Herstellung von Lösungen gemischter Randwertprobleme bei hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Zusammenstückelung aus Lösungen einfacherer gemischter Randwertaufgaben.

Von **A. Rubinowicz**, Czernowitz.

I.

Bei den Problemen, die die Physik der Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung stellt, handelt es sich häufig darum, in einem vorgegebenen dreidimensionalen Gebiete der x, y, z eine Funktion herzustellen, die zu einer Zeit t_0 einem vorgegebenen Anfangszustande und zugleich an den Begrenzungen des Gebietes gewissen Randbedingungen entspricht. Solche Probleme bezeichnet man mit gutem Grunde als gemischte Randwertaufgaben. Betrachtet man nämlich den ganzen Vorgang in einem vierdimensionalen Gebiete der x, y, z, t, dessen Begrenzung durch den Zeitpunkt t_0 und die Gestalt des gegebenen dreidimensionalen Gebietes bestimmt wird, so hat man eine Funktion aufzusuchen, die auf zwei verschiedenen Teilen der (dreidimensionalen) Berandung dieses vierdimensionalen Gebietes zwei wesentlich verschiedenen Randbedingungen genügt: Der Anfangszustand wird nämlich durch zwei, die Grenzbedingung aber, die der auf den Flächen des dreidimensionalen Raumes vorgeschriebenen Randbedingung entspricht, nur durch eine einzige Funktion bestimmt. (Cauchysche und Dirichletsche Randbedingungen.)

Der mit geringen Ausnahmen (z. B. d'Alembertsche Behandlung des Problems der begrenzten, schwingenden Saite) bei den hyperbolischen Differentialgleichungen zur Lösung der gemischten Randwertaufgaben eingeschlagene Weg besteht in der Entwicklung der Lösung in Funktionalreihen, wobei hyperbolische Differentialgleichungen auf elliptische zurückgeführt werden. Eine besonders wichtige Klasse solcher Entwicklungen, nämlich die nach Eigenfunktionen, konnte dabei unter Zuhilfenahme der Theorie der Integralgleichungen völlig streng und systematisch aufgebaut werden. Der mathematische Haupterfolg dieser Methode besteht in einem völlig strengen und sehr allgemeinen Existenzbeweise. Physikalisch von höchster Bedeutung (und zwar vornehmlich für die Akustik) ist die dabei bewiesene Tatsache, daß jeder solche Vorgang als eine Superposition von Eigenschwingungen gedeutet werden kann, deren Eigenschaften dann auch noch näher (z. B. der Satz von Weyl über das asymptotische Verhalten unendlich großer Eigenwerte) angebbar sind. Über den Vorgang als ungeteiltes Ganzes aber läßt sich bei dieser Betrachtungsweise so gut wie nichts aussagen. Dies mag begründen, daß ich im folgenden eine solche, übrigens physikalisch von vornherein gegebene Eigenschaft dieser Vorgänge bespreche. Es handelt sich um den Nachweis, daß in dem Falle, wo die Begrenzung des betrachteten dreidimensionalen Raumes aus mehreren miteinander nicht zusammenhängenden Flächenstücken besteht, jedes einzelne von ihnen sozusagen nur im eigenen Wirkungskreise den zeitlichen Verlauf des Vorganges beeinflußt und daß in Übereinstimmung damit die Lösung des gemischten Problems für den Fall mehrerer Flächen herstellbar ist, sobald die Lösung der gemischten Randwertaufgabe für jede einzelne dieser Flächen für sich (ohne daß zugleich die anderen Flächen dabei vorhanden wären) angegeben werden kann.

Oder dasselbe etwas physikalischer ausgedrückt: Die Reflexion und Beugung ist ein Vorgang, der an jedem einzelnen Körper unabhängig von der Anwesenheit der übrigen Körper vor sich geht und wir beherrschen die Reflexion und Beugung im Falle, daß mehrere Körper vorhanden sind, wenn wir sie für jeden einzelnen dieser Körper allein verfolgen können. Dies alles ist nur beiläufig gesagt, um die Umrisse des Zieles, in dessen Richtung sich unsere Untersuchung bewegt, anzudeuten; die strenge Formulierung erfolgt später.

Im folgenden werden wir alle Beweise so führen, daß man die Gültigkeit unserer Sätze auch noch für ein gegenüber dem obigen (durch den physikalischen Ausgangspunkt gegebenes) etwas verallgemeinertes Problem ohne weiteres einsieht. Dieselben Theoreme lassen sich nämlich auch im Gebiete der hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit n Veränderlichen:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + l u = 0 \qquad (A)$$

(a_{ik}, a_i und l sind Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$) beweisen, sofern die charakteristischen Kegel von (A) [die im allgemeinen aus gewissen geodätischen Linien bestehen und $(n-1)$-dimensionale Flächen im n-dimensionalen Raume sind] die analysis-situs-Eigenschaften der gewöhnlichen Kegel

$$(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^*)^2 - (x_n - x_n^*)^2 = 0$$

besitzen.

II.

In diesem Abschnitte sollen die für uns wichtigen Resultate der bisher über das Cauchysche Problem bei der Differentialgleichung (A) durchgeführten Untersuchungen zusammengefaßt werden. Der Einfachheit und größeren Anschaulichkeit wegen werden wir uns dabei auf den Fall der zweidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{a}$$

beschränken. Alle Definitionen und Sätze werden wir aber überall im folgenden in einer so allgemeinen Fassung aussprechen, daß ihre Verallgemeinerung für die Differentialgleichung (A) ohne weiteres zu ersehen ist.

