Über mehrfache Vektoren und ihre Produkte sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie. [1]

Von **Emil Waelsch** in Brünn.

Man kann einer binären quadratischen Form einen Vektor zuordnen und einer Form $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechend ihren Zerlegungen in quadratische Faktoren ein System von assoziierten ν-fachen Vektoren, Polyvektoren oder Vielbeinen ν^{ter} Ordnung, die aus ν gleichlangen, von einem Punkte O ausgehenden Vektoren bestehen. [2] Unter gewissen Bedingungen ist eines dieser assoziierten Vielbeine der Form reell, d. h. seine sämtlichen Teilvektoren sind reell. Werden reelle Vielbeine, die sich nur in einer geraden Anzahl ihrer Richtungen unterscheiden, als gleich angesehen, so bestimmen sich Form und Vielbein gegenseitig und eindeutig. Es kann, von der Addition ihrer Formen ausgehend, eine Addition reeller Vielbeine definiert werden, welche die formalen Gesetze der algebraischen Addition befolgt.

Die Überschiebungen der Formen zweier reellen Vielbeine liefern neue reelle Vielbeine, die als Produkte der gegebenen Vielbeine bezeichnet werden können. Alle für die Gruppe der Drehstreckungen invarianten reellen Vielbeine mehrerer reellen Vielbeine, die ganz und rational in den gegebenen Vielbeinen sind, lassen sich durch alleinige Anwendung von solchen Produktbildungen aus den gegebenen Vielbeinen ableiten. Werden die gegebenen Vielbeine in ihre Teilvektoren zerlegt, so läßt sich auch jedes dieser invarianten Vielbeine durch die gewöhnlichen skalaren, vektorischen und Tripelprodukte der Teilvektoren ganz und rational ausdrücken. Unter Verwendung solcher Vielbeine und ihrer Produkte kann gezeigt werden, daß jede in den Koordinaten von ν Vektoren lineare Form, jedes polyadische Produkt ν^{ter} Ordnung, die Summe ist von skalaren Produkten gewisser, das polyadische Produkt bestimmender Vielbeine und anderer invarianter Vielbeine der ν Vektoren, die ν^{ten} Grades in diesen Vektoren sind. [3]

[1] Vgl. die vorläufige Mitteilung unter dem Titel „Über Binäranalyse und elastische Potentiale", Wien. Anz. v. 26. April 1906.

[2] Vgl. „Über Binäranalyse", Sitzgsber. d. Wien. Ak., Bd. 112, Abt. IIa (im folgenden mit „B" zitiert), und „Über die höheren Vektorgrößen der Kristallphysik als binäre Formen", ebda., Bd. 113, Abt. IIa, p. 1107.

[3] Dieser allgemeine Satz ergibt sich durch Spezialisierung für mehrfachquadratische Formen einer allgemeinen Reihenentwicklung, s. „Über die Reihenentwicklung mehrfachbinärer Formen", Wien. Ber., Bd. CXIII, Abt. IIa, p. 1209. Für spezielle Fälle wird er im folgenden von neuem bewiesen.

In § 2 der vorliegenden Arbeit wird das Zweibein und das aus ihm abgeleitete volle System seiner invarianten Vielbeine betrachtet, sowie die Beziehungen seiner Konstanten zu den Wurzeln der kubischen Resolvente

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0$$

seiner biquadratischen Form. [1])

Hierauf werden in § 3 die vektorischen Produkte eines Vektors $\mathfrak{a}$ behandelt, das sind 1. das Produkt von $\mathfrak{a}$ mit einem Skalar, 2. das vektorische Produkt von $\mathfrak{a}$ mit einem anderen Vektor, 3. das Produkt von $\mathfrak{a}$ mit einem Zweibein, welches der zweiten Überschiebung der Formen des Vektors $\mathfrak{a}$ und des Zweibeines entspricht. Es zeigt sich, daß jeder Affinität des Vektorraumes, die dem Vektor $\mathfrak{a}$ den Vektor $\mathfrak{a}'$ zuweist (also jeder Dyadik [2]) oder linearen Vektorfunktion), ein System von Vielbeinen zugeordnet werden kann, welches aus einem Skalar, einem Vektor und einem Zweibein besteht, und daß der Vektor $\mathfrak{a}'$ die Summe ist der drei genannten vektorischen Produkte des Vektors $\mathfrak{a}$ mit diesen Vielbeinen.

Einem Strain (einer unendlich kleinen Deformation) ist dementsprechend auch ein System von solchen Vielbeinen zugeordnet, ein Skalar $\mathfrak{u}^0$ und ein Vektor $\mathfrak{u}$, die, wie bekannt, die Dilatation resp. die Rotation des Volumelements bestimmen. Nicht bekannt scheint zu sein, daß dem Strain weiters ein Zweibein zugeordnet werden kann, das allein die durch den Strain bewirkten Gestaltsveränderungen oder Scherungen des Volumelements bestimmt. Es folgt demnach, daß die binären Operationen der 0-, 1-, 2ten Überschiebung einer quadratischen Form mit einer Form 0-, 2-, 4ter Ordnung resp. die reinen Dilatationen, Rotationen, Gestaltsveränderungen des Volumelements vollständig charakterisieren.

Ein mit gewissen Symmetrien behaftetes tetradisches Produkt tritt in der Theorie der Elastizität eines anisotropen Mediums auf. Es ergibt sich, daß jedem Punkte O dieses Mediums ein System von 5 elastischen Vielbeinen zugeordnet werden kann, bestehend aus einem Vierbein $\mathfrak{e}^4$, zwei Zweibeinen $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ und zwei Skalaren $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}'^0$. Diese dem Medium immanenten Vielbeine ersetzen die elastischen Koeffizienten der auf die Volumeinheit bezogenen elastischen Energie φ des Volumelements. Diese Energie ist die Summe der skalaren Produkte der elastischen Vielbeine mit den invarianten quadratischen Vielbeinen des Strains:

$$\varphi = \mathfrak{e}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2} + \mathfrak{e}^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}'^2 \cdot \mathfrak{u}^2 \mathfrak{u}^0 + \mathfrak{e}^0 g_2 + \mathfrak{e}'^0 \mathfrak{u}^{0^2},$$

[1]) Diese einfachen Beziehungen lassen den Versuch vielleicht als wünschenswert erscheinen, die einfache Figur des Zweibeines und der beiden ihm assoziierten Zweibeine geometrischen Betrachtungen in der Theorie der elliptischen Funktionen zu Grunde zu legen.

[2]) S. Gibbs-Wilson, Vektoranalysis, p. 265.

wo $\mathfrak{h}^2$ das Zweibein ist, welches der Hesseschen Form der biquadratischen Form von $\mathfrak{u}^2$ entspricht.

Fallen die Teilbeine sämtlicher elastischer Vielbeine in eine Gerade, so ist diese die elastische Isotropieachse und die fünf Teile des letzten Ausdruckes des elastischen Potentials sind linear abgeleitet aus den skalaren Produkten von Potenzen eines Einheitsvektors $\mathfrak{k}$, der auf der Isotropieachse liegt, mit den quadratischen Vielbeinen des Strains, so daß sich die potentielle Energie für diesen Fall ergibt als:

$$c_1\,\mathfrak{k}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2} + c_2\,\mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + c_3\,\mathfrak{k}^2 : \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0 + c_4\,g_2 + c_5\,\mathfrak{u}^{0^2}.$$

Diese fünf skalaren Produkte sind linear ableitbar aus den fünf Beltramischen Invarianten[1]) der elastischen Isotropieachse. Umgekehrt ist ersichtlich, wie sich aus dem soeben angeschriebenen Potential der Isotropieachse durch Verallgemeinerung der speziellen elastischen Vielbeine $\mathfrak{k}^4$, $\mathfrak{k}^2$ das allgemeine Potential φ ergibt.

Verschwinden die elastischen Vier- und Zweibeine identisch, so ist das Medium komplett isotrop und man erhält für seine potentielle Energie:

$$\mathfrak{e}^0 g_2 + \mathfrak{e}'^0 \mathfrak{u}^{02} = 2 K g_2 + {}^1/_2\, H \mathfrak{u}^{02},$$

welcher Ausdruck genau der Helmholtzschen Normalform[2]) dieser Energie entspricht.

Es ergibt sich auch, daß unter Voraussetzung der Poisson-Cauchyschen Hypothese, die besagt, daß die elastischen Kräfte nur von den Entfernungen der Moleküle abhängen, die elastischen Zweibeine $\mathfrak{e}^2$ und $\mathfrak{e}'^2$ eine sehr spezielle Lage gegeneinander annehmen, daß sie sich nämlich nur in ihrer Größe unterscheiden, indem die Relation

$$\mathfrak{e}'^2 = {}^{12}/_7\, \mathfrak{e}^2$$

gilt, und daß ferner zwischen den elastischen Skalaren die Gleichung

$$\mathfrak{e}'^0 = {}^5/_6\, \mathfrak{e}^0$$

besteht, die zu der bekannten Cauchyschen Relation $\lambda = \mu$ führt.

Von den Herren Voigt[3]) und Aron[4]) wurden, ausgehend von den Symmetrieebenen, und von Herrn Minnigerode[5]), aus-

[1]) S. Beltrami, „Note fisicomatematiche", Rend. mat. di Palermo, t. 3, p. 74, und Somigliana, „Sul potenziale elastico", Ann. di. mat. (3), t. VII p. 129.

[2]) S. Helmholtz, Vorlesungen, II, p. 120.

[3]) S. Voigt, „Allgem. Formeln für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten etc.", Wied. Ann., Bd. 16, p. 273.

[4]) S. Aron, „Über die Herleitung der Kristallsysteme aus der Theorie der Elastizität", Wied. Ann., Bd. 20, p. 272.

[5]) S. Minnigerode, „Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elastizität der Kristalle", Gött. Nachr. 1884, p. 195, 374, 488.

gehend von den Symmetrieachsen, die verschiedenen speziellen Systeme elastischer Konstanten für die verschiedenen Kristallgruppen mit Symmetriezentrum, welch letztere bei elastischer Symmetrie allein in Betracht kommen, aufgestellt. Es wurden da zunächst die Systeme elastischer Koeffizienten für die vermöge des postulierten Gesetzes der rationalen Indizes allein möglichen 2-, 3-, 4-, 6zähligen Rotationen spezialisiert und dann durch Kombination acht differente elastische Systeme gefunden, zu welchen noch das System mit einer elastischen Isotropieachse und das der kompletten Isotropie hinzutreten.

