Sur la dimension de l'espace et l'extension des fonctions continues.

Par **G. Popruženko** (Varsovie).

Le but principal de ce travail est d'établir la généralisation suivante d'un théorème que j'ai publié dans le v. XV des Fundamenta Mathematicae[1]):

Théorème. *Pour qu'un espace métrique séparable E soit de dimension $\leq n$, il faut et il suffit qu'il existe pour tout ensemble fermé $P \subset E$ et pour toute fonction réelle continue $f(p)$, définie sur cet ensemble, une fonction $\Phi(p)$ définie dans l'espace E entier, continue en tous les points de E, sauf aux points d'un ensemble de dimension $\leq n-1$, et telle que*

$$\Phi(p) = f(p), \tag{1}$$

pour $p \in P$, et

$$\Phi(E) = f(P)\,^{2)}. \tag{2}$$

Dem. I. *La nécessité.* Tout espace séparable étant, d'après un théorème de M. Hurewicz[3]), homéomorphe à un ensemble d'un espace compact de même dimension, nous pouvons évidemment supposer dès le début que l'on a: $E \subset M$, M étant un espace métrique compact de dimension $\leq n$ convenablement construit[4]).

L'ensemble $P \subset E$ étant fermé relativement à E, on a: $P = \overline{P}E$, ce qui donne: $E - P \subset M - \overline{P}$. Posons:

---

[1]) *Sur une propriété des espaces 0-dimensionnels,* p. 219.

[2]) Nous désignons par $g(Z)$ l'ensemble des valeurs de la fonction $g(p)$ où $p \in Z$.

[3]) V. p. ex. K. Menger. *Dimensionstheorie,* 1928, p. 280.

[4]) Pour $n \geq 1$ on peut même supposer, selon un théorème des M. M. Stepanoff et Tumarkin, que M est un continu jordanien au plus n-dimensionnel (v. Fund. Math. XII, p. 46).

$$(3) \qquad M - \overline{P} = \Delta$$

— on a donc:

$$(4) \qquad E - P \subset \Delta.$$

Δ étant ouvert dans un espace compact, il existe, comme il est facile de vérifier, une décomposition

$$(5) \qquad \Delta = \sum_{k=1}^{\infty} F_k,$$

où F_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés et compacts possédant les propriétés suivantes:

1°. $\lim\limits_{k \to \infty} d(F_k) = 0$, *$d(F_k)$ désignant le diamètre de F_k.*

2°. *F étant un ensemble fermé $\subset \Delta$, il n'existe qu'un nombre fini (dépendant de F) d'ensembles F_k tels que $F_k F \neq 0$.*

3°. *Les ensembles $F_i F_j$ $(i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots;\ i \neq j)$ sont au plus $(n-1)$-dimensionnels.*

4°. *Tout produit de $n+2$ ensembles de la suite $\{F_k\}$ est vide*[5]).

Soit p un point de Δ. Désignons par

$$(6) \qquad F_{k_1(p)},\ F_{k_2(p)},\ \ldots,\ F_{k_m(p)}$$

tous les ensembles distincts de la suite $\{F_k\}$ contenant le point p: d'après (5) et 4° on a toujours $1 \leq m \leq n+1$. Notons encore une propriété de la décomposition (5) relative aux ensembles (6).

5°. *Soit p_0 un point de l'ensemble $P\overline{\Delta}$, $\varepsilon > 0$ un nombre donné. Il existe un nombre $\delta = \delta(p_0) > 0$ tel que les relations $p \in \Delta$ et $\rho(p_0, p) < \delta$ entraînent: $F_{k_l(p)} \subset U(p_0, \varepsilon)$ pour tout ensemble de (6).*

En effet, soit k_0 un nombre naturel tel que $d(F_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k > k_0$: l'existence d'un tel nombre résulte de 1°. Posons

$$F = \sum_{k=1}^{k=k_0} F_k.$$

L'ensemble F étant fermé et compact, la distance $\rho(p_0, F)$ est (d'après (3) et (5)) positive. Posons:

---

[5]) On obtient cette construction par l'application itérée du *Zerlegungssatz* de M. Menger (*Dimensionstheorie,* p. 156) aux ensembles Δ_ν définis comme il suit: $\Delta_\nu = \mathop{\mathrm{E}}\limits_{p} \left[\rho(p, \overline{P}) \geq \frac{1}{\nu}\right]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

$$\delta = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho(p_0, \ F) \right\}.$$

On voit sans peine que le nombre δ ainsi défini satisfait aux conditions de 5°.

