ordnung als »gesteigert« $(\overline{U}_3)$, im zweiten als »normal« (U_3) bezeichnet. Der erste Umlauf dritter Ordnung, dargestellt durch das Symbol $\{0, s_2, 2s_2, \ldots k_3 s_2\}$ ist ein gesteigerter. Im allgemeinen Symbol, wo $r^3_{l_{\varkappa^3}} > r^3_{l_{\varkappa^3}+1}$ und sonst irgend ein $r^3_{l_{\varkappa^3}+i} < r^3_{l_{\varkappa^3}+i+1}$, fallen sämtliche Reste r^3 in ein Intervall $< s_1$ und sind daher durch Reste $< s_1$ darstellbar.

Die Umläufe dritter Ordnung entsprechen nun völlig jenen erster Ordnung, sofern die Reste r^1 durch die r^3 ersetzt werden, beziehungsweise der Algorithmus mit $s_1 = k_3 s_2 + s_3$ begonnen wird.

Infolgedessen führt die Fortsetzung des gleichen Verfahrens, durch welches die Umlaufstypen zweiter und dritter Ordnung aus denen der ersten Ordnung hergeleitet wurden, von selbst zur Definition von Umlaufstypen beliebig hoher Ordnungszahl, welche sich in bezug auf die Art der Folge der dieselben zusammensetzenden Umläufe nächstniedrigerer Ordnung zugleich mit dem

Charakter der ersten Umläufe von Stufe zu Stufe umkehrt Symbolisch lassen sich die Umläufe ungerader, beziehungsweise gerader Ordnungszahl in der Form schreiben:

$$\left\{r^{2n+1}_{l_{\varkappa\,2n+1}+1},\ r^{2n+1}_{l_{\varkappa\,2n+1}+2},\ \ldots.\, r^{2n+1}_{l_{\varkappa 2n+1}+1}\right\},$$

beziehungsweise

$$\left\{r^{2n}_{l_{\varkappa\,2n}},\ r^{2n}_{l_{\varkappa\,2n+1}},\ \ldots.\, r^{2n}_{l_{\varkappa\,2n+1}-1}\right\}.$$

Die ersteren sind »gesteigert« oder »normal« ($\overline{U}_{2n+1}$, U_{2n+1}), d. h. von der Gliederzahl $k_{2n+1}+1$ oder k_{2n+1}, je nachdem das erste Glied $r^{2n+1}_{l_{\varkappa\,2n+1}+1} <$ oder $\geqq s_{2n+1}$. Die letzteren sind »normal« oder »gesteigert« (U_{2n}, $\overline{U}_{2n}$), d. h. von der Gliederzahl k_{2n} oder $k_{2n}+1$, je nachdem das erste Glied $r^{2n}_{l_{\varkappa\,2n}} <$ oder $\geqq s_{2n-1}-s_{2n}$. Der erste Umlauf ungerader Ordnungszahl, dargestellt durch das Symbol $\{0,\ s_{2n},\ 2\,s_{2n}, \ldots k_{2n+1}\, s_{2n}\}$ ist ein gesteigerter, der erste Umlauf gerader Ordnungszahl, dargestellt durch das Symbol $\{0,\ s_{2n-2}-{}$ ${}-s_{2n-1},\ s_{2n-2}-2\,s_{2n-1} \ldots s_{2n-2}-(k_{2n}-1)\,s_{2n-1}\}$, ein normaler. Die Reste innerhalb eines Symbols fallen in Intervalle $< s_{2n-1}$, beziehungsweise $< s_{2n-2}$. Was den Abschluß des ganzen Systems der Umläufe betrifft, so wird derselbe durch einen einzigen Umlauf der Ordnung z gebildet, der, wenn man periodische Wiederholung derselben Reste ausschließt, das ganze Restsystem mod a umfasst und die Periode der in sich zurücklaufenden arithmetischen Reihe darstellt. Dieser Umlauf, kurz mit $U(a, b)$ bezeichnet, ist stets vom normalen Typus, was im Falle eines geradzahligen z selbstverständlich ist, für ein ungeradzahliges z jedoch daraus folgt, daß im Symbol dieses Umlaufs: $\{0, 1, 2, \ldots. k_z\}\ k_z \equiv 0 \pmod{s_{z-2}}$ ist und somit, weil bereits auf die triviale Wiederholung der Periode zählend, zu entfallen hat.