Umgekehrt hat Herr Somigliana [1]) gezeigt, daß ein in den Strainkoordinaten quadratisches elastisches Potential vorausgesetzt, dieses nur bei 2-, 3-, 4zähligen Rotationen invariant bleiben kann, wenn anders die Rotationsachse nicht elastisch isotrop ist oder komplette Isotropie herrscht. Er findet durch Betrachtung von in den Strainkoordinaten quadratischen, bei den entsprechenden Rotationen invarianten Ausdrücken die angeführten acht Systeme, ferner die Invarianten, aus welchen sich in jedem einzelnen Falle das Potential linear ableiten läßt.

Werden nun die elastischen Vielbeine des Punktes O der Betrachtung zu Grunde gelegt, so ergibt sich, daß man zu diesen verschiedenen elastischen Systemen gelangt, wenn man allein das Vierbein klassifiziert hinsichtlich der Gruppe von kristallographischen Deckoperationen, die es in sich oder die ihm gleichen Vierbeine überführen, die sich von ihm nur in einer geraden Anzahl der Richtungen der Teilvektoren unterscheiden. Man kann demnach auch auf diese vom elastischen Potential ausgehende Weise, aber auf Grund einfacher geometrischer Betrachtungen, die diversen zehn Potentiale erhalten. Ferner können die jedem Falle entsprechenden Systeme elastischer Vielbeine bestimmt werden. Hiebei ergeben sich auch die invarianten skalaren Produkte, aus welchen sich das Potential im betreffenden Falle linear ableiten läßt.

Jede der Gruppen von Deckoperationen, welche die acht elastischen Systeme, die keine Isotropien besitzen, in sich überführen, ist isomorph zu einer der Gruppen linearer Transformationen, die das System von vier verschiedenen binären Quadriken mit gleicher nicht verschwindender Diskriminante in sich oder in ein durch eine gerade Anzahl von Vorzeichen der Quadriken verschiedenes System transformieren.

Herr Somigliana hat ferner l. c. gezeigt, daß es bei Voraussetzung eines in den Strainkoordinaten kubischen Potentials Fälle geben kann, die dem Gesetze der Rationalität der Indizes widersprechen. Im folgenden wird zum Schlusse auch dem kubischen Teile Φ des elastischen Potentials, der im allgemeinen

[1]) S. Somigliana, l. c., und „Sulla legge di razionalità rispetto alle proprietà elastici dei cristalli“, Rend. delle R. Acc. dei Lincei. (5), t. III, p. 238, und „Sopra gli invarianti ortogonali di deformazioni“, ib. (5), t. IV, p. 25.

56 Konstante besitzt, ein System von zehn elastischen **kubischen** Vielbeinen zugeordnet, und Φ abgeleitet aus den skalaren Produkten dieser Vielbeine und der Vielbeine dritten Grades des Strains. Es folgt dann, daß es ein Φ mit 14 Konstanten gibt, das dem Rationalitätsgesetze widerspricht, wenn nämlich das auftretende kubische Sechsbein zerfällt in ein reguläres Fünfbein und in einen Vektor, der auf der Achse dieses Fünfbeines liegt, in welche dann auch die anderen kubischen und quadratischen Vielbeine fallen. Alle anderen Potentiale, welchen ein nicht in dieser Weise zerfallendes kubisches Sechsbein entspricht, liefern die schon oben angeführten elastischen Symmetrien und eine weitere mit sechszähliger Achse. Sie widersprechen demnach dem Rationalitätsgesetze nicht, nur würde in dem letztangeführten Falle eine sechszählige elastische Symmetrieachse auftreten.

§ 1. Binäre Formen und Vielbeine, Produkte von Vielbeinen.

1. Vektoren und Quadriken. Zunächst soll dem Vektor $\mathfrak{a}$ mit den Cartesischen Koordinaten x, y, z die Quadrik (binäre quadratische Form):

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{a} \equiv a^2 \equiv (a\,\xi)^2 \equiv (a_1\,\xi_2 - a_2\,\xi_1)^2 \equiv A_0\,\xi_1^2 + 2\,A_1\,\xi_1\,\xi_2 + A_2\,\xi_2^2 \equiv \\ \qquad \equiv (x + i\,y)\,\xi_1^2 - 2\,i\,z\,\xi_1\,\xi_2 + (x - i\,y)\,\xi_2^2 \end{cases}$$

zugeordnet werden. Es ist dann

$$(2) \qquad x = {}^1\!/_2\,(A_0 + A_2), \quad y = {}^1\!/_2\,i\,(A_2 - A_0), \quad z = i\,A_1,$$

weshalb die Quadrik umgekehrt den Vektor bestimmt.

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ der Koordinatenachsen haben die Quadriken:

$$(3) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad i\,(\xi_1^2 - \xi_2^2), \quad -2\,i\,\xi_1\,\xi_2.$$

Ist der Vektor $\mathfrak{a}$ reell, sind also die Zahlen x, y, z reell, so hat seine Quadrik (1) konjugierte äußere und einen reinimaginären mittleren Koeffizienten. Eine Quadrik mit dieser Eigenschaft soll, da sie umgekehrt einen reellen Vektor bestimmt, „realisierend“ heißen.

Eine realisierende Quadrik a^2 hat (vgl. „B.“, p. 1543) die Eigenschaft, sich in der folgenden Weise zerlegen zu lassen:

$$(4) \qquad a^2 = i\,\alpha\,\alpha',$$

wobei α, α' Linearformen sind, die in der Beziehung stehen:

$$(5) \quad \alpha = (\lambda + i\,\mu)\,\xi_1 + (\sigma + i\,\tau)\,\xi_2, \quad \alpha' = (\sigma - i\,\tau)\,\xi_1 - (\lambda - i\,\mu)\,\xi_2,$$

worin $\lambda, \mu; \sigma, \tau$ reelle Zahlen sind.

Es gilt der Satz: Sind ε, ε' zwei Linearformen, die in der Beziehung (5) stehen, und ist a^2 eine realisierende Quadrik, so sind $(a\varepsilon)^2$ und $(a\varepsilon')^2$ konjugierte Zahlen.

Verschwindet die Diskriminante

$$A_0 A_2 - A_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

der Quadrik $\mathfrak{a}$, so ist diese Quadrik das Quadrat einer Linearform $\alpha \equiv (\alpha\,\xi)$. Der Vektor α^2 mit der Quadrik α^2 ist dann ein „Nullvektor“, der auf dem Minimalkegel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ liegt (s. „B.“, p. 649).

2. Polyvektoren oder Vielbeine. Ein n-facher Vektor, ein Polyvektor oder ein Vielbein n^{ten} Grades oder kurz ein n-bein $\mathfrak{v}^n$ besteht aus n gleich langen Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots \mathfrak{v}_n$, seinen Teilvektoren, Teilbeinen oder kurz Beinen, die man von dem Punkte O ausgehen lassen kann. Es kann gesetzt werden:

$$\mathfrak{v}^n = \mathfrak{v}_1\, \mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_n.$$

Zwei n-beine, die sich nur in einer geraden Anzahl der Richtungen ihrer Teilbeine unterscheiden, sind als gleich anzusehen.

Das n-bein kann bestimmt werden durch n Richtungen und einen Skalar, der positiv oder negativ sein kann. Der absolute Wert dieses Skalars, die Größe des n-beins, ist gleich dem Produkt der Längen $\overline{\mathfrak{v}_\lambda}$ der Vektoren $\mathfrak{v}_\lambda$. Ist er positiv, so stimmen die Richtungen aller Vektoren $\mathfrak{v}_\lambda$ mit den gegebenen Richtungen überein, oder es kann auch eine gerade Anzahl der $\mathfrak{v}_\lambda$ entgegengesetzt zu diesen Richtungen sein. Ist der Skalar negativ, so ist ein Teilbein oder eine ungerade Anzahl von Teilbeinen des n-beins entgegengesetzt gerichtet zu den gegebenen Richtungen.

Das n-bein kann nach dem Vorstehenden auch bestimmt werden durch ein Einheits-n-bein, dessen sämtliche Teilvektoren die Länge 1 haben, und durch die Größe des n-beins.

Auch n beliebige Vektoren bestimmen ein n-bein, dessen Größe gleich ist dem Produkt der Längen der gegebenen Vektoren.

Fallen die Träger der Teilbeine $\mathfrak{v}_\lambda$ des n-beins $\mathfrak{v}^n$ zusammen, so soll es „speziell“ heißen. Sind alle Teilbeine $\mathfrak{v}_\lambda$ von $\mathfrak{v}^n$ reelle Vektoren, so möge das n-bein „reell“ genannt werden. Ein reelles und spezielles n-bein besteht aus einem k-mal zu zählenden Vektor und aus dem $(n-k)$-mal zu zählenden engegengesetzt gerichteten Vektor.

Die Vielbeine $\mathfrak{v}^2$, $\mathfrak{v}^3$, $\mathfrak{v}^4$ können als Di-, Tri- und Quadrivektoren oder als 2-, 3-, und 4-beine bezeichnet werden; $\mathfrak{v}^0$ ist ein Skalar oder ein Avektor und $\mathfrak{v}^1$ ein Vektor $\mathfrak{v}$.

Es sei eine Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung v^{2n} in das Produkt von n Quadriken $v_\lambda'^2$ zerlegt. Der Quadrik $v_\lambda'^2$ entspricht der Vektor $\mathfrak{v}_\lambda'$. Man kann dann setzen:

$$v^{2n} = \varkappa_1 v_1'^2 \varkappa_2 v_2'^2 \ldots \varkappa_n v_n'^2,$$

wobei das Produkt aller $\varkappa_\lambda$ gleich 1 ist. Ist nun K das Produkt der Längen $\overline{\mathfrak{v}}_\lambda'$ aller Vektoren $\mathfrak{v}_\lambda'$, und wird $\varkappa_\lambda = K^{1/n}/\overline{\mathfrak{v}}_\lambda'$ gesetzt, so hat der Vektor $\mathfrak{v}_\lambda$ mit der Quadrik

$$v_\lambda^2 = \varkappa_\lambda v_\lambda'^2$$

die Länge $K^{1/n}$, und es ist demnach:

$$v^{2n} = v_1^2 v_2^2 \ldots v_n^2$$

eine Zerlegung von v^{2n} in Quadriken, welchen lauter gleich lange Vektoren von der Länge $K^{1/n}$ entsprechen. Folglich entspricht jeder Zerlegung der Form v^{2n} in quadratische Faktoren ein n-bein, dessen Teilbeine in der angegebenen Weise gefunden werden können. Es ist reell, wenn die Quadriken v_λ^2 realisieren.