Ceci posé, définissons dans la classe d'ensembles $F_k (k = 1, 2, \ldots)$ une fonction d'ensemble $\psi(F_k)$ faisant correspondre à tout ensemble F_k un point bien déterminé de l'ensemble P.

Les ensembles $F_k (k = 1, 2, \ldots)$ et $\overline{P}$ étant fermés et compacts, on a d'après (3) et (5):

(7) $$\rho(F_k, \overline{P}) = \alpha_k > 0;$$

il existe en outre pour tout k naturel un point $q_k \in \overline{P}$ tel que

(8) $$\rho(F_k, \overline{P}) = \rho(F_k, q_k) = \alpha_k.$$

Soit

(9) $$q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$$

la suite de tous les points ainsi déterminés, et soit

(10) $$r_1, r_2, \ldots, r_l, \ldots$$

une suite de points de l'ensemble P dense dans P.

Posons

(11) $$\psi(F_k) = q_k,$$

si $q_k \in P$. Si $q_k \in \overline{P} - P$, désignons par r_{l_k} le premier terme de la suite (10) remplissant la relation

(12) $$\rho(q_k, r_{l_k}) < \alpha_k$$

et posons

(13) $$\psi(F_k) = r_{l_k}.$$

Les formules (11) et (13) définissent ainsi une fonction d'ensemble $\psi(F_k)$ remplissant toujours la relation

(14) $$\psi(F_k) \in P \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Passons maintenant à la définition de la fonction cherchée. Soit p un point de l'ensemble E. Posons

$$(15) \qquad \Phi(p) = f(p),$$

si $p \in P$. Si $p \in E - P$, on a d'après (4): $p \in \Delta$. Posons dans ce cas

$$(16) \quad \Phi(p) = Max\left\{f\left[\psi(F_{k_1(p)})\right], f\left[\psi(F_{k_2(p)})\right], \ldots, f\left[\psi(F_{k_m(p)})\right]\right\}.$$

Le membre droit de (16) étant en vertu de (6) et (14) bien déterminé, on voit que la fonction $\Phi(p)$ est définie par (15) et (16) pour tout $p \in E$. Je dis que cette fonction satisfait aux conditions de notre théorème.

En premier lieu, il résulte de la définition même de la fonction $\Phi(p)$ que les relations (1) et (2) sont remplies.

Quant à la nature des singularités de $\Phi(p)$, nous devons, pour les étudier de plus près, effectuer une décomposition auxiliaire de l'ensemble Δ. Posons:

$$(17) \qquad H_k = F_k - \left(\sum_{t=1}^{t=k-1} F_t + \sum_{t=k+1}^{\infty} F_t\right),$$

$$(18) \qquad U = \sum_{k=1}^{\infty} H_k,$$

et

$$(19) \qquad V = \sum_{i,j} F_i F_j \; (i = 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, \ldots; \; i \neq j).$$

On voit sans peine que l'on a:

$$(20) \qquad H_k H_{k'} = 0 \;\; (k \neq k'),$$

$$(21) \qquad U + V = \Delta,$$

et

$$(22) \qquad UV = 0.$$

Je dis en outre que les ensembles H_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sont ouverts.