Die dargestellte Zusammenfassung der Reste zu einem System von Umläufen läßt sich nun auch in dual entgegengesetzter Weise vollziehen, indem für die Benennung der Reste die Bedingung $r_n \leqq a$ vorgeschrieben wird. Dann wird zunächst der erste Umlauf erster Ordnung durch Wegnahme des ersten Gliedes aus einem gesteigerten in einen normalen verwandelt und diese Umkehrung bewirkt im ganzen stufenförmigen Aufbau des Systems eine Umkehrung in Definition und Gesamtcharakteristik der zweierlei Umlaufstypen, beziehungsweise eine Vertauschung derselben in bezug auf die geraden und ungeraden Ordnungszahlen.

Der Verdeutlichung möge noch eine schematische Übersicht dieser Verhältnisse dienen.

Wird allgemein der gesteigerte Umlauf der n-ten Ordnung mit $\overline{U}_n$, der normale mit U_n, die ganze Periode kurz mit U

bezeichnet, werden ferner im Sinne Christoffel's auch die einzelnen Reihenglieder insofern unterschieden, als deren beide Typen U_0 und $\overline{U}_0$ durch die Ungleichungen $U_0 + b < a$, $\overline{U}_0 + b > a$[4] definiert werden, so ergibt sich folgendes zweifache Formelsystem:[5]

$$
\begin{array}{cc}
A. & B. \\
\overline{U}_1 = U_0^{k_1}\,\overline{U}_0 & U_1 = U_0^{k_1-1}\,\overline{U}_0 \\
U_1 = U_0^{k_1-1}\,\overline{U}_0 & \overline{U}_1 = U_0^{k_1}\,\overline{U}_0 \\
\hline
U_2 = \overline{U}_1\,U_1^{k_2-1} & \overline{U}_2 = U_1^{k_2}\,\overline{U}_1 \\
\overline{U}_2 = \overline{U}_1\,U_1^{k_2} & U_2 = U_1^{k_2-1}\,\overline{U}_1 \\
\hline
\overline{U}_3 = U_2^{k_3}\,\overline{U}_2 & U_3 = \overline{U}_2\,U_2^{k_3-1} \\
U_3 = U_2^{k_3-1}\,\overline{U}_2 & \overline{U}_3 = \overline{U}_2\,U_2^{k_3} \\
\ddots & \ddots \\
U_{2n} = \overline{U}_{2n-1}\,U_{2n-1}^{k_{2n}-1} & \overline{U}_{2n} = U_{2n-1}^{k_{2n}}\,\overline{U}_{2n-1} \\
\overline{U}_{2n} = \overline{U}_{2n-1}\,U_{2n-1}^{k_{2n}} & U_{2n} = U_{2n-1}^{k_{2n}-1}\,\overline{U}_{2n-1} \\
\hline
\overline{U}_{2n+1} = U_{2n}^{k_{2n+1}}\,\overline{U}_{2n} & U_{2n+1} = \overline{U}_{2n}\,U_{2n}^{k_{2n-1}-1} \\
U_{2n+1} = U_{2n}^{k_{2n+1}-1}\,\overline{U}_{2n} & \overline{U}_{2n+1} = \overline{U}_{2n}\,U_{2n}^{k_{2n+1}} \\
\ddots & \ddots
\end{array}
$$

$$\text{für } z = 2\sigma \rightarrow U = U_z = \overline{U}_{z-1}\,U_{z-1}^{k_z-1} \leftarrow \text{für } z = 2\sigma+1$$

$$\text{für } z = 2\sigma+1 \rightarrow U = U_z = U_{z-1}^{k_z-1}\,\overline{U}_{z-1} \leftarrow \text{für } z = 2\sigma$$

Durch entsprechende Zerlegungen der einzelnen Umlaufstypen im zweiten Formelsystem erhält man unschwer im Wege des Induktionsschlusses die allgemeine Christoffel'sche Formel: $U_n = c_1\,c_2\ldots c_{n-2}\,\gamma_{n-1}\,\gamma_{n-2}\ldots\gamma_1\,\gamma\,c\,d$ nebst der parallelen Formel: $\overline{U}_n = c_1\,c_2\ldots c_{n-2}\,c_{n-1}\,\gamma_{n-1}\,\gamma_{n-2}\ldots\gamma_1\,\gamma\,c\,d$, unter Berücksichtigung der folgenden Umbenennungen und Definitionen: $U_0 = c$, $\overline{U}_0 = d$, $c^{k_1-1} = \gamma$, $c^{k_1-1}\,d = c_1$, $c^{k_1}\,d = d_1$, $c_n^{k_{n+1}-1} = \gamma_n$, $c_n^{k_{n+1}-1}\,d_n = c_{n+1}$, $c_n^{k_{n+1}}\,d_n = d_{n+1}$.