Ein allgemeines n-bein hat $2n + 1$ Konstante, d. i. so viele, als eine Form v^{2n} der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung hat, oder so viel, als seine n Teilbeine, die von gleicher Länge sind, besitzen.

3. Addition von Vielbeinen. „Sind u^{2n} und v^{2n} die Formen zweier reellen n-beine $\mathfrak{u}^n$ und $\mathfrak{v}^n$, so ist:

$$w^{2n} \equiv u^{2n} + v^{2n}$$

die Form eines reellen n-beins $\mathfrak{w}^n$, das als Summe der $\mathfrak{u}^n$ und $\mathfrak{v}^n$ bezeichnet werden soll, so daß gesetzt wird:

$$\mathfrak{w}^n = \mathfrak{u}^n + \mathfrak{v}^n\text{“}.$$

Denn werden die Formen u^{2n}, v^{2n} in realisierende Quadriken zerlegt, als:

$$u^{2n} = u_1^2 \ldots u_n^2, \quad v^{2n} = v_1^2 \ldots v_n^2,$$

so ist:

$$w^{2n} = u_1^2 \ldots u_n^2 + v_1^2 \ldots v_n^2. \tag{6}$$

Ist nun $\varepsilon = (\varepsilon\,\xi)$ ein Linearfaktor dieser Form, ist also:

$$(w\,\varepsilon)^{2n} = (u_1\,\varepsilon)^2 \ldots (u_n\varepsilon)^2 + (v_1\,\varepsilon)^2 \ldots (v_n\,\varepsilon)^2 = 0,$$

so ist (s. Art. 1) $(u_\lambda\,\varepsilon)^2$ konjugiert zu $(u_\lambda\,\varepsilon')^2$ und $(v_\lambda\,\varepsilon)^2$ konjugiert zu $(v_\lambda\,\varepsilon')^2$ also auch $(w\,\varepsilon')^{2n}$ konjugiert zu $(w\,\varepsilon)^{2n}$, daher $(w\varepsilon')^{2n} = 0$.

Folglich kann gesetzt werden:

$$w^{2n} = c\, i\, \varepsilon_1 \varepsilon_1'\, i\, \varepsilon_2 \varepsilon_2' \ldots i\, \varepsilon_n \varepsilon_n'.$$

Hierin muß nun noch c reell sein, denn nur dann sind hier die Koeffizienten von ξ_1^{2n} und ξ_2^{2n} konjugiert, wie dies in (6) der Fall ist.

„Zu einer Anzahl von reellen n-beinen ist ein bestimmtes reelles n-bein als deren Summe definiert. Diese Addition von n-beinen genügt den formalen Gesetzen der algebraischen Addition".

Z. B. Zwischen den reellen speziellen Zweibeinen[1]) $\mathfrak{i}^2$, $\mathfrak{j}^2$, $\mathfrak{k}^2$ besteht nach (3) die Identität

$$\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{j}^2 + \mathfrak{k}^2 = 0. \tag{7}$$

Das Zweibein $\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{j}^2$ ist demnach das spezielle Zweibein $-\mathfrak{k}^2$, das aus dem Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ und den ihm entgegengesetzten Vektor $-\mathfrak{k}$ besteht.

Multipliziert man ein reelles n-bein mit einem reellen Skalar s, so erhält man wieder ein reelles n-bein, das s-mal so groß ist als das gegebene. Daher kann aus einer Anzahl reeller n-beine mit Hilfe reeller Zahlen wieder ein reelles n-bein linear abgeleitet werden.

4. Ternäre Darstellung von Vielbeinen. Eine in den Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ lineare Form

$$\alpha \mathfrak{i} + \beta \mathfrak{j} + \gamma \mathfrak{k}$$

ist ein Vektor, der reell ist, wenn α, β, γ reelle Zahlen sind. Eine quadratische Form in $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ist ein Zweibein, das demnach aus den sechs Zweibeinen $\mathfrak{i}^2$, $\mathfrak{j}^2$, $\mathfrak{k}^2$, $\mathfrak{j}\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$ linear abgeleitet werden kann. Vermöge der Identität (7) läßt sich dieses Zweibein in die Gestalt setzen:

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{k}\mathfrak{F}^1, \tag{8}$$

wo $\mathfrak{F}^\varkappa$ eine Form $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung in $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ ist. Die Formen $\mathfrak{F}^1$, $\mathfrak{F}^2$ besitzen zusammen die fünf Konstanten des Zweibeins.

Analog ist ein n-bein dargestellt durch eine Form n^{ter} Ordnung in $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, aber auch darstellbar in der Gestalt $\mathfrak{F}^n + \mathfrak{k}\mathfrak{F}^{n-1}$. Die Formen $\mathfrak{F}^n$ und $\mathfrak{F}^{n-1}$ haben zusammen $2n+1$ Koeffizienten, welche zusammen die Konstanten des n-beins geben und als Koordinaten desselben bezeichnet werden können.

Die binäre quadratische Form in $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$:

$$a\mathfrak{i}^2 + b\mathfrak{i}\mathfrak{j} + c\mathfrak{j}^2 \tag{9}$$

---

[1]) Mit $\mathfrak{i}^n$, $\mathfrak{j}^n$, $\mathfrak{k}^n$ soll das spezielle n-bein bezeichnet werden, welches resp. aus dem n-mal gezählten Vektor $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ besteht.

stellt ein reelles Zweibein dar, wenn ihre Koeffizienten reelle Zahlen sind. Dieses liegt in der xy-Ebene, wenn die Wurzeln der Form reell sind, aber in einer durch die z-Achse gehenden Ebene, wenn sie konjugiert sind, wo dann ein zu ihm assoziiertes imaginäres Zweibein in der xy-Ebene liegt.

Ist $b = 0$, so sind die Koordinatenachsen Symmetrielinien des Zweibeins $a\mathfrak{i}^2 + c\mathfrak{j}^2$, und es liegt in der xy-Ebene, wenn a, c entgegengesetzt bezeichnet sind. Es kann auch wegen der Identität (7) ersetzt werden durch

$$(a - c)\,\mathfrak{i}^2 - c\,\mathfrak{k}^2 \quad \text{oder} \quad (c - a)\,\mathfrak{j}^2 - a\,\mathfrak{k}^2,$$

woraus sich ergibt, daß dieses Zweibein, wenn a, c beide positiv sind und $|a| \gtrless |c|$ ist, in der xz- resp. yz-Ebene liegt, und umgekehrt, wenn a, c beide negativ sind.

Allgemein stellt eine Form n^{ter} Ordnung $\mathfrak{F}^n$ in $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ mit reellen Koeffizienten ein reelles n-bein dar, von welchem soviele Teilbeine in der xy-Ebene liegen, als die Form reelle Wurzeln hat und welches soviele weitere Teilzweibeine hat, deren Ebenen durch die z-Achse gehen, als die Form Paare konjugierter Wurzeln besitzt.

5. Produkte von Vielbeinen. Ist $F(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ eine doppeltbinäre Form μ^{ter} Ordnung in ξ und ν^{ter} Ordnung in η, so liefert der Ω-prozeß:

$$\Omega = \frac{1}{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1\, \partial \eta_2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2\, \partial \eta_1}\right)$$

auf F angewendet eine Form von der Ordnung $\mu - 1$ resp. $\nu - 1$ in ξ resp. η. Durch weitere im ganzen k-malige Anwendung dieses Prozesses erhält man eine Form der Ordnungen $\mu - k$, $\nu - k$. Sind nun die beiden binären Formen

$$a^\mu \equiv (a\,\xi)^\mu, \quad b^\nu \equiv (b\,\xi)^\nu$$

gegeben und wird der Ω-prozeß auf das Produkt

$$(a\,\xi)^\mu\,(b\,\eta)^\nu$$

k-mal angewendet und dann $\eta = \xi$ gesetzt, so erhält man eine Form $(\mu + \nu - 2k)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche k^{te} Überschiebung der Formen a^μ und b^ν heißt und mit

$$(a^\mu, b^\nu)^k$$

bezeichnet wird. Die 0^{te} Überschiebung der Formen a^μ, b^ν ist das Produkt dieser Formen.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor mit den Koordinaten x, y, z und der Quadrik $\mathfrak{a}$ [s. Formel (1), Art. 1] und $\mathfrak{b}$ ein Vektor mit den Koordinaten x', y', z' und der entsprechenden Quadrik $\mathfrak{b}$, so ergibt sich durch eine einfache Rechnung: Die erste Überschiebung $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^1$ der Quadriken $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ist die

Quadrik des vektorischen Produktes $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$; diese Quadrik realisiert, wenn die beiden gegebenen Vektoren reell sind, also ihre Quadriken realisieren. Die zweite Überschiebung $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^2$ ist das doppelte skalare Produkt $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Die zweite Überschiebung des Vektors $\mathfrak{a}$ mit sich selbst ist also das doppelte Quadrat seiner Länge:

$$(10) \qquad 2\,(A_0 A_2 - A_1^2) = 2\,\mathfrak{a} . \mathfrak{a};$$

demnach ist die Diskriminante $A_0 A_2 - A_1^2$ der Quadrik $\mathfrak{a}$ gleich dem Quadrat der Länge des Vektors $\mathfrak{a}$. Die schiefe Invariante $[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^1 \mathfrak{c}]^2$ ist das doppelte Tripelprodukt $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) . \mathfrak{c}$ der drei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