Historisch ist zu bemerken, daß der Spezialfall, die Gleichung (a), zuerst von d'Adhémar[1]) vollständig behandelt wurde, der eine von Volterra[2]) angegebene Formel näher untersucht und auch einfacher begründet hat. Für die allgemeine Differentialgleichung (A) hat dann Hadamard[3]) das Cauchysche Problem nach einer anderen Methode (durch direkte Anwendung der Fundamentallösung) erledigt.

Vorerst sei noch bemerkt, daß die charakteristischen Kegel von (a) durch die Gleichung:

$$(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 - (t - t^*)^2 = 0$$

gegeben werden und demnach aus gewöhnlichen Kegeln (mit einem Öffnungswinkel von 90^0) bestehen, deren Achsen parallel zur t-Achse verlaufen[4]).

Das Cauchysche Problem bei der Differentialgleichung (a) läßt sich dann in der nachstehenden Weise formulieren: Im x, y, t-Raume sei eine Fläche F vorgelegt, die so beschaffen ist, daß in jedem ihrer Punkte die Normale stets innerhalb des charakteristischen Kegels verläuft, dessen Spitze in dem betrachteten Punkte von F gelegen ist. Auf der Fläche F seien die Werte von u sowie die Ableitungen von u nach der Richtung der Konormalen gegeben. Es soll dann eine Funktion $u(x, y, t)$ bestimmt werden, die einmal stetig differenzierbar ist, der Differentialgleichung (a) genügt und auf F die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt.

Dabei ist die Konormale ganz allgemein als die Richtung definiert, die zur Tangentialebene bezüglich des charakteristischen Kegels, dessen Spitze in dem betreffenden Punkte von F liegt, konjugiert ist. Die Konormale an eine Charakteristiken-Fläche ist demnach in der betrachteten Fläche selbst gelegen. Speziell bei der Differentialgleichung (a) ist die Konormale aus der Normalen einfach durch eine Spiegelung an einer Ebene $t = \text{const}$ zu erhalten.

---

[1]) R. d'Adhémar, Journ. d. Math. (5), Bd. 10, S. 131, 1904 und (6), Bd. 2, S. 357, 1906.

[2]) Vito Volterra, Acta mathematica, Bd. XVIII, S. 161, 1894.

[3]) J. Hadamard, Acta mathematica, Bd. XXXI, S. 333, 1908.

[4]) Im folgenden soll aber unter einem Kegel stets nur ein Halbkegel verstanden werden.

Die Lösung $u(x, y, t)$ des Cauchyschen Problems ist definiert in jedem Punkte P des x, y, t-Raumes, der so gelegen ist, daß der charakteristische Kegel mit der Spitze in P aus der Fläche F stets nur ein aus lauter Innenpunkten von F bestehendes Gebiet ausschneidet. $u(x, y, t)$ wird dabei durch einen über die erwähnten Innenpunkte von F sich erstreckenden Integralausdruck dargestellt, den wir in Anlehnung an Volterra[1]) als die Poisson-Parsevalsche Formel bezeichnen wollen[2]). Die Eindeutigkeit dieser Definition für einen solchen Punkt P folgt dabei unmittelbar aus der Art des zur Begründung dieser Formel angewandten Verfahrens.

Es ist jetzt nach dem obigen sofort zu ersehen, in welchem Gebiete G die Lösung des Cauchyschen Randwertproblemes vorhanden und auch eindeutig bestimmt ist, wenn die Fläche F einen Rand besitzt. Die Begrenzung von G wird offenbar außer durch F selbst, durch die Einhüllende aller charakteristischen Kegel festgelegt, die F ausschließlich in Innenpunkten schneiden. Diese Fläche ist offenbar mit einer Einhüllenden sämtlicher charakteristischen Kegel identisch, deren Spitzen in der Begrenzung von F gelegen sind.

Es sei noch erwähnt, daß im Falle der Differentialgleichung (A) die charakteristischen Kegel im allgemeinen aus gewissen geodätischen Linien bestehen und dann alle beim Cauchyschen Probleme in Betracht kommenden Flächen $(n-1)$-dimensionale Gebilde in einem n-dimensionalen Raume sind.

III.

Bevor wir an unsere eigentlichen Überlegungen herantreten, müssen in diesem Abschnitte noch gewisse Eindeutigkeitsfragen erledigt werden.

Im x, y, t-Raume sei durch die beiden Ebenen $t = t_0$ und $t = t_1$, durch einen charakteristischen Kegel dessen Spitze die t-Koordinate t_2 hat $(t_2 > t_1 > t_0)$ und durch eine zylindrische Fläche mit zur t-Achse parallelen Erzeugenden ein Bereich R abgegrenzt. Soweit die angeführten Flächen zur Berandung von R gehören, mögen sie mit F_0, F_1, $\mathfrak{K}$ und Z bezeichnet werden (Fig. 1).

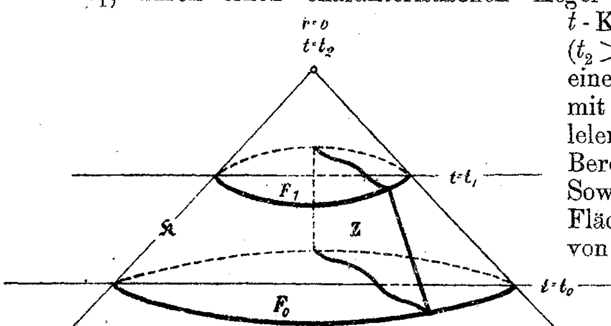

Fig. 1.