Bestimmte Spezialisierungen der Umlaufssysteme entsprechen bestimmten Spezialfällen des ihnen zugrundeliegenden Kettenbruchs. So ergibt zunächst der Fall, wo sämtliche $k_n = 1$ sind und der bekanntlich die Näherungsbrüche des goldenen Schnittes darstellt, gewisse Elementarformen der Umlaufssysteme. Im allgemeinen folgen, wenn irgend ein $k_n = 1$ ist, mehrere Umläufe der höheren Gliederzahl unmittelbar aufeinander, während diejenigen der geringeren Gliederzahl isoliert auftreten, was eine neue Dualität in der Auffassung der Umläufe ermöglicht. Ist z. B. $k_r = 1$, so lassen sich

[4] Durch $x+b = a$ wird im Sinne der ersten Entwicklungsweise ein $\overline{U}_0$, im Sinne der zweiten ein U_0 definiert.

[5] Hiebei dient das Symbol der (nicht kommutativen) Multiplikation wie bei Simony und Christoffel nur zur Bezeichnung der Aneinanderreihung von Gliedern, beziehungsweise Umläufen.

unter Überspringung der r-ten Stufe im bisherigen Sinne, nach unverändertem Aufbau der niedrigeren Stufen, $\overline{U}_{r+1}$ und U_{r+1} in der Form angeben:

$$\overline{U}_{r+1} = \overline{U}'_r = \overline{U}^{k'_r}_{r-1}\, U_{r-1}, \quad U_{r+1} = U'_r = \overline{U}^{k'_r-1}_{r-1}\, U_{r-1},$$

beziehungsweise

$$U_{r+1} = U'_r = U_{r-1}\, \overline{U}^{k'_r-1}_{r-1}, \quad \overline{U}_{r+1} = \overline{U}'_r = U_{r-1}\, \overline{U}^{k'_r}_{r-1},$$

wobei $k_{r+1}+1 = k'_r$ gesetzt ist.

Nun hat derjenige Kettenbruch, für welchen im gewöhnlichen Sinne

$$U''_r = U^{k'_r-1}_{r-1}\, \overline{U}_{r-1}, \quad \overline{U}''_r = U^{k'_r}_{r-1}\, \overline{U}_{r-1},$$

beziehungsweise

$$\overline{U}''_r = \overline{U}_{r-1}\, U^{k'_r}_{r-1}, \quad U''_r = \overline{U}_{r-1}\, U^{k'_r-1}_{r-1}$$

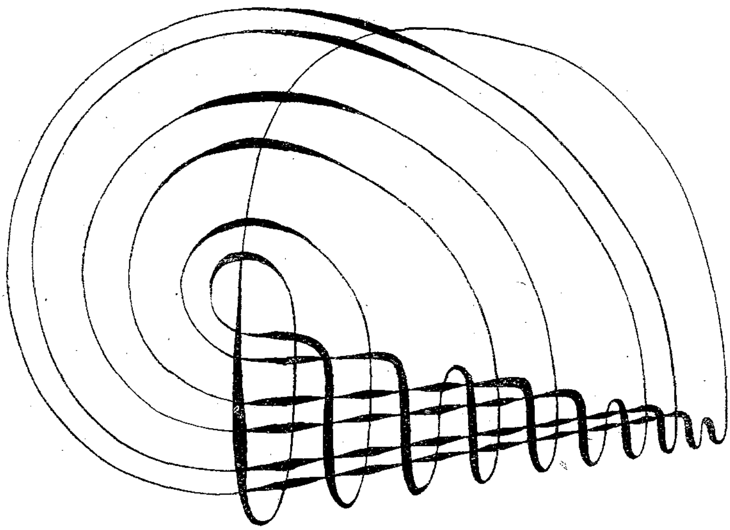
wäre, offenbar $k'_r = k_{r+1}+1$ zum r-ten Teilquotienten, unterscheidet sich also, bei Gleichheit der sonstigen Entwicklung, von dem ursprünglichen Kettenbruch bloß durch Kontraktion der aufeinanderfolgenden Teilnenner 1 und k_{n+1}, infolgedessen im ganzen der Restbruch $\frac{s_{r-2}}{s_{r-1}}$, durch den Restbruch $\frac{s_{r-1}-s_{r-2}}{s_{r-1}}$ ersetzt erscheint. So hat also der auf die Einheit komplementäre Charakter zweier Restbrüche nach identisch verlaufender Teilentwicklung die Umkehrung der beiden Umlaufstypen zur Folge.[6]