Die k^{te} Überschiebung der Formen $v^{2\mu}$ und $v^{2\nu}$ der Vielbeine $\mathfrak{v}^\mu$ und $\mathfrak{v}^\nu$ ist eine simultane Komitante der Quadriken der Teilvektoren dieser Vielbeine und läßt sich als solche durch die Komitanten des vollen Systems dieser Quadriken ausdrücken. Dieses System besteht (s. „B." p. 1093) aus den skalaren und Tripelprodukten, sowie aus den Quadriken der Teilvektoren und den Quadriken der vektorischen Produkte der Teilvektoren. Sind die Vielbeine reell, so sind die Skalare und Tripelprodukte reelle Zahlen und die Quadriken realisieren. Das k^{te} Produkt der Formen $v^{2\mu}$ und $v^{2\nu}$ ist demnach linear und reell ableitbar aus mehreren Formen, welche $\mu + \nu - k$ der letzteren Quadriken zu Faktoren haben und die daher (s. Art. 3) zu reellen $(\mu + \nu - k)$-beinen gehören. Demnach folgt: „Die k^{te} Überschiebung eines reellen μ-beins $\mathfrak{v}^\mu$ und eines reellen ν-beins $\mathfrak{v}^\nu$ definiert ein reelles $(\mu + \nu - k)$-bein, das „k^{tes} Produkt des μ- und ν-beins" genannt und mit

$$\mathfrak{v}^\mu \, \dot{k} \, \mathfrak{v}^\nu$$

bezeichnet werden soll." Kürzer soll das skalare Produkt der beiden ν-beine $\mathfrak{v}^\nu$ und $\mathfrak{v}'^\nu$

$$\mathfrak{v}^\nu \, \dot{\nu} \, \mathfrak{v}'^\nu = \mathfrak{v}^\nu \cdot \mathfrak{v}'^\nu$$

gesetzt werden. Das 0^{te} Produkt $\mathfrak{v}^\mu \, \dot{0} \, \mathfrak{v}^\nu = \mathfrak{v}^\mu \mathfrak{v}^\nu$ der Vielbeine $\mathfrak{v}^\mu$, $\mathfrak{v}^\nu$ ist das Vielbein $(\mu + \nu)^{ter}$ Ordnung, das die Vielbeine $\mathfrak{v}^\mu$, $\mathfrak{v}^\nu$ als Teile enthält. Das 0^{te} Produkt $s \, \dot{0} \, \mathfrak{v}^\nu = s \mathfrak{v}^\nu$ eines Skalars s und eines Vielbeins $\mathfrak{v}^\nu$ ist ein ν-bein, das s-mal so groß ist als $\mathfrak{v}^\nu$ (vgl. Art. 3).

Nach obigem folgt: „Das erste Produkt zweier Vektoren ist gleich ihrem vektorischen Produkt: $\mathfrak{a} \, \dot{1} \, \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, und ihr zweites Produkt ist identisch mit dem doppelten skalaren Produkte der Vektoren: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 2\,\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$. Ihr 0^{tes} Produkt ist das Zweibein $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit diesen Vektoren als Teilbeinen."

„Sind mehrere reelle Vielbeine gegeben, so können durch Bildung ihrer Produkte mit einander und mit sich selbst neue reelle Vielbeine erhalten werden, aus diesen neuen und den früheren durch Produktbildung weitere Vielbeine u. s. w. Alle diese abgeleiteten Vielbeine sind invariant zu den gegebenen für die Gruppe der Drehstreckungen um O.“ Denn die Formen dieser Vielbeine werden durch Überschiebung aus den Formen der gegebenen Vielbeine erhalten, die invariant zu den Formen für die Gruppe der binären linearen Transformationen sind; ferner entsprechen diesen linearen Transformationen im Gebiete der Vektoren die obigen Drehstreckungen (s. „B.“ p. 653).

„Umgekehrt kann jedes invariante Vielbein der gegebenen Vielbeine, dessen Koordinaten (s. Art. 4) ganze rationale Funktionen der Koordinaten der gegebenen Vielbeine sind, durch solche Produktbildungen aus den gegebenen Vielbeinen gefunden werden.“ Dies folgt aus dem Gordanschen Fundamentalsatze der binären Invariantentheorie, daß jede Komitante binärer Formen aus ihnen durch den Prozeß der Überschiebung allein gefunden werden kann und daraus, daß den binären linearen Transformationen die Drehstreckungen von O entsprechen.

Demnach folgt auch, daß man durch den Ω-prozeß (oder dem ihm entsprechenden symbolischen Faltungsprozeß) zu allen Produktbildungen der Vektorrechnung gelangen kann.

„Entsprechend dem endlichen System ihrer binären Formen haben auch mehrere Vielbeine ein volles System, durch dessen Vielbeine sich jedes invariante in den gegebenen Vielbeinen rational und ganze Vielbein rational und ganz ausdrücken läßt.“ Z. B. lassen sich (vgl. oben) alle rationalen und ganzen invarianten Skalare und Vektoren mehrerer Vektoren rational und ganz ausdrücken durch diese Vektoren selbst, ihre skalaren, vektorischen und Tripelprodukte; [1]) hier folgt noch, daß dasselbe für die invarianten Vielbeine der gegebenen Vektoren der Fall ist.

Das volle System eines Zweibeins wird im nächsten Paragraphen behandelt werden. Ein Dreibein $\mathfrak{d}$ besitzt das aus dem System einer Form 6[ter] Ordnung folgende endliche System von Vielbeinen, u. a. das Zweibein $\mathfrak{d} \,{}_4\, \mathfrak{d}$ und fünf invariante Vektoren, darunter den niedrigsten Grades: $(\mathfrak{d} \,{}_4\, \mathfrak{d}) \,{}_4\, \mathfrak{d}$.

§ 2. Das Zweibein und sein System.

6. Die Biquadrik u^4 mit getrennten Linearfaktoren:

$$u^4 = (\alpha\,\xi)\,(\beta\,\xi)\,(\gamma\,\xi)\,(\delta\,\xi) \tag{11}$$

bestimmt ein Tripel von Zweibeinen: $\mathfrak{u}^2, \mathfrak{u}'^2, \mathfrak{u}''^2$, welche auch als assoziierte Zweibeine bezeichnet werden mögen. Denn u^4 läßt sich in drei Weisen in das Produkt zweier Quadriken zerlegen, welchen die Teilvektoren: $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2; \mathfrak{u}_1', \mathfrak{u}_2'; \mathfrak{u}_1'', \mathfrak{u}_2''$ der Zweibeine des Tripels entsprechen.

---

[1]) Vgl. H. Burkhardt, Über Funktionen von Vektorgrößen, welche selbst wieder Vektorgrößen sind. Math. Ann., Bd. 43, S. 197, und „B.“, p. 1093.

Da der Vektor mit der Quadrik $\mathfrak{u}_1 = \alpha\beta$ senkrecht steht auf den Vektoren mit den Quadriken α^2, β^2, weil $\mathfrak{u}_1 \cdot \alpha^2 = \alpha\beta \cdot \alpha^2 = 0$ und ebenso $\mathfrak{u}_1 \cdot \beta^2 = 0$ ist, so gilt: „Die Teilbeine der drei assoziierten Zweibeine stehen senkrecht auf zwei gegenüberliegenden Seitenebenen des Vierkants, das durch die vier Nullvektoren α^2, β^2, γ^2, δ^2 gebildet wird.“ Durch eine einfache geometrische Betrachtung folgt weiter: „Die Ebenen der assoziierten Zweibeine $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}'^2$, $\mathfrak{u}''^2$ sind die Seitenebenen des orthogonalen Diagonaldreikants dieses Vierkants; die Kanten dieses Dreikants sind die Symmetrielinien der Zweibeine.“

„Ist das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ reell, so ist das Teilbein $\mathfrak{u}_1'$ des assoziierten Zweibeins $\mathfrak{u}'^2$ konjugiert zum Vektor $-\mathfrak{u}_2'$, ebenso ist $\mathfrak{u}_1''$ konjugiert zu $-\mathfrak{u}_2''$.“ Denn nach Art. 1 und 3 muß die Form (11) des reellen Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ die Zerlegung

$$i\,\alpha\,\alpha' \quad i\,\beta\,\beta'$$

gestatten, daher auch die Zerlegung in die Quadriken $\alpha\beta$, $-\alpha'\beta'$, die zu konjugierten Vektoren gehören. Dasselbe gilt für die weitere Zerlegung in die Faktoren $\alpha\beta'$, $-\alpha'\beta$.

Einer Biquadrik mit doppeltem Linearfaktor entspricht ein Zweibein, das aus einem Vektor und einem Nullvektor besteht und ein anderes Zweibein, dessen Ebene den Minimalkegel mit dem Scheitel O berührt. Einer solchen Biquadrik kann demnach kein reelles Zweibein entsprechen, ebenso nicht einer Biquadrik mit dreifachem Linearfaktor.

Hat aber die Biquadrik zwei doppelte Linearfaktoren, so entspricht ihr ein spezielles Zweibein; ist sie $= \pm (a^2)^2$, wo die Quadrik a^2 realisiert, so entspricht ihr ein spezielles Zweibein, das je nach dem Zeichen entweder ein doppelt zu zählender Vektor ist oder aus zwei gleichlangen entgegengesetzt gerichteten Vektoren besteht (vgl. Art. 2).

7. Das volle System des reellen Zweibeins $\mathfrak{u}^2$. Es sei $\mathfrak{u} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ ein reelles Zweibein mit den gleichlangen Beinen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Es ist dann

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q} = 2\,\overline{\mathfrak{p}}^2 = 2P, \; \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} = 2\,\overline{\mathfrak{p}}^2 \cos\varphi = 2Q, \tag{12}$$

wo P die Größe, φ der Winkel, Q das skalare Produkt des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ und ferner $R = \overline{\mathfrak{p}}^2 \sin\varphi = P\sin\varphi$ das äußere Produkt des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ heißen möge.