[1]) V. Volterra, loc. cit., S. 214.

[2]) Im vierdimensionalen Falle (x, y, z, t) ist der entsprechende Ausdruck mit dem allbekannten Poissonschen Integral identisch. (Siehe: Riemann-Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 5. Aufl., Bd. II., S. 302, Braunschweig 1912.)

Eindeutigkeitstheorem. $u(x, y, t)$ sei eine in R definierte und einmal stetig nach x, y, t differenzierbare[1]) Funktion, die hier der Differentialgleichung (Wellengleichung)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{a}$$

genügt. Auf der Fläche F_0 möge $u(x, y, t)$ die Cauchyschen Randbedingungen

$$u = (u)_{t_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t_0}$$

und auf der Fläche Z die Dirichletschen Randbedingungen

$$\alpha)\ u = (u)_z \quad \text{oder} \quad \beta)\ \frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_z$$

erfüllen. Es wird behauptet, daß durch diese Forderungen $u(x, y, t)$ auf der Fläche F_1 vollständig eindeutig bestimmt wird.

Beweis: Nach den bekannten Greenschen Methoden kann man die Richtigkeit der nachstehenden schon von Volterra[2]) benützten Integralbeziehung:

$$\iiint\limits_{R^*} \{v\,F(u) - u\,F(v)\}\,dx\,dy\,dt = \iint\limits_{(R^*)} \left\{u \frac{dv}{d\nu} - v \frac{du}{d\nu}\right\} df$$

zeigen. R^* ist dabei ein Bereich im x, y, t-Raume, (R^*) seine Umgrenzung, u und v zwei in R^* einmal stetig differenzierbare Funktionen,

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

und endlich $\dfrac{d}{d\nu}$ die Ableitung nach der inneren Konormalen, d. h.

$$\frac{d}{d\nu} = \pi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \pi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \pi_3 \frac{\partial}{\partial t},$$

wenn π_1, π_2, π_3 die Richtungskosinusse der inneren Normalen der Fläche (R^*) sind.

Wird in dem obigen Integralsatze vorausgesetzt, daß u der Differentialgleichung $F(u) = 0$ genügt, $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ ist und als Integrationsgebiet R^* der Raum R genommen wird, so besteht der

---

[1]) Einmal stetig nach x, y, t differenzierbare Funktionen bezeichnen wir im folgenden auch kurz als reguläre Funktionen.

[2]) V. Volterra, loc. cit., S. 165.

Beweis des Eindeutigkeitstheorems in einer geeigneten Umformung des Oberflächenintegrals:

$$\iint\limits_{(\mathfrak{K})} \left\{ u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} df = 0. \tag{1}$$

Zunächst müssen wir für das folgende einige Festsetzungen treffen. Außer den Koordinaten x, y, t werden wir auch Zylinderkoordinaten r, φ, t verwenden, die so gewählt sind, daß sich die Gleichung des Kegels $\mathfrak{K}$ in der Form: $r^2 - (t - t_2)^2 = 0$ schreibt. Auf der Fläche $\mathfrak{K}$ benützen wir als Flächenkoordinaten die Veränderlichen s und φ, wo s die Entfernung von der Kegelspitze bedeutet und mithin

$$s = r\sqrt{2}$$

ist. Das Flächenelement auf $\mathfrak{K}$ wird dann gegeben durch

$$df = \frac{s}{\sqrt{2}}\, ds\, d\varphi.$$

Mit n (oder auch genauer mit $n_{\mathfrak{K}}, n_z$) bezeichnen wir die in einer Ebene $t = \text{const.}$ liegenden inneren Normalen an die Schnittkurven der Flächen $\mathfrak{K}$ und Z mit der Ebene $t = \text{const.}$

Die Ableitung nach der Konormalen ν ist jetzt gegeben:

auf der Fläche F_0 durch: $-\dfrac{\partial}{\partial t}$,

" " " F_1 " $\dfrac{\partial}{\partial t}$,

" " " Z " $\dfrac{\partial}{\partial n_z}$;

" " " $\mathfrak{K}$ " $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{K}}} + \dfrac{\partial}{\partial t}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial}{\partial t}\right) = -\dfrac{d}{ds}$.

Mit (F_0) wollen wir die gesamte Umgrenzung von F_0, mit (F_0, Z) und $(F_0, \mathfrak{K})$ die Schnittkurven der Fläche F_0 mit Z bzw. $\mathfrak{K}$ und analog die Randkurven der Flächen F_1, Z und $\mathfrak{K}$ bezeichnen.

Die über die Flächen F_0, F_1, Z und $\mathfrak{K}$ erstreckten Integrale (1) mögen J_{F_0}, J_{F_1}, J_Z und $J_{\mathfrak{K}}$ heißen.