En effet, supposons que pour un k naturel donné l'ensemble H_k n'est pas vide. Soit p un point de H_k. Le point p appartenant à Δ, on déduit sans peine des propriétés 2° et 4° qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ et un voisinage sphérique $U(p, \alpha) \subset \Delta$ tel que la relation $F_t \,.\, U(p, \alpha) = 0$ a lieu pour tout ensemble F_t différent de ceux de la suite (6). Or, en vertu de (17) cette suite se réduit pour le point $p \in H_k$ à un seul ensemble F_k. Il en résulte:

$$U(p, \alpha) \subset \Delta,$$

$$U(p, \alpha) \,.\, \left(\sum_{t=1}^{t=k-1} F_t + \sum_{t=k+1}^{\infty} F_t \right) = 0,$$

ce qui donne:

$$U(p, \alpha) \subset \Delta - \left(\sum_{t=1}^{t=k-1} F_t + \sum_{t=k+1}^{\infty} F_t \right) = H_k.$$

Le point p est donc intérieur à l'ensemble H_k; or, ce point étant arbitrairement choisi, cela prouve que l'ensemble H_k est ouvert.

Considérons maintenant l'ensemble E. On a d'après (4) et (21):

$$(23) \qquad E = P + (E-P) = P + (E-P)\,U + (E-P)\,V,$$

où les ensembles P, $(E-P)\,U$ et $(E-P)\,V$ sont d'après (22) disjoints.

Soit $p_0 \in (E-P)\,U$: il existe en vertu de (18) et (20) un indice k_0 bien déterminé tel que $p_0 \in H_{k_0}$. La suite (6) se réduisant pour tout point p de H_{k_0} à un seul ensemble F_{k_0}, on a d'après (16):

$$\Phi(p) = f\,[\psi(F_{k_0})] = const.$$

pour $p \in (E-P)\,H_{k_0}$, ce qui montre en vertu de (18), (20) et (22), les ensembles H_k étant ouverts, que la fonction $\Phi(p)$ est continue au point p_0 sur l'ensemble $E-P$. Il en résulte d'après la relation $PH_{k_0} = 0$ que la fonction $\Phi(p)$ (définie pour $p \in E$) est continue au point p_0.

Soit maintenant $p_0 \in P$. Pour démontrer que la fonction $\Phi(p)$ est continue au point p_0, il suffit (d'après la continuité de $f(p)$ sur P et la relation (15)) de démontrer qu'elle est continue au point p_0 sur l'ensemble $(E-P) + (p_0)$. Nous pouvons par conséquent supposer que p_0 est un point d'accumulation de l'ensemble $E-P$, donc à plus forte raison [d'après (4)] de l'ensemble Δ.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre donné. La fonction $f(p)$ étant continue sur P, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que la relation

$$(24) \qquad p \in P \,.\, U(p_0, \eta)$$

entraîne:

(25) $$|f(p)-f(p_0)| < \varepsilon.$$

Or, il résulte de la propriété 5° qu'il existe pour le nombre $\frac{\eta}{3}$ un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout point q remplissant la relation

(26) $$q \in (E-P) \cdot U(p_0, \delta)$$

on a:

(27) $$F_s \subset U\left(p_0, \frac{\eta}{3}\right) \quad \left(s = k_1(q), k_2(q), \ldots, k_m(q)\right).$$

Les formules (7)—(13) donnent donc:

(28) $$\psi(F_s) \in U(p_0, \eta) \quad \left(s = k_1(q), k_2(q), \ldots, k_m(q)\right),$$

et, d'après (14), (24), (25) et (28):

$$\left| f\left[\psi(F_s)\right] - f(p_0) \right| < \varepsilon \left(s = k_1(q), k_2(q), \ldots, k_m(q)\right),$$

d'où il s'en suit, d'après (15) et (16), que

(29) $$|\Phi(q) - \Phi(p_0)| < \varepsilon.$$

L'inégalité (29) étant vraie pour tout q satisfaisant à (26), on voit que la fonction $\Phi(p)$ est continue au point p_0.

Tous les points de discontinuité de la fonction $\Phi(p)$ sont donc contenus, d'après (23), dans l'ensemble $(E-P)\,V \subset V$. Or, l'ensemble V est en vertu de 3° et (19) une somme dénombrable d'ensembles au plus $(n-1)$-dimensionnels fermés: il est donc lui-même au plus $(n-1)$-dimensionnel. L'ensemble de tous les points de discontinuité de $\Phi(p)$, qui est contenu dans V, l'est donc à plus forte raison.