Die Komitanten des vollen Systems der Biquadratik u^4 des Zweibeins ergeben reelle Vielbeine (s. Art. 5), welche das volle System des Zweibeins bilden. Durch diese Vielbeine lassen sich alle rationalen für die Gruppe der Drehstreckungen invarianten Vielbeine von $\mathfrak{u}^2$ rational ausdrücken. Es sind die folgenden Vielbeine, die nach Art. 5 auch durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, P, Q dargestellt werden können:

a) Das Zweibein $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ selbst.

b) Das zweite Produkt desselben mit sich selbst oder das Hessesche Zweibein $\mathfrak{h}^2$ von $\mathfrak{u}^2$:

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} = {}^1/_2\, P(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2) - {}^1/_3\, Q\, \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} \equiv 2\,\mathfrak{h}^2.$$

Es ist dies das durch die Hessesche Form $h = {}^1/_2\,(u^4, u^4)^2$ der Biquadrik u^4 gegebene reelle Zweibein. Man kann zeigen, daß es dieselben Symmetrielinien wie $\mathfrak{u}^2$ hat und daß sein Lot die halbierende Gerade des Winkels φ oder eines Nebenwinkels ist, je nachdem $\varphi \gtrless 90^0$. Ist $\varphi = 90^0$, so ist das Hessesche Zweibein speziell und besteht aus zwei gleichlangen entgegengesetzt gerichteten Vektoren, die auf der Ebene des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ senkrecht stehen und die Länge $P/2$ haben.

c) Das vierte Produkt des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ mit sich selbst oder der Skalar g_2 zweiten Grades in $\mathfrak{u}^2$:

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} = 2\,P^2 + {}^2/_3\, Q^2 = 2\,g_2.$$

Dieser Skalar kann für das reelle Zweibein $\mathfrak{u}^2$ nicht verschwinden.

d) Das erste Produkt der Zweibeine $\mathfrak{u}^2$ und $\mathfrak{h}^2$ oder das Dreibein $\mathfrak{t}^3$:

$$\mathfrak{u}^2 \,\mathrm{i}\, \mathfrak{h}^2 = {}^1/_2\, P(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})\,\mathrm{i}\,(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2) = P(\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{q}^2)\,(\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}) = 2\,\mathfrak{t}^3.$$

Die Teilbeine $\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q}$ von $\mathfrak{t}^3$ liegen auf den winkelhalbierenden Geraden und der Vektor $\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}$ auf dem Lote von $\mathfrak{u}^2$.

Setzt man

$$^2/_3\, Q = -2\,e_1, \quad ^1/_3\, Q \pm P = 2\,e_{2,3},$$

so ist

$$\sum e_1 = 0, \ \sum e_2\, e_3 = -g_2/4, \ e_1\, e_2\, e_3 = g_3/4;$$

Folglich sind die e_1, e_2, e_3 Wurzeln der kubischen Resolvente

$$4\,e^3 - g_2\, e - g_3 = 0 \tag{13}$$

der Biquadrik u^4, und es folgt als Ausdruck des skalaren Produktes und der Größe des Zweibeins

$$Q = -3\,e_1, \ P = e_1 - e_2.$$

8. Unter Anwendung der Bezeichnungen und einiger Resultate einer Abhandlung des Herrn Study[1]) mögen noch einige weitere Folgerungen für das Tripel assoziierter Zweibeine, das durch eine Biquadrik bestimmt ist, abgeleitet werden.

Es werde mit Herrn Study die Biquadrik

$$f = 4\,(r_0\,\xi)\,(r_\lambda\,\xi)\,(r_\mu\,\xi)\,(r_\nu\,\xi)$$

---

[1]) S. Study, „On irrational covariants of certain binary forms“, Am. Journ. t. 17, p. 184 und ferner: „On the connection between binary quartics and elliptic functions, ib. p. 216.

gesetzt. Sie hat die drei irrationalen Kovarianten:

$$\mathfrak{l} = (l\xi)^2, \ \mathfrak{m} = (m\xi)^2, \ \mathfrak{n} = (n\xi)^2,$$

die Faktoren der Kovariante t sind. Es gelten folgende und die aus ihnen durch zyklische Vertauschungen der $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ und λ, μ, ν sich ergebenden Beziehungen:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})^2 = 1, \ (\mathfrak{l}, \mathfrak{m})^2 = 0, \ (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})^1 = -\mathfrak{l}.$$

Ferner ist, wenn $(r_0\xi) = r_0$, $(r_\lambda \xi) = r_\lambda$ gesetzt wird:

$$2\, r_0 r_\lambda = \sqrt{e_\lambda - e_\mu}\, \mathfrak{m} - \sqrt{e_\nu - e_\lambda}\, \mathfrak{n},$$

$$2\, r_\mu r_\nu = -\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\, \mathfrak{m} - \sqrt{e_\nu - e_\lambda}\, \mathfrak{n},$$

$$2\,(r_0 r_\lambda, r_\mu r_\nu)^2 = -3\, e_\lambda,$$

$$2\,(r_0 r_\lambda, r_0 r_\lambda)^2 = -(r_0 r_\lambda)^2 = -(r_\mu r_\nu)^2 = -(e_\mu - e_\nu).$$

Ist

$$G = \tfrac{1}{16}(g_2^3 - 27\, g_3^2)$$

die Diskriminante von f, so ist noch

$$(r_0 r_\lambda)(r_\lambda r_\mu)(r_\mu r_0) = -\sqrt[4]{G},$$

$$(r_\lambda r_\mu)(r_\mu r_\lambda)(r_\lambda r_\nu) = \sqrt[4]{G}.$$

Aus den vorstehenden Studyschen Formeln folgt zunächst, daß die Vektoren $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ die Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Die Quadriken $2\, r_0 r_\lambda$, $2\, r_\mu r_\nu$ bestimmen die Teilvektoren des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$, das durch f gegeben ist. Durch zyklische Vertauschung von λ, μ, ν erhält man aus ihnen die Quadriken der Teilvektoren der beiden anderen dieser Zweibeine $\mathfrak{u}_\mu^2$, $\mathfrak{u}_\nu^2$. Es ist

$$\tfrac{1}{2}(2\, r_0 r_\lambda, \ 2\, r_\mu r_\nu)^2 = -3\, e_\lambda,$$

so daß sich als geometrische Bedeutung der Wurzel e_λ der kubischen Resolvente von f ergibt, daß sie das mit $-\tfrac{1}{3}$ multiplizierte skalare Produkt Q_λ des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ist.

Das Quadrat der Länge des Vektors mit der Quadrik $2\, r_0 r_\lambda$ oder die Größe P_λ des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ist:

$$\tfrac{1}{2}(2\, r_0 r_\lambda, \ 2\, r_0 r_\lambda)^2 = -(e_\mu - e_\nu);$$

daher: die Länge eines Teilbeins des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ist $\sqrt{e_\nu - e_\mu}$.

Sind $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_\lambda$ die Minimalpunkte (Punkte des Minimalkegels mit dem Scheitel O), welche die Endpunkte der Nullvektoren $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_\lambda$ mit den Quadriken r_0^2, r_λ^2 sind, so ist das Quadrat der Entfernung $\overline{\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_\lambda}$ dieser Minimalpunkte,[1]) weil $\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_\lambda \cdot \mathfrak{r}_\lambda = 0$ ist:

$$\overline{\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_\lambda}^2 = - \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{r}_\lambda = -(r_0 r_\lambda)^2 = -(e_\mu - e_\nu) = \overline{\mathfrak{r}_\mu \mathfrak{r}_\nu}^2;$$

daher: Die Seitenlänge des Tetraeders, welches die vier Minimalpunkte $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_\lambda$, $\mathfrak{r}_\mu$, $\mathfrak{r}_\nu$ zu Ecken hat, sind $\sqrt{e_\nu - e_\mu}$.

Das Volumen des Tetraeders, das den Punkt O und die Punkte $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_\lambda$, $\mathfrak{r}_\mu$ zu Ecken hat, ist (s. „B." p. 651)

$$1/_{12}\,(r_0 r_\lambda)(r_\lambda r_\mu)(r_\mu r_0) = -\,1/_{12} \sqrt[4]{G};$$

das Volumen des Tetraeders $O\,r_\lambda\,\mathfrak{r}_\mu\,\mathfrak{r}_\nu$ ist:

$$1/_{12}\,(r_\lambda r_\mu)(r_\mu r_\lambda)(r_\lambda r_\nu) = 1/_{12} \sqrt[4]{G}.$$

Die Teilvektoren des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ergeben sich als:

$$\pm \sqrt{e_\lambda - e_\mu}\,\mathfrak{m} - \sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\mathfrak{n}.$$

Daher ist das vektorische Produkt dieser Teilvektoren:

$$-2\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\mathfrak{m}\,i\,\mathfrak{n} = 2\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\mathfrak{l}.$$

Das Quadrat der Länge dieses vektorischen Produkts ist nun gleich dem Quadrat des äußeren Produktes R_λ des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$, also ist:

$$R_\lambda = 2\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\nu - e_\lambda} = -2i\sqrt[4]{G}\,/\,P_\lambda;$$

daher ist

$$\sqrt[4]{G} = 1/_2\, i\, P_\lambda R_\lambda,$$

folglich auch

$$G = 1/_{16}\, P_\lambda^8 \sin^4 \varphi_\lambda,$$

wo φ_λ der Winkel des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ist.

§ 3. Vektorische Produkte eines Vektors und die Affinitäten des Vektorraumes.

9. Das k^{te} Produkt $\mathfrak{v}^\mu\, k\, \mathfrak{v}^\nu$ eines μ- und eines ν-beins ist ein $(\mu + \nu - k)$-bein (s. Art. 5). Soll daher das k^{te} Produkt eines

[1]) Das doppelte Quadrat der Entfernung der Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist:

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} - 2\,\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Vektors $\mathfrak{a}$ mit einem Vielbein $\mathfrak{v}^{\mu}$ wieder ein Vektor sein, so muß $\mu + 1 - k = 1$, also $k = \mu$ sein. Da nun k höchstens gleich zwei sein kann, so folgt: „Die möglichen vektorischen Produkte eines Vektors $\mathfrak{a}$ mit Vielbeinen sind das 0^{te}, 1^{te}, 2^{te} Produkte des Vektors resp. mit einem Skalar $\mathfrak{u}^0$, einem Vektor $\mathfrak{u}$, einem Zweibein $\mathfrak{u}^2$:

$$(14) \qquad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{u}^0 \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{u}\, i\, \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}.$$

Durch diese Produkte sind dem Vektor $\mathfrak{a}$ resp. die Vektoren $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ zugeordnet, die mit ihm linear variieren. Demnach sind durch die letzten Gleichungen spezielle Affinitäten des Vektorraumes gegeben. Die Affinität $\mathfrak{A}^0$ der ersten Gleichung ist die Streckung der Vektoren im Verhältnis $\mathfrak{u}^0$, die der zweiten liefert zu dem Vektor $\mathfrak{a}$ dessen vektorisches Produkt (im engeren Sinne) mit dem Vektor $\mathfrak{u}$. Die dritte Gleichung gibt eine bisher noch nicht betrachtete Affinität $\mathfrak{A}^2$, die im folgenden Art. besprochen werden soll.