Wir schreiten nun an die Umformung von (1). Es ist zunächst:

$$J_{F_0} = \iint\limits_{F_0} \left\{ -u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} df.$$

Addieren wir dazu die nach dem Greenschen Satze bestehende Identität:

$$\iint\limits_{F_0}\left\{u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}df+\int\limits_{(F_0)} u\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0,$$

worin $d\sigma$ das Linienelement der Berandung (F_0) von F_0 bedeutet, so wird J_{F_0} mit Rücksicht darauf, daß u die Wellengleichung (a) erfüllt, gleich:

$$J_{F_0}=\iint\limits_{F_0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}df+\int\limits_{(F_0)} u\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma. \tag{2}$$

Ebenso gilt:

$$J_{F_1}=-\iint\limits_{F_1}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}df-\int\limits_{(F_1)} u\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma. \tag{3}$$

Das Integral J_Z muß durch eine partielle Integration nach t umgeformt werden:

$$\begin{aligned}J_Z&=\iint\limits_{Z}\left\{u\frac{\partial}{\partial n_z}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n_z}\right\}df=\iint\limits_{Z}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial u}{\partial n_z}\right)-\right.\\&\left.-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n_z}\right\}df=-2\iint\limits_{Z}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n_z}\,df+\int\limits_{(Z,F_1)}u\frac{\partial u}{\partial n_z}\,d\sigma-\\&-\int\limits_{(Z,F_0)}u\frac{\partial u}{\partial n_z}\,d\sigma+\int\limits_{(Z,\mathfrak{K})}u\frac{\partial u}{\partial n_z}\sin(t,d\sigma)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{4}$$

Es erübrigt noch die Umformung des Integrales:

$$J_{\mathfrak{K}}=\iint\limits_{\mathfrak{K}}\left\{-u\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{du}{ds}\right\}\frac{s}{\sqrt{2}}.ds\,d\varphi.$$

Zunächst addieren wir zu $J_{\mathfrak{K}}$ die durch partielle Integration nach s hervorgehende Beziehung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\mathfrak{K}}\frac{d}{ds}\left(u\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{K}}}s\right)ds.d\varphi-\int\limits_{(\mathfrak{K},Z)}u\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{K}}}\sin(s,d\sigma)\,d\sigma-\\-\int\limits_{(\mathfrak{K},F_0)}u\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{K}}}\,d\sigma+\int\limits_{(\mathfrak{K},F_1)}u\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{K}}}\,d\sigma=0,\end{aligned}$$

wobei wir hier in den Flächenintegralen die Differentiation nach s ausführen. Indem wir die Glieder geeignet zusammenfassen, finden wir mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\frac{d}{ds}$ und darauf, daß auf $\mathfrak{K}$ $s=r\sqrt{2}$ ist:

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{K}}&=\iint\limits_{\mathfrak{K}}-\left(\frac{du}{ds}\right)^2 s\,ds\,d\varphi+\iint\limits_{\mathfrak{K}}\frac{u}{2}\left\{-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}s\,ds\,d\varphi-\\&-\int\limits_{(\mathfrak{K},Z)}u\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{K}}}\sin(s,d\sigma)\,d\sigma-\int\limits_{(\mathfrak{K},F_0)}u\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{K}}}\,d\sigma+\int\limits_{(\mathfrak{K},F_1)}u\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{K}}}\,d\sigma.\end{aligned}$$

Durch eine partielle Integration nach φ wird nun erhalten:

$$-\iint\limits_{\mathfrak{R}} \frac{1}{s^2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\} s\,ds\,d\varphi + \int\limits_{(\mathfrak{R},\,Z)} u\,\frac{1}{s}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos(s, d\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Wenn wir jetzt dies zu $J_{\mathfrak{R}}$ addieren und dabei beachten, daß in den Koordinaten r, φ, t die Wellengleichung (a) gegeben wird durch:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

so ergibt sich:

$$J_{\mathfrak{R}} = -\iint\limits_{\mathfrak{R}}\left(\frac{d u}{d s}\right)^2 s\,ds\,d\varphi - \iint\limits_{\mathfrak{R}}\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 s\,ds\,d\varphi - \int\limits_{(\mathfrak{R},\,F_0)} u\,\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{R}}}\,d\sigma +$$
$$+\int\limits_{(\mathfrak{R},\,F_1)} u\,\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{R}}}\,d\sigma + \int\limits_{(\mathfrak{R},\,Z)} u\left\{-\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{R}}}\sin(s, d\sigma) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\frac{\cos(s, d\sigma)}{\sqrt{2}}\right\}d\sigma. \quad (5)$$

Das zuletzt hingeschriebene Kurvenintegral müssen wir noch einer Umformung unterziehen. $d\sigma$ und seine Projektion auf s: $d\sigma \cos(s, d\sigma)$ bilden auf $\mathfrak{R}$ ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 2) mit den Seiten

$$d\sigma,\ d\sigma\,.\sin(s, d\sigma),\ d\sigma\,.\cos(s, d\sigma).$$

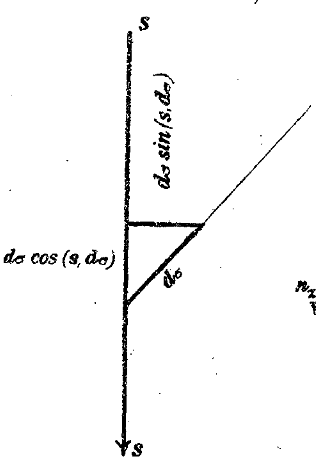

Fig. 2.