La première partie de notre théorème est ainsi démontrée.

II. *La suffisance.* Soit E un espace métrique séparable satisfaisant aux conditions du théorème, p_0 un point arbitraire de E, et soit $\varepsilon > 0$ un nombre donné, suffisamment petit pour que l'ensemble

$$\underset{p}{\mathsf{E}}\left[\rho(p, p_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] = Q,$$

où p désigne le point variable de E, ne soit pas vide.

Posons

$$P = \overline{U\left(p_0, \frac{\varepsilon}{4}\right)} + Q. \tag{30}$$

L'ensemble P défini par (30) est évidemment fermé.

Définissons sur P une fonction continue $f(p)$ par les conditions suivantes:

$$f(p) = 1, \text{ si } p \in \overline{U\left(p_0, \frac{\varepsilon}{4}\right)}, \tag{31}$$

$$f(p) = 0, \text{ si } p \in Q. \tag{32}$$

Soit maintenant $\Phi(p)$ une fonction satisfaisant aux conditions de notre théorème. Considérons les ensembles

$$E_1 = \underset{p}{\mathsf{E}}\,[\Phi(p) = 1] \tag{33}$$

et

$$E_2 = \underset{p}{\mathsf{E}}\,[\Phi(p) = 0]. \tag{34}$$

D'après (31)—(34), (1) et (2) on a:

$$E_1 + E_2 = E, \quad E_1 E_2 = 0, \tag{35}$$

$$\overline{U\left(p_0, \frac{\varepsilon}{4}\right)} \subset E_1, \tag{36}$$

et

$$Q \subset E_2. \tag{37}$$

Désignons par $J(Z)$ l'intérieur, par $F(Z)$ la frontière d'un ensemble quelconque Z. D'après (35) on a: $F(E_1) = F(E_2)$, ce qui donne:

$$E = J(E_1) + F(E_1) + J(E_2), \tag{38}$$

les termes de cette somme étant disjoints. Or, l'ensemble $F(E_1)$ ayant la forme $F(E_1) = E_1 E_2' + E_2 E_1'$, on en conclut d'après (33), (34) et (38) que cet ensemble est identique à l'ensemble de tous les points de discontinuité de la fonction $\Phi(p)$; il est donc, en vertu de notre supposition, au plus (n—1)-dimensionnel. D'autre part on a d'après (37): $E_1 \subset U\left(p_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, ce qui donne

$$\overline{E}_1 \subset U(p_0, \varepsilon). \tag{39}$$

Posons

$$G = J(E_1). \tag{40}$$

L'ensemble ouvert G n'est pas vide, car il contient d'après (36) le voisinage $U\left(p_0, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ du point p_0. En vertu de l'égalité connue $\overline{E}_1 = J(E_1) + F(E_1)$, la frontière $F(G)$ de G remplit la relation $F(G) \subset F(E_1)$, d'où il résulte, d'après ce qui précède, que l'ensemble $F(G)$ est au plus (n—1)-dimensionnel. On a en outre (d'après (39) et (40)): $\overline{G} \subset U(p_0, \varepsilon)$. Or, le nombre ε et le point p_0 étant arbitrairement choisis, on en conclut que l'espace E est de dimension $\leq n$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Remarquons que ce théorème nous permet d'introduire une définition de la dimension de l'espace ne dépendant que des propriétés des fonctions continues définies dans l'espace considéré.

En effet:

Nous dirons que l'espace métrique séparable E est de dimension 0, s'il existe pour tout ensemble fermé $P \subset E$ et pour toute fonction réelle continue $f(p)$, définie sur P, une fonction continue $\Phi(p)$ définie dans l'espace entier et satisfaisant aux conditions (1) et (2).

En s'appuyant sur cette définition, on établit les définitions correspondantes pour $n \geq 1$ par récurrence:

L'espace métrique séparable E est de dimension $\leq n$, s'il existe pour tout ensemble fermé $P \subset E$ et pour toute fonction réelle continue $f(p)$, définie sur P, une fonction $\Phi(p)$ définie pour tout $p \in E$, remplissant les relations (1) et (2) et telle que l'ensemble de ses points de discontinuité est de dimension $\leq n-1$.