Addiert man die letzten Gleichungen, so erhält man:

$$(15) \qquad \mathfrak{a}' = \mathfrak{u}^2 \dot{\scriptstyle 2}\, \mathfrak{a} + \mathfrak{u}\, i\, \mathfrak{a} + \mathfrak{u}^0 \mathfrak{a}.$$

Diese Gleichung ist wiederum die einer Affinität, und zwar die der allgemeinen Affinität $\mathfrak{A}$ des Vektorraumes, weil $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}^0$, wenn sie allgemein und von einander unabhängig sind, neun Konstante enthalten. Daher: „Durch das System eines Zweibeins $\mathfrak{u}^2$, eines Vektors $\mathfrak{u}$ und eines Skalars $\mathfrak{u}^0$ ist eine Affinität $\mathfrak{A}$ des Vektorraumes bestimmt und umgekehrt gehört zu jeder Affinität ein solches System.“

10. Für die Affinität $\mathfrak{A}^2$ des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$, die durch die Gleichung

$$(16) \qquad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{u}^2 \dot{\scriptstyle 2}\, \mathfrak{a}$$

gegeben ist, läßt sich zunächst der dem Vektor $\mathfrak{a}$ entsprechende Vektor $\mathfrak{a}_2$ leicht konstruieren. Denn es läßt sich (s. Art. 5), sobald das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ in seine Teilvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zerlegt ist, das Produkt $\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{a}$ im System der Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}$ ausdrücken vermöge der Beziehung zwischen deren Quadriken:

$$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^2 = {}^1/_2\, (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})^2\, \mathfrak{q} + {}^1/_2\, (\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^2\, \mathfrak{p} - {}^1/_3\, (\mathfrak{p}, \mathfrak{q})^2\, \mathfrak{a}$$

als:

$$(17) \qquad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{u}^2 \dot{\scriptstyle 2}\, \mathfrak{a} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{a} = {}^1/_2\, \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{q} + {}^1/_2\, \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{p} - {}^2/_3\, Q\, \mathfrak{a}.$$

Demnach ist, wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$ die mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gleich gerichteten Einheitsvektoren sind, vermöge der Formeln (12)

$$\mathfrak{a}_2 = P\left\{\overline{\mathfrak{a}} \cos(\mathfrak{p}, \mathfrak{a})\, \mathfrak{q}_1 + \overline{\mathfrak{a}} \cos(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})\, \mathfrak{p}_1 - {}^2/_3\, \overline{\mathfrak{a}} \cos\varphi\right\}.$$

Der Vektor $\mathfrak{a}_2/P$ wird demnach konstruiert, indem von der Summe der Projektionen des Vektors $\mathfrak{a}$ auf die Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ der mit $^2/_3 \cos\varphi$ multiplizierte Vektor $\mathfrak{a}$ subtrahiert wird. [1])

Vermöge der Affinität $\mathfrak{A}^2$ entsprechen den Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ die Vektoren

$$^1/_3\, Q\mathfrak{p} + P\mathfrak{q},\ P\mathfrak{p} + {}^1/_3\, Q\mathfrak{p};$$

demnach entsprechen den Vektoren $\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q}$ die Vektoren:

$$({}^1/_3\, Q \pm P)(\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q}).$$

Der zum Zweibein senkrechte Vektor $\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}$ übergeht vermöge $\mathfrak{A}^2$ (da $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q} = 0$ ist) in den Vektor

$$-{}^2/_3\, Q\, \mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}.$$

Daher: „Die in den Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ liegenden Vektoren, und zwar die in der Halbierungslinie, der Nebenhalbierungslinie, dem Lote des Zweibeins gelegenen Vektoren, werden vermöge $\mathfrak{A}^2$ resp. multipliziert mit

$$2e_{2,3} = {}^1/_3\, Q \pm P,\ 2e_1 = -{}^2/_3\, Q, \tag{18}$$

worin $e_\varkappa$ die Wurzeln der kubischen Resolvente (13) der Biquadrik u^4 des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ sind (vgl. Art. 7).

11. Der Kegel und die Flächen zweiter Ordnung des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$. Ist $\mathfrak{b}$ ein Vektor, senkrecht zum Vektor $\mathfrak{a}_2$, so muß

$$\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$$

sein. Die Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist demnach symmetrisch.

Ist ferner $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, so genügt der Vektor $\mathfrak{a}$ der Gleichung

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}^2 = 0; \tag{19}$$

er liegt demnach auf einem Kegel zweiter Ordnung K_2, dem Kegel zweiter Ordnung des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$. Folglich gibt die obige symmetrische Beziehung die Polarbeziehung bezüglich K_2, welche dem Träger des Vektors $\mathfrak{a}$ die zum Vektor $\mathfrak{a}_2$ senkrechte Ebene zuweist.

---

[1]) Es ist auch

$$^1/_2\, (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})^2\, \mathfrak{q} + {}^1/_2\, (\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^2\, \mathfrak{p} = (\mathfrak{p}\, (\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^1)^1 + (\mathfrak{q}\, (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})^1)^1 + 2\, Q\, \mathfrak{a},$$

daher:

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,(\mathfrak{q}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{a}) + \mathfrak{q}\,\mathrm{i}\,(\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{a}) + {}^4/_3\, Q\mathfrak{a},$$

woraus sich $\mathfrak{a}_2$ ebenfalls leicht konstruieren läßt.

Ist der Vektor $\mathfrak{a}$ speziell ein Nullvektor, also seine Quadrik gleich dem Quadrate einer Linearform α, und liegt er auf dem Kegel K_2 mit der Gleichung (19), so muß

$$(u^4, \alpha^4)^4 = (u\alpha)^4 = 0$$

sein. Daher: „Die Linearfaktoren der Form u^4 des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ gehören zu Nullvektoren, welche auf den Minimalgeraden des Kegels K_2 des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ liegen." Dieser Kegel ist ein spezieller, nämlich ein „gleichseitiger", da ihm unendlich viele rechtwinklige Dreikante eingeschrieben werden können.[1]) Nach Art. 6 folgt, daß die Teilvektoren des Zweibeins und seiner assoziierten Zweibeine auf den Fokalgeraden dieses Kegels liegen.

Die Gleichung

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}^2 = k \tag{20}$$

ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung F_2 des Zweibeins. Diese Fläche hat den Punkt O zum Mittelpunkt und die Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ zu Achsen, da sie nur von diesem Zweibein und der Konstanten k abhängt. Sie ist „gleichseitig", da auf ihr unendlich viele rechtwinklige Sechsseite liegen.

Man kann die Gleichung (20) der Fläche vermöge (17) auch in die Gestalt setzen:

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a} - {}^2/_3\, Q\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = k. \tag{21}$$

Sind dann $c(\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q})$, $c\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{q}$ Vektoren, die resp. auf den Halbierungslinien oder dem Lote der Zweibeine liegen, und genügen sie der Gleichung (21), so ist:

$$4c^2(P+Q)({}^1/_3\, Q \pm P) = k, \quad -{}^4/_3\, c^2 Q (P^2 - Q^2) = k.$$

Die Quadrate der Längen dieser Vektoren sind aber

$$4c^2(P+Q),\ 2c^2(P^2-Q^2),$$

daher folgt nach (18): „Die Quadrate der Längen der Halbachsen der F_2 sind $k/2e_\varkappa$."

Auch die allgemeine Fläche zweiter Ordnung, die den Punkt O zum Mittelpunkt hat, und welche die Gleichung

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{u}^0\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = 1 \tag{22}$$

besitzt, hat die Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ zu Achsen; ihre unendlich fernen Minimalpunkte haben die Linearformen der Form u^4 des Zweibeins als Formen. Die Quadrate der Halbachsen dieser Fläche sind $1/(2e_\varkappa + \mathfrak{u}^0)$.

[1]) S. hier und im folgenden: „Über die lineare Vektorfunktion als binäre doppeltquadratische Form", Wien. Ber., Bd. 113, Abt. IIa, p. 1089 ff.

12. Duploquadriken und Affinitäten. Es sei

$$(rx)^2\,(sy)^2 \tag{23}$$

eine Duploquadrik (binäre doppeltquadratische Form in den Veränderlichen x und y). Erst Produkte der Koeffizienten der symbolischen Quadrik $(rx)^2$ mit Koeffizienten der symbolischen Quadrik $(sy)^2$ haben hier unsymbolische Bedeutung.

Jede lineare Beziehung zwischen den Quadriken a^2 und a'^2 kann aus einer solchen Duploquadrik abgeleitet werden als:

$$a'^2 = (ra)^2\,(s\xi)^2 = (ra)^2\,s^2.$$

Nun kann man den symbolischen Quadriken $\mathfrak{r} \equiv r^2$, $\mathfrak{s} \equiv s^2$ symbolische Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ entsprechen lassen und aus ihnen das „dyadische" Produkt

$$\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{r}\,;\,\mathfrak{s}$$

bilden. Dann ergibt sich durch Bildung des zweiten Produktes des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Vektor $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{D}$ der Vektor

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\,\mathfrak{s}. \tag{24}$$

Demnach liefert das von der allgemeinen Duploquadrik $(rx)^2\,(sy)^2$ herrührende dyadische Produkt $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{r}\,;\,\mathfrak{s}$ der beiden symbolischen Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ auch die allgemeine Affinität $\mathfrak{A}$ des Vektorraumes.