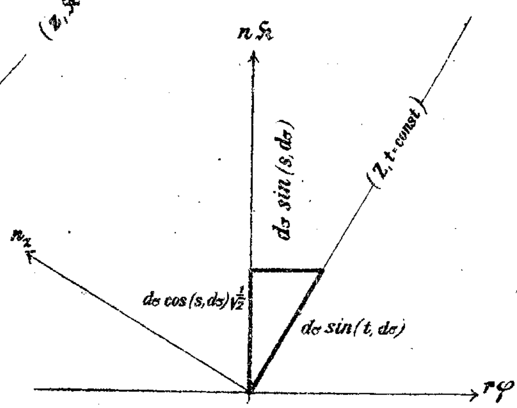

Fig. 3.

Durch eine orthogonale, zur t-Achse parallele Projektion entsteht aus ihm ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 3), dessen Seiten offenbar die Längen:

$$d\sigma\,.\cos(n_z, d\sigma) = d\sigma \sin(t, d\sigma),\ d\sigma\,.\sin(s, d\sigma),$$
$$d\sigma\cos(s, d\sigma)\,.\cos(s, n_{\mathfrak{R}}) = d\sigma\,.\cos(s, d\sigma)\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

haben. Drücken wir die beiden zuletzt hingeschriebenen Seiten durch $d\sigma . \sin(t, d\sigma)$ und den Winkel $(n_z, n_{\mathfrak{R}})$ aus, so bekommen wir:

$$\sin(s, d\sigma) = \sin(t, d\sigma) . \cos(n_z, n_{\mathfrak{R}})$$
$$\cos(s, d\sigma) . \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(t, d\sigma) \sin(n_z, n_{\mathfrak{R}}).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &-\int\limits_{(\mathfrak{R}, Z)} u \left\{ -\frac{\partial u}{\partial n_{\mathfrak{R}}} \sin(s, d\sigma) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos(s, d\sigma)}{\sqrt{2}} \right\} d\sigma - \\ &\qquad -\int\limits_{(\mathfrak{R}, Z)} u \frac{\partial u}{\partial n_z} \sin(t, d\sigma)\, d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Addition von (2) bis (5) ergibt somit schließlich, wenn wir (1) und (6) beachten, die Beziehung:

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{F_0} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} df - \iint\limits_{F_1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} df - 2 \iint\limits_{Z} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n_z} df - \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left(\frac{d u}{d s}\right)^2 s\, ds\, d\varphi - \\ &\qquad - \iint\limits_{\mathfrak{R}} \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 s\, ds\, d\varphi = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Nehmen wir nun an, es gäbe zwei Funktionen, u_1 und u_2, die beide in R die im Eindeutigkeitstheorem angeführten Eigenschaften besitzen, so müßte ihre Differenz $U = u_1 - u_2$, mit Rücksicht darauf, daß beide Funktionen auf F_0 und Z die gleichen Randbedingungen erfüllen, der Gleichung:

$$\begin{aligned} &- \iint\limits_{F_1} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \right\} df - \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)^2 + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^2 \right\} s\, ds\, d\varphi = 0 \end{aligned}$$

entsprechen. Da die beiden Integrale das gleiche Zeichen haben, so muß auf F_1

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

oder

$$u_1 = u_2$$

sein. Damit ist unser Eindeutigkeitstheorem bewiesen.

Folgerung: Da die Ebene $t = t_1$ allein nur der Bedingung $t_2 > t_1 > t_0$ unterworfen ist, so wird die Funktion $u(x, y, t)$ durch die auf F_0 und auf der zylindrischen Fläche (soweit diese innerhalb des charakteristischen Kegels verläuft) vorgegebenen Randbedingungen im ganzen Raume, der von F_0, dem Mantel des charakteristischen Kegels und dem entsprechenden Teile der zylindrischen Fläche bestimmt wird, eindeutig festgelegt.

Für den Fall, daß keine Fläche Z vorhanden ist, enthalten die obigen Überlegungen einen Eindeutigkeitsbeweis für das spezielle Cauchysche Problem, wenn als Fläche F (siehe Abschnitt II) die Ebene $t = t_0$ genommen wird.

F^* sei nun ein in der Ebene $t = t_0$ gelegenes, durch die Kurven $k = k_z + k_{\mathfrak{K}}$ umschlossenes Gebiet. Wir betrachten dann eine zylindrische bzw. eine Charakteristiken-Fläche, die entstehen, wenn eine zur t-Achse parallele Gerade bzw. die Spitze eines charakteristischen Kegels die Kurven k_z bzw. $k_{\mathfrak{K}}$ durchlaufen. Soweit diese beiden Flächen zusammen mit F^* ein Gebiet G umgrenzen, mögen sie mit Z^* bzw. $\mathfrak{K}^*$ bezeichnet werden.

Eindeutigkeitstheorem. In dem Bereiche G wird eine reguläre Lösung der Wellengleichung (a) durch die Vorgabe der Cauchyschen bzw. Dirichletschen Randbedingungen auf F^* bzw. Z^* eindeutig bestimmt.