Je dis que ces définitions sont équivalentes aux définitions correspondantes de M. Menger.

En effet, il résulte de notre théorème que l'équivalence a lieu pour $n = 0$; il en résulte de plus que l'on peut appliquer l'induction finie qui établit le même résultat pour tout n naturel.

Revenons à la première partie de notre théorème.

Je dis que la fonction $\Phi(p)$ définie par (15) et (16) est semi-continue supérieurement.

En effet, la fonction $\Phi(p)$ étant continue en tout point de l'ensemble $P+(E-P)U$, il suffit d'après (23) de démontrer qu'elle est semi-continue supérieurement en tout point de l'ensemble $(E-P)V$.

Soit donc $p \in (E-P)V$. Le point p appartenant d'après (5) et (19) à Δ, il existe, comme nous l'avons déjà vu, un voisinage $U(p) \subset \Delta$ tel que tout ensemble F_k remplissant la relation $U(p) \cdot F_k \neq 0$ se trouve parmi des termes de la suite (6). Il en résulte que pour tout point q tel que

$$(41) \qquad q \in (E-P) \cdot U(p) = E \cdot U(p)$$

la suite $F_{k_1(q)}, F_{k_2(q)}, \ldots, F_{k_m(q)}$ n'est qu'une suite extraite de (6).

D'après (16) on a donc:

$$(42) \quad \Phi(q) = Max \left\{ f\left[\psi(F_{k_1(q)})\right], f\left[\psi(F_{k_2(q)})\right], \ldots, f\left[\psi(F_{k_m(q)})\right] \right\} \leq$$

$$\leq Max \left\{ f\left[\psi(F_{k_1(p)})\right], f\left[\psi(F_{k_2(p)})\right], \ldots, f\left[\psi(F_{k_m(p)})\right] \right\} = \Phi(p).$$

L'inégalité (42) étant vraie pour tout q remplissant (41), la fonction $\Phi(p)$ est semi-continue supérieurement au point p.

Pareillement, si l'on pose au lieu de (16):

$$(16a) \quad \Phi(p) = min \left\{ f\left[\psi(F_{k_1(p)})\right], f\left[\psi(F_{k_2(p)})\right], \ldots, f\left[\psi(F_{k_m(p)})\right] \right\},$$

on obtient une fonction semi-continue inférieurement sur E.

En résumé, nous pouvons énoncer le suivant **Théorème d'extension** pour les fonctions continues:

Soit E un espace métrique séparable de dimension $\leq n$, $P \subset E$ un ensemble fermé, $f(p)$ une fonction réelle continue, définie sur P.

Il existe deux fonctions: la fonction $\Phi_1(p)$ semi-continue supérieurement et la fonction $\Phi_2(p)$ semi-continue inférieurement, continues (sur E) en tout point de P, remplissant les relations (1) et (2) et telles que l'ensemble de points de discontinuité de chacune d'elles est au plus $(n-1)$-dimensionnel.

D'après un théorème connu[6]) de la théorie des fonctions réelles, toute fonction continue, définie sur un ensemble fermé P d'un espace (métrique) quelconque E, peut être prolongée d'une façon continue de l'ensemble P à l'espace E entier: c'est-à-dire, étant donnée une fonction continue $f(p)$, définie sur P, il existe une fonction continue $\Phi(p)$ définie pour tout $p \in E$ et satisfaisant à la condition (1). Si l'on ajoute la condition (2) et si l'on ne considère que des espaces séparables, la solution complète du problème est donnée par le théorème ci-dessus: *les fonctions semi-continues $\Phi_1(p)$ et $\Phi_2(p)$ ne sont continues sans restriction que dans le cas, et dans ce cas seulement, où l'espace E est 0-dimensionnel.*

---

[6]) V. p. ex. H. Hahn, *Theorie d. reellen Funktionen*, 1921, p. 140, Théorème X; C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 1927, p. 620.

(Eingegangen: 29. IX. 1930.)