Durch Anwendung der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung [1]) erhält man für die Duploquadrik

$$\begin{aligned}(rx)^2\,(sy)^2 &= ((u^4, x^2)^2 + (u^2, x^2)^1 + {}^1\!/_3\, u^0 x^2, y^2)^2 = {}^{2)}\\ &= (u^4, x^2 y^2)^4 + (u^2, (x^2, y^2)^1)^2 + {}^1\!/_3\, u^0\, (x^2, y^2)^2,\end{aligned} \tag{25}$$

worin x, y die Linearformen $(x\xi)$, $(y\xi)$ sind und die „Elementarkomitanten" u^0, u^2, u^4 der Duploquadrik durch 0-, 1-, 2malige Anwendung des Ω-prozesses aus ihr gewonnen werden als:

$$u^4 = r^2 s^2,\quad u^2 = (rs)\,rs,\quad u^0 = (rs)^2.$$

Diesen Elementarkomitanten entsprechen die aus den symbolischen Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ durch Bildung ihrer 0^{ten}, 1^{ten} und 2^{ten} Pro-

---

[1]) Vgl. „Über die lineare Vektorfunktion etc." l. c. p. 1081. — Die Bezeichnung $\mathfrak{r}\,;\,\mathfrak{s}$ für die Dyadik Φ von Gibbs-Wilson, l. c. p. 265, rührt von Jaumann her, s. Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig 1905, p. 28.

Das dyadische Produkt $\mathfrak{D}$ kann auch durch eine bilineare Form in den Cartesischen Koordinaten zweier Vektoren gegeben werden oder, wenn man den Vektor nach Art. 4 durch eine ternäre Linearform darstellt, durch das Produkt zweier symbolischer ternären Linearformen.

[2]) S. die in: „Über Reihenentwicklungen etc." l. c. pag. 1211 angegebene Modifikation der Clebsch-Gordanschen Entwicklung.

dukte gebildeten Vielbeine des Produktes $\mathfrak{D}$ oder seiner Affinität $\mathfrak{A}$, nämlich:

$$\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{r}\mathfrak{s}, \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{r}\, i\, \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{u}^0 = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = u^0,$$

wobei $\mathfrak{u}^2$ eines der drei assoziierten Zweibeine sein kann, welche durch die Biquadrik u^4 bestimmt sind. [1])

Werden nun die Nullvektoren mit den Quadriken x^2, y^2 mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnet, so hat man aus (25) als Entwicklung für das dyadische Produkt $\mathfrak{D}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{r}\,;\,\mathfrak{s} &= \mathfrak{u}^2 \cdot (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{x}\, i\, \mathfrak{y} + {}^1\!/_3\, \mathfrak{u}^0\, \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \\ &= (\mathfrak{r}\mathfrak{s}) \cdot (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \mathfrak{r}\, i\, \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{x}\, i\, \mathfrak{y} + {}^1\!/_3\, \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}\, \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}.\end{aligned} \tag{26}$$

Setzt man in (25) $x = a$, $y = \xi$, so ergibt sich für die Quadrik a'^2 des Vektors $\mathfrak{a}'$, welcher dem Vektor $\mathfrak{a}$ mit der Quadrik a^2 vermöge der Affinität $\mathfrak{A}$ entspricht:

$$a'^2 = (u^4, a^2)^2 + (u^2, a^2)^1 + {}^1\!/_3\, u^0\, a^2$$

und demnach die Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}^2\, i_2\, \mathfrak{a} + \mathfrak{u}\, i\, \mathfrak{a} + {}^1\!/_3\, \mathfrak{u}^0\, \mathfrak{a}. \tag{27}$$

Hiedurch ist die durch die Duploquadrik $(rx)^2 (sy)^2$ oder das dyadische Produkt $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{r}\,;\,\mathfrak{s}$ gegebene Affinität im Sinne des Art. 9 in die Summe von vektorischen Produkten des Vektors $\mathfrak{a}$ zerlegt.

Ist die Duploquadrik $(rx)^2 (sy)^2$ symmetrisch in x und y, so liefert sie ein s y m m e t r i s c h e s P r o d u k t $\mathfrak{D}$. Für ein solches Produkt verschwindet dessen Vektor $\mathfrak{u}$. Denn bei Vertauschung von x und y ändert das von u^2 herrührende Glied in (25), sein Zeichen muß also verschwinden, wenn $\mathfrak{D}$ symmetrisch sein soll. Das symmetrische Produkt $\mathfrak{D}$ hängt demnach nur von dem Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und dem Skalar $\mathfrak{u}^0$ ab und seine Affinität hat die Gleichung:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}^2\, i_2\, \mathfrak{a} + {}^1\!/_3\, \mathfrak{u}^0\, \mathfrak{a}.$$

Ändert aber die Duploquadrik $(rx)^2 (sy)^2$ bei Vertauschung von x und y ihr Zeichen, so müssen die Formen u^4, u^0 verschwinden, das Produkt $\mathfrak{D}$ wird ein a n t i s y m m e t r i s c h e s, das nur von dem Vektor $\mathfrak{u}$ abhängt und dessen Affinität die Gleichung hat:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}\, i\, \mathfrak{a}.$$

Durch die Entwicklung (26) ist demnach auch das allgemeine Produkt $\mathfrak{D}$ [und durch (27) seine Affinität] zerlegt in einen symmetrischen Teil, der nur durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und den Skalar $\mathfrak{u}^0$

[1]) Für eine reelle Affinität $\mathfrak{A}$ bestimmt sich dieses Zweibein als reelles unter den der Form u^4 zugeordneten assoziierten Zweibeinen eindeutig (s. den folgenden Art.).

und einen antisymmetrischen Teil, der nur durch den Vektor $\mathfrak{u}$ des Produkts (der Affinität) bestimmt ist. [1])

13. Reelle Affinitäten. „Die durch die Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ gegebene Affinität $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann reell, d. h. jedem reellen Vektor $\mathfrak{a}$ entspricht vermöge $\mathfrak{A}$ wieder ein reeller Vektor $\mathfrak{a}'$, wenn jeder der symbolischen Quadriken $(rx)^2$, $(sy)^2$ realisiert, wenn also gesetzt werden kann (s. Art. 1):

$$(28)\qquad \begin{cases} (rx)^2 = (p+iq)\,x_1^2 - 2il\,x_1x_2 + (p-iq)\,x_2^2 \\ (sy)^2 = (p'+iq')\,y_1^2 - 2il'\,y_1y_2 + (p'-iq')\,y_2^2. \end{cases}$$

Dies kann in der folgenden Weise (allerdings bloß durch Konstantenzählung) bewiesen werden. Durch Multiplikation der Quadriken (27) erhält man die Koeffizienten:

$$(28)\qquad (pp'-qq') + i\,(qp'+pq'),\ 2(ql'-ipl')\ \text{u. s. w.}$$

der Duploquadrik, in welcher erst die reellen Teile und die Faktoren von i unsymbolische Bedeutung haben. Diese neun Zahlen geben aber die Konstanten der allgemeinen Affinität.

Ist nun $\mathfrak{A}$ reell, realisieren also die Quadriken $(rx)^2$ und $(sy)^2$, so sind auch $\mathfrak{u}^0$ und $\mathfrak{u}$ reell. Denn es ist zunächst

$$\mathfrak{u}^0 = pp' + qq' + ll'$$

reell, weil sich dieser Ausdruck in reeller Weise durch die unsymbolischen Koeffizienten (28) der Duploquadrik ausdrückt. Ferner realisiert die Quadrik des Vektors $\mathfrak{u}$ als erste Überschiebung der realisierenden Quadriken r^2, s^2 (vgl. Art. 5).

Die Biquadrik $u^4 = r^2s^2$ ist das Produkt der symbolischen realisierenden Quadriken r^2, s^2; es soll gezeigt werden, daß sie dann auch das Produkt zweier unsymbolischen realisierenden Quadriken ist, so daß sie dann ein reelles Zweibein bestimmt. Man kann nämlich für die symbolischen realisierenden Quadriken r^2, s^2 setzten (s. Art. 1)

$$r^2 = i\alpha\alpha',\quad s^2 = i\beta\beta',$$

wo α, α' und β, β' symbolische Linearformen sind, die in der Beziehung (5) stehen, so daß

$$u^4 = i\alpha\alpha'\ i\beta\beta'.$$

Ist nun $\varepsilon = (\varepsilon\xi)$ ein Linearfaktor der Form u^4, so muß

$$(29)\qquad i\,(\alpha\varepsilon)\,(\alpha'\varepsilon)\,i\,(\beta\varepsilon)\,(\beta'\varepsilon) = 0$$

[1]) Die „konjugierte" Dyadik Φ_c (in der Bezeichnung von Gibbs-Wilson) der Dyadik Φ, welche durch das Produkt $\mathfrak{D}$ gegeben ist, hat die Duploquadrik $(sx)^2(ry)^2$, welche die Elementarkomitanten u^4, $-u^2$, u^0, also die Vielbeine $\mathfrak{u}^2$, $-\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}^0$ besitzt. Ferner sind der Vektor $\Phi_\times$ und der Skalar Φ_s der Dyadik Φ (s. Gibbs-Wilson) gegeben als

$$\Phi_\times = 2\mathfrak{u},\quad \Phi_s = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}.$$

sein, da aber (s. Art. 1) die Produkte

$$i(\alpha\varepsilon)(\alpha'\varepsilon),\ i(\alpha\varepsilon')(\alpha'\varepsilon')$$

konjugiert sind, so ist die linke Seite von (30) konjugiert zu dem Produkte

$$i(\alpha\varepsilon')(\alpha'\varepsilon')\,i(\beta\varepsilon')(\beta'\varepsilon'),$$

das demnach auch verschwindet. Wenn also die Biquadrik u^4 den Faktor ε besitzt, so hat sie auch den Faktor ε'. Daher kann gesetzt werden:

$$u^4 = c\,i\,\varepsilon\varepsilon'\,i\,\eta\eta'. \tag{31}$$

Nun hat das Produkt u^4 der realisierenden symbolischen Quadriken r^2, s^2 nach (28) Koeffizienten von ξ_1^4 und ξ_2^4, die konjugiert sind, daher müssen die Koeffizienten von ξ_1^4, ξ_2^4 in (31) auch konjugiert sein. Weil nun dasselbe von dem Produkte $i\varepsilon\varepsilon' i\eta\eta'$ in (31) gilt, muß c reell sein.

Demnach ist eines der durch die Biquadrik u^4 bestimmten Zweibeine, es sei mit $\mathfrak{u}^2$ bezeichnet, reell, während die beiden anderen ihm assoziierten Zweibeine imaginär sind.

Da die Entwicklung der Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ in die Clebsch-Gordansche Reihe eindeutig ist, so gehört zu dieser Duploquadrik, falls sie eine reelle Affinität darstellt, auch ein bestimmtes System von reellen Vielbeinen $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}^0$.