Beweis: R_1 und R_2 seien zwei Teilbereiche von G, die durch charakteristische Kegel $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, deren Spitzen innerhalb G liegen, bestimmt sind und ein Gebiet $R_{1,2}$ gemeinsam haben. Durch die Randwerte, die auf jenen Gebieten liegen, die durch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ auf F^* und Z^* ausgeschnitten werden, sind in R_1 und R_2 nach dem früher bewiesenen Eindeutigkeitssatze zwei Funktionen u' und u'' eindeutig festgelegt. Unser jetziges Eindeutigkeitstheorem wird offenbar bewiesen sein, wenn u' und u'' in $R_{1,2}$ miteinander identisch sind. Betrachten wir ein Gebiet R_1^*, das in G durch einen Kegel $\mathfrak{K}_1^*$ mit der Spitze in R_1 bestimmt wird. Die Funktion u_1^*, die durch das von $\mathfrak{K}_1^*$ auf F^* und Z^* ausgeschnittene Gebiet festgelegt wird, ist nun nach dem früher bewiesenen Eindeutigkeitstheorem in R_1^* mit u' identisch. Jede, durch einen Kegel mit der Spitze in $R_{1,2}$ bestimmte Funktion muß daher sowohl mit u' als auch mit u'' übereinstimmen, womit die Gleichheit von u' und u'' in $R_{1,2}$ bewiesen ist.

Der zuletzt bewiesene Satz bleibt selbstverständlich bestehen, falls die Berandung von F^* aus mehreren miteinander nicht zusammenhängenden Kurvenstücken besteht.

IV.

Die in dem ersten Abschnitte angekündigten Theoreme können wir nun hier als einfache Folgerungen aus den Sätzen der beiden letzten Abschnitte herleiten.

Im x, y, t-Raume seien in der $t = t_0$-Ebene n geschlossene Kurven

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

gegeben, die keine Punkte miteinander gemeinsam haben und alle zugleich ein endliches oder unendliches Gebiet γ einschließen. Mit K_ν möge dann die Zylinderfläche bezeichnet werden, die im x, y, t-Raume von einer zur t-Achse parallelen Geraden beim Umlaufen der Kurve k_ν erzeugt wird. Die gegen das Gebiet γ hin sich erstreckende Einhüllende, die ein charakteristischer Kegel erzeugt, wenn seine Spitze auf einer Kurve k_ν sich bewegt, soll $\mathfrak{K}_\nu$ heißen.

Wir wollen für das Folgende das Übereinkommen treffen, als gemischte Probleme G bzw. G_ν die nachstehenden Randwertaufgaben zu bezeichnen.

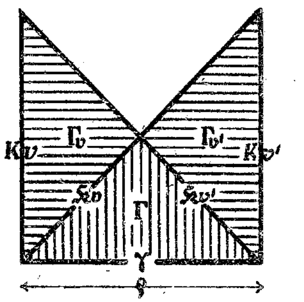

Fig. 4.

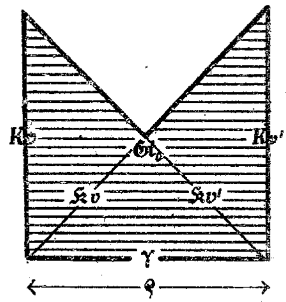

Fig. 5.

Gemischtes Problem G: Es ist eine in dem von γ und den Flächen $K_1, K_2, \ldots, K_n$ begrenzten (in der Richtung der positiven t-Achse sich erstreckenden) Gebiete definierte und reguläre Lösung der Wellengleichung (a) herzustellen, die auf γ vorgeschriebenen Cauchyschen und in den Zylinderflächen K_ν gegebenen Dirichletschen Randbedingungen genügt.

Gemischtes Problem G_ν: Es ist eine in dem von γ, einer einzigen Fläche K_ν und den Flächen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{\nu-1}, \mathfrak{K}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{K}_n$ begrenzten Gebiete definierte und reguläre Lösung u_ν der Wellengleichung (a) herzustellen, die auf γ vorgeschriebenen Cauchyschen und in der Fläche K_ν gegebenen Dirichletschen Randbedingungen genügt.

Nach Abschnitt III sind die Lösungen der Probleme G und G_ν eindeutig bestimmt.

Wir bezeichnen nun mit Γ_ν das an K_ν anliegende, von K_ν der entsprechenden Fläche $\mathfrak{K}_\nu$, sowie auch von den übrigen Flächen $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{\nu-1}, \mathfrak{K}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{K}_n$ begrenzte Gebiet. Γ sei das von γ und allen Flächen $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ umschlossene Gebiet (Fig. 4). Endlich soll der von $\gamma, K_1, \ldots, K_n, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ umgrenzte Bereich, der alle Gebiete $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ und Γ als Teilbereiche enthält, mit $\mathfrak{G}_{t_0}$ (Fig. 5) bezeichnet werden.

Nunmehr können wir nachstehendes behaupten:

Satz I. Setzen wir die Existenz der Lösungen der Probleme G_ν voraus, so läßt sich in dem Gebiete $\mathfrak{G}_{t_0}$ eine gleich näher anzugebende, reguläre Lösung U_1 der Wellengleichung *(a)* herstellen, die in der Fläche γ und den zur Begrenzung von $\mathfrak{G}_{t_0}$ gehörenden Teilen der Zylinder $K_1, K_2, \ldots, K_n$ die für das Problem G vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt. U_1 kann dabei aus den nachstehenden Funktionen zusammengestückelt werden:

1. In dem Gebiete Γ kann man U_1 nach der Poisson-Parsevalschen Formel berechnen, wobei das mit den gegebenen Cauchyschen Anfangswerten belegte Gebiet γ die Rolle der Fläche F spielt.