Eine anschauliche Interpretation erfahren die entwickelten arithmetischen Tatsachen durch Sternvielecke, welche ja genau das geometrische Abbild auf einen Modul bezogener arithmetischer Reihen bilden. Und zwar erscheint zunächst irgend ein Anfangspunkt für die Abgrenzung der einzelnen Umläufe erster Ordnung bestimmend, während die Umläufe höherer Ordnungszahlen nur aus einer bestimmten Art der Zusammenfassung jener entspringen, welche geometrisch auch damit zusammenhängt, wie die den Resten der algorithmischen Entwicklung entsprechenden Restbogen beim Aufbau der Sternvielecke in oszillierender Folge rechts und links vom Anfangspunkte zum erstenmale auftreten.

Nun läßt sich ein Sternvieleck immer auch als Projektion einer doppelpunktfreien Kurve auf einer Torusfläche auffassen, welch letztere die Ebene des Sternvielecks in dessen Um- und

6 Dieser Zusammenhang erscheint auch bei Simony, und zwar topologisch formuliert, siehe dessen »Mathematische Erfahrungssätze«, II, p. 10, und »Über eine Reihe neuer Tatsachen auf dem Gebiete der Topologie«, II, p. 266.

Inkreis durchsetzt — und zwar in zweifacher Weise, je nach dem Drehungscharakter der die Kurve zusammensetzenden Windungen. Jede dieser Windungen entspricht dem Übergang von einem Gliede zum andern in der zugrunde gelegten Zahlenperiode, beziehungsweise einer Sternvielecksehne. Man kann dieselben als »Querumläufe« (»Meridiankurven«) von den »Längsumläufen« (»Breitenkurven«) unterscheiden, welch letztere je einen »Umlauf erster Ordnung« in sich einschließen. Die dem gegebenen Bruche $\frac{a}{b}$ entsprechende Toruskurve kann topologisch charakterisiert werden



durch a Längs- und b Querumläufe. Desgleichen kommt durch b Längs- und a Querumläufe gleichen Sinnes eine Kurve zustande, welche durch Spiegelung mit der ursprünglichen homöomorph wird. Eine solche Kurve stellt im ganzen ein verknotetes Gebilde dar, indem, etwa nach der ersten Auffassung, die Querumläufe aus verschiedenen Längsumläufen einander in bestimmter Weise zwangsläufig umwinden.

Nun läßt sich nach dem Vorgang Simony's ein solches, von ihm als »Knotenverbindung« bezeichnetes Gebilde immer derart transformieren, daß in der Folge des unmittelbaren Anschlusses irgend einer der Längsumläufe bloß von den ihm vorhergehenden umwunden wird und alle folgenden umwindet. In einer derartigen Transformation, wie sie z. B. in noch etwas einfacherer Form als bei Simony durch beistehende Figur (für $a = 10$, $b = 7$) dargestellt ist,[7] erscheint das ganze Gebilde in bestimmter Weise in eine Folge von immer dünneren »Knoten« aufgelöst, innerhalb deren

[7] Siehe hiezu auch die Figurentafeln der Simony'schen Abhandlungen.

die für dieselben charakteristischen »Windungszahlen« genau durch die Gliederanzahlen der aufeinanderfolgenden Umläufe erster Ordnung gegeben sind, so daß an dem so transformierten Gebilde die dargestellte Gesetzmäßigkeit direkt gestaltlich in Erscheinung tritt.[8]

---

[8] Simony hat diese an den Knotengebilden abgelesene Gesetzmäßigkeit in der Form von zwei »Typengleichungen« dargestellt, welche sich, im Zusammenhange mit der Dualität der Fälle $k_n = 1$ und $k_n > 1$, durch Vergleich mit elementareren Gebilden, die ihrerseits auf Gebilde niedrigerer Ordnung zurückführen, als Rekursionsformeln charakterisieren. Eine Darstellung dieser Formeln findet sich in den zitierten Abhandlungen (siehe Anmerkung 2). Die Herleitung der beiden Typengleichungen aus dem hier entwickelten Formelsystem vollzieht sich in einfacher Weise; nur ist hiebei zu beachten, daß Simony zur Charakterisierung der Knotenverbindung nur die Windungszahlen der »Knoten« zählt, weshalb jedesmal die Gliederzahl des letzten Umlaufs erster Ordnung, welcher im Sinne der Transformation nur leer laufende Windungen enthält, in diesen Formeln auszufallen hat.