14. Automorphe Produkte $\mathfrak{D}$. Um die diversen automorphen Produkte $\mathfrak{D} = \mathfrak{r}\,;\,\mathfrak{f}$ zu bestimmen,[1]) das sind solche, die eine Gruppe G von Rotationen um O, Spiegelungen an Ebenen durch O sowie Drehspiegelungen um Achsen durch O gestatten, beachte man, daß diese Transformationen durch lineare Transformationen der binären Veränderlichen x, y der Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ gegeben sind. Diese linearen Transformationen müssen dann die Elementarkomitanten u^4, u^2, u^0 der Duploquadrik in sich überführen und demnach muß die Gruppe G das der Form u^4 entsprechende Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und den u^2 entsprechenden Vektor $\mathfrak{u}$ ungeändert lassen.

Das Produkt $\mathfrak{D}$ soll die Inversion an O gestatten, d. h. sich bei Änderung der Vorzeichen der symbolischen Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{f}$ nicht ändern; demnach gibt eine Spiegelung, die $\mathfrak{D}$ eventuell gestattet, gefolgt von dieser Inversion eine Rotation um 180^0. Folglich braucht man, um alle $\mathfrak{D}$ zu bestimmen, die eine Gruppe G gestatten, nur diejenigen Systeme $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}$ aufzusuchen, die eine Gruppe von Rotationen allein zulassen. Eine auftretende Drehspiegelung könnte, da sie $\mathfrak{u}^2$ nicht verändern soll, nur um 180^0 erfolgen, wäre also mit der a priori gegebenen Inversion identisch.

---

[1]) Die Koeffizientensysteme für diese in Cartesischen Koordinaten gegebenen Produkte s. bei Voigt, Komp. d. Phys., p. 137.

Charakterisiert das Produkt $\mathfrak{D}$ eine physikalische Erscheinung, die dann auch durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$, den Vektor $\mathfrak{u}$ und den Skalar $\mathfrak{u}^0$ von $\mathfrak{D}$ bestimmt ist, so geben die verschiedenen Fälle automorpher $\mathfrak{D}$ die Fälle symmetrischer Erscheinungen. Die Gruppe G des betreffenden automorphen $\mathfrak{D}$ hat dann nach dem F. Neumannschen Grundgesetz die Gruppe der geometrischen oder kristallographischen Symmetrien [1]) als Untergruppe.

Klassifiziert man nun das Zweibein allein je nach der Gruppe, die es gestattet, so erhält man die folgenden Fälle:

I. Fälle ohne Isotropieachse. Das allgemeine Zweibein $\mathfrak{u}^2$ mit fünf Konstanten: $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$, wo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gleichlange Vektoren sind.

I *a*. Es gestattet die Gruppe der Identität; die zugehörige geometrische Symmetrie ist die des triklinen Systems. Der Vektor $\mathfrak{u}$ fällt in keine der Symmetrielinien von $\mathfrak{u}^2$ und liefert drei Konstante. Demnach hat man mit $\mathfrak{u}^0$ zusammen im ganzen $5 + 3 + 1 = 9$ Konstante für $\mathfrak{D}$, was dem allgemeinen Produkte $\mathfrak{D}$ entspricht.

I *b*. $\mathfrak{u}^2$ gestattet die zyklische Gruppe C^2. Die geometrischen Symmetrien, die hier auftreten können, gehören dem monoklinen System an. Der Vektor $\mathfrak{u}$ fällt auf die Achse von C^2 und liefert demnach nur noch eine weitere Konstante, so daß sich zusammen mit $\mathfrak{u}^0$ im ganzen sieben Konstante ergeben. Es ist $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$, $\mathfrak{u} = c\,(\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q})$ oder $\mathfrak{u} = c\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{q}$, $\mathfrak{u}^0$ beliebig. Wird das Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ zu Grunde gelegt, so kann das Zweibein in seiner ternären Darstellung (s. Art. 4)

$$\mathfrak{u}^2 = \alpha_0\,\mathfrak{i}^2 + 2\alpha_1\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j} + \alpha_2\,\mathfrak{j}^2$$

gegeben werden. Dann ist $\mathfrak{u} = \alpha\,\mathfrak{i}$ oder $= \alpha\,\mathfrak{j}$ oder $= \alpha\,\mathfrak{k}$, je nachdem um welche Koordinatenachse die Rotationen der Gruppe, die $\mathfrak{u}^2$ in sich transformiert, erfolgen. Folglich ergeben sich hier die fünf Konstanten α_0, α_1, α_2, α, $\mathfrak{u}^0$, also um zwei Konstante weniger als oben (und ebenso viele wie bei Voigt, l. c.), weil das Zweibein in die angegebene spezielle Lage zum Koordinatensystem gebracht wurde.

I *c*. Die Gruppe C^2 in I *b* erweitert sich durch eine Rotation von 180^0 um eine Achse, die senkrecht ist zur Achse von C^2 zur Vierergruppe V. Hier können die Formen des rhombischen Systems

---

[1]) Die verschiedenen geometrischen Symmetrien oder kristallographischen Gruppen sind nach Schönflies „Kristallsysteme und Kristallstruktur", Leipzig 1891, Voigt, Komp. d. Phys., I., p. 134, durch die folgenden Gruppen charakterisiert. Die Kristallgruppe ist:
triklin: Identität;
monoklin: zyklische Gruppe C^2;
rhombisch: diedrische Gruppe $D^2 =$ Vierergruppe V;
rhomboëdrisch: zyklische Gruppe C^3; diedrische Gruppe D^3;
tetragonal: zyklische Gruppe C^4; diedrische Gruppe D^4;
hexagonal: zyklische Gruppe C^6; diedrische Gruppe D^6;
regulär: Oktaedergruppe, Tetraedergruppe.

auftreten. Der Vektor $\mathfrak{u}$ verschwindet, da er V nicht gestatten kann. Sechs Konstante, da $\mathfrak{u}^2$ und $\mathfrak{u}^0$ beliebig sind. Es kann gesetzt werden $\mathfrak{u}^2 = \alpha_0\, \mathfrak{i}^2 + \alpha_2\, \mathfrak{j}^2$, so daß dann die Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ in die Koordinatenachsen fallen. Mit $\mathfrak{u}^0$ ergeben sich dann nur mehr drei Konstanten.

II. Fälle mit Isotropieachse. Das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ ist speziell: $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{p}$ und gestattet alle Rotationen um seinen Träger. Der Vektor $\mathfrak{u}$, der dieselben Rotationen gestatten soll, hat denselben Träger wie $\mathfrak{u}^2$, also ist $\mathfrak{u} = c\,\mathfrak{p}$, $\mathfrak{u}^0$ beliebig; fünf Konstanten. Die physikalische Erscheinung hat den Träger von $\mathfrak{u}^2$ als Isotropieachse. Zyklische Gruppen der rhomboedrischen, tetragonalen, hexagonalen Kristallsysteme. Es kann gesetzt werden: $\mathfrak{u}^2 = \alpha\, \mathfrak{i}^2$, $\mathfrak{u} = c\, \mathfrak{i}$, wo sich dann mit $\mathfrak{u}^0$ drei Konstanten ergeben.

III. Fall der kompletten Isotropie. $\mathfrak{u}^2$ verschwindet identisch. Gruppe sämtlicher Rotationen um O. Demnach verschwindet auch $\mathfrak{u}$ identisch. Es bleibt nur die Konstante $\mathfrak{u}^0$. Reguläres System oder isotrope Körper.

Symmetrisch sind von den vorstehenden Fällen von vornherein (wegen des Verschwindens von $\mathfrak{u}$) die Produkte $\mathfrak{D}$ der Fälle Ic und III. In den anderen Fällen ergeben sich symmetrische $\mathfrak{D}$, für $\mathfrak{u} \equiv o$, so daß es im ganzen fünf Klassen symmetrisch-automorpher $\mathfrak{D}$ gibt.

§ 4. Unendlich kleine Deformationen und elastische Isotropien.

15. Eine unendlich kleine Deformation oder ein Strain kann durch ein Produkt $\mathfrak{D} = \mathfrak{r}\,;\,\mathfrak{f}$ gegeben werden. Vermöge dieses Strains entspricht dem Vektor $\mathfrak{a}$ der Verrückungsvektor $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}\,\mathfrak{f}$, der nach (27) auch in die Gestalt gesetzt werden kann:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}^2 \dot{\mathfrak{z}}\, \mathfrak{a} + \mathfrak{u}\, \mathfrak{i}\, \mathfrak{a} + {}^1\!/_3\, \mathfrak{u}^0\, \mathfrak{a}. \tag{32}$$

Der Strain zerfällt demnach in drei Teile, welche resp. durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ des Strains, den Vektor $\mathfrak{u}$ und den Skalar $\mathfrak{u}^0$ des Strains gegeben sind.

Ist der Strain rein, also $\mathfrak{r}\,;\,\mathfrak{f}$ symmetrisch, so ist $\mathfrak{u} \equiv 0$; er hat dann nach (17) die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}' &= \mathfrak{u}^2 \dot{\mathfrak{z}}\, \mathfrak{a} + {}^1\!/_3\, \mathfrak{u}^0\, \mathfrak{a} \\ &= {}^1\!/_2\, \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{q} + {}^1\!/_2\, \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{p} - {}^1\!/_3\, (2\,Q - \mathfrak{u}^0)\, \mathfrak{a}. \end{aligned} \tag{33}$$

Nach Art. 10 kann dieser Vektor $\mathfrak{a}'$ leicht konstruiert werden, wenn das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ des Strains und ein Skalar $\mathfrak{u}^0$ gegeben sind. Man bestimme die Durchstoßpunkte A, B des Halbstrahls, der von O ausgeht und die Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ hat, mit den ein für allemal gezeichneten Kugeln mit dem Zentrum O und den Radien P und ${}^2\!/_3\, P \cos\varphi - \mathfrak{u}^0$; ferner bestimme man die Summe OC der Projektionen des Vektors OA auf die Träger der Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Dann ist $\mathfrak{a}'$ gleichgerichtet mit dem Vektor BC und $\overline{\mathfrak{a}}$-mal so groß.

Sind $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zwei zueinander senkrechte Vektoren, so hat man die folgenden