2. In jedem Gebiete Γ_ν wird U_1 durch denselben Ausdruck u_ν gegeben, der das entsprechende Problem G_ν löst. Der Berechnung von u_ν sind dabei auf dem Zylinder K_ν und auf γ dieselben Randwerte, wie sie beim Problem G vorliegen, zu Grunde zu legen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist einfach einzusehen. Zunächst ist es klar, daß U_1 alle in unserem Satze angeführten Randbedingungen erfüllt. Um noch festzustellen, daß die Funktion U_1 innerhalb $\mathfrak{G}_{t_0}$ regulär ist und hier überall der Wellengleichung genügt, muß nur gezeigt werden, daß sie in allen Flächen $\mathfrak{K}_\nu$ sich regulär verhält. Dies folgt aber aus der Tatsache, daß in dem Gebiete Γ sämtliche Funktionen u_ν untereinander und mit der in 1 angegebenen Funktion übereinstimmen. Nach dem in dem Abschnitte II Angeführten ist nämlich jede in Γ reguläre und der Wellengleichung entsprechende Funktion schon durch die auf γ vorgeschriebenen Anfangswerte vollständig eindeutig festgelegt. Damit wäre Satz I bewiesen.

Der kleinste Abstand zwischen irgend welchen zwei Kurven k_ν sei ρ und mit t^* werde ein entsprechend der Ungleichung $\rho/2 + t_0 > t^* \geq t_0$ gewählter Zeitmoment bezeichnet. Die Ebene $t = t^*$ schneidet dann das Gebiet $\mathfrak{G}_{t_0}$ in einem zu γ kongruenten Flächenstücke. $\mathfrak{G}_{t^*}$ möge dann ein Gebiet sein, das über der Ebene $t = t^*$ ebenso errichtet wird, wie $\mathfrak{G}_{t_0}$ über $t = t_0$.

Nach dem Verfahren des Satzes I stellen wir in dem Bereiche $\mathfrak{G}_{t^*}$ eine Funktion U_2 her, die auf den Flächen $K_1, \ldots, K_n$ (soweit sie zur Begrenzung von $\mathfrak{G}_{t^*}$ gehören), den hier im Probleme G vorgegebenen Dirichletschen und auf der Ebene $t = t^*$ den Cauchyschen Grenzbedingungen

$$(U_2)_{t=t^*} = (U_1)_{t=t^*} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)_{t=t^*} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{t=t^*}$$

entspricht. Von U_2 ausgehend, können wir in derselben Weise in dem durch die Ebene $t = t_0 + 2(t^* - t_0)$ sowie allen Flächen K_ν bestimmten Gebiete $\mathfrak{G}_{t_0+2(t^*-t_0)}$ eine Funktion U_3 konstruieren, aus U_3 dann U_4 herleiten usw.

Satz II. Die Gesamtheit der Funktionen:

$$U_1, U_2, U_3, \ldots\ldots$$

stellt die (nach Abschnitt III eindeutig bestimmte) Lösung des Problems G dar.

Zum Beweise dieser Behauptung muß nur gezeigt werden, daß die so erhaltene Funktion, sie heiße U, sich in den Ebenen $t = t^*$, $t = t_0 + 2\,(t^* - t_0), \ldots$ also in ihrem ganzen Definitionsbereiche regulär verhält. Daß U den übrigen Bedingungen des Problems G genügt, ist dann unmittelbar einzusehen. Das reguläre Verhalten von U_1 in der Ebene $t = t^*$ etwa, folgt aber aus dem Umstande, daß U_1 und U_2 in den Begrenzungen $t = t^*, K_1, \ldots, K_n$ ihres gemeinsamen Definitionsbereiches $\mathfrak{G}_{1,2}$ (der aus allen Punkten von $\mathfrak{G}_{t_0}$ besteht für die $t \geqq t^*$) beide die gleichen Randbedingungen erfüllen und mithin in $\overline{\mathfrak{G}_{1,2}}$, wie dies die Überlegungen des Abschnittes III ohne weiteres ergeben, miteinander vollständig übereinstimmen.

Der Weg, den wir zur Lösung des Problems G eingeschlagen haben, läßt sich noch in mannigfacher Weise abändern. Man kann z. B. zur weiteren Fortsetzung der Funktion U_1 an Stelle der Ebene $t = t^*$ auch jenen Teil der Begrenzung von $\mathfrak{G}_{t_0}$ wählen, der aus Charakteristiken besteht. Auf diese Weise erhält man mit nur einmaligem Zurückgreifen auf die Lösungen der Probleme G_ν die Lösung von G in einem Bereiche, der sich über die Ebene $t = t_0 + 2\,(t^* - t_0)$ hinaus erstreckt.

Es ist wohl kaum notwendig, nochmals zu betonen, daß alle diese Überlegungen mit nur sehr kleinen Änderungen auch bei der Differentialgleichung (A) durchführbar sind. Die angegebene Methode läßt sich ferner auch noch anwenden, wenn in dem Gebiete, wo die Anfangswerte gegeben werden, mehrere durch Flächen Φ_ν abgegrenzte Teilbereiche vorhanden sind, in denen die Koeffizienten a_{ik}, a_i und l der Differentialgleichung (A) sich unstetig ändern und auf den Flächen Φ_ν Grenzbedingungen vorgeschrieben sind. (Beugungsproblem für durchsichtige Körper.)

Endlich kann unser Verfahren auch noch benutzt werden, wenn der Anfangszustand nicht auf einer Ebene $t = \text{const}$, sondern auf einer $(n-1)$ dimensionalen Fläche gegeben ist, die den Bedingungen für die Fläche F (siehe Abschnitt II) entspricht.

V.

In diesem letzten Abschnitte soll noch angedeutet werden, wie die jetzt benutzten Gedankengänge sich für eine spezielle Klasse von gemischten Problemen noch weiter ausbauen lassen. Wir stellen die folgenden Überlegungen wiederum im x, y, t-Raume und für den Fall der Differentialgleichung (a) an. Dabei setzen wir voraus, daß es uns gelungen wäre, das gemischte Problem G_ν unter der

Annahme zu lösen, daß die Kurve k_ν aus zwei unter einem beliebigen Winkel miteinander zusammenstoßenden Geraden besteht[1].

Die Zylinderfläche K_ν ist jetzt ein Keil. Die Fläche $\mathfrak{K}_\nu$ (siehe Seite 75) besteht zum Teil aus einem charakteristischen Kegel $\mathfrak{K}_\nu^*$, dessen Spitze sich in der Ebene $t = t_0$, und zwar in der Keilkante befindet, und zum anderen Teile aus zwei Ebenen, die durch die Geraden k_ν hindurchgehen und den Kegel $\mathfrak{K}_\nu^*$ berühren. Im Raume zwischen der Ebene $t = t_0$ und der Fläche $\mathfrak{K}_\nu$ ist auch hier die Lösung von G_ν durch die Poisson-Parsevalsche Formel zu berechnen. Aber auch im Gebiete zwischen K_ν und $\mathfrak{K}_\nu$, soweit dieses außerhalb des Kegels $\mathfrak{K}_\nu^*$ gelegen ist, kann man die Lösung der betrachteten Randwertprobleme leicht angeben.[2] Überlegungen, die den im vorigen Abschnitte durchgeführten vollständig analog sind, zeigen nämlich, daß hier die gesuchte Funktion[3] durch die Lösung des gemischten Problems für den Fall, daß k_ν aus einer beiderseits unbegrenzten Geraden[4] besteht, dargestellt wird.

Unter Zuhilfenahme der obigen Resultate läßt es sich nun zeigen, daß die Lösung von G_ν auch für den Fall, wo k_ν aus einem (geschlossenen oder ungeschlossenen) Streckenzuge besteht, hergestellt werden kann. Ist ρ die kürzeste Seite des Polygons k_ν, so lösen wir zunächst die Randwertaufgabe bis zu einem Zeitmomente t^*: $(t_0 < t^* < t_0 + \rho/2)$ durch Zusammenstückeln aus Lösungen der entsprechenden Probleme für den Keil in folgender Weise: Die Fläche K_ν besteht jetzt aus einem unendlich langen Prisma. Wir errichten ähnlich wie beim Keil um jede Prismenkante einen charakteristischen Kegel $\mathfrak{K}^*$ und setzen hier die gesuchte Funktion U_1 gleich der entsprechenden Lösung beim Keil. In den übrigen Gebieten zwischen den Flächen K_ν und $\mathfrak{K}_\nu$ identifizieren wir U_1 mit der hier in Betracht kommenden Lösung für den Fall, wo k_ν eine Gerade ist, und außerhalb der Fläche $\mathfrak{K}_\nu$ drücken wir U_1 durch die Poisson-Parsevalsche Formel aus. Indem wir nun für die Zeit $t = t^*$, U_1 und $\frac{\partial U_1}{\partial t}$ berechnen, können wir diese Werte als einen neuen Anfangszustand ansehen und durch eine neuerlich angewandte Zusammenstückelung die gesuchte Funktion bis zu einem Zeitmomente $t = t_0 + 2(t^* - t_0)$ angeben usf.

Wird der ursprüngliche Anfangszustand geeignet angenommen, stellt er z. B. einen ebenen oder zylindrischen Impuls dar (der Impuls muß im Anfangszustande so gewählt werden, daß er die

---

[1] Für den Fall, daß der Anfangszustand speziell so angenommen wird, daß er eine ebene Welle darstellt und k_ν aus einem Halbstrahle besteht, wurde das obige Problem von A. Sommerfeld (Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. **46**, 11, 1901) gelöst.

[2] Der Bereich innerhalb $\mathfrak{K}_\nu^*$ ist das Gebiet der Beugung, der zwischen K_ν und $\mathfrak{K}_\nu$, soweit er nicht mit dem vorigen identisch ist, das Gebiet der reinen Reflexion. Außerhalb $\mathfrak{K}_\nu$ breiten sich die Wellen vollständig unbehindert aus.

[3] Ähnliches gilt für hinreichend kleine Zeiten in allen Fällen, wo die Kurve k_ν mindestens zu einem Teile aus einer Geraden gebildet wird.

[4] Physikalisch: Reflexion an einer Ebene.

beugenden Schirme nicht schneidet), so erhalten die oben behandelten Probleme eine physikalische Bedeutung. So läßt sich z. B., wenn das Problem G_ν für die Halbebene gelöst ist, nach dem Verfahren des Abschnittes IV die Beugung an einem Spalt und unter Anwendung der jetzt auseinandergesetzten Methode das Problem des beugenden Streifens oder (mit Anwendung der Lösung für den Keil) eines Reflexionsgitters, dessen Profil durch irgend einen Streckenzug gegeben wird, erledigen. Mit Hilfe der Lösung von G_ν für einen Streifen kann nach IV die Beugung an einem im durchfallenden Lichte benutzten, aus aneinandergereihten Streifen bestehenden Strichgitter behandelt werden, usf.

Wien, 3. August 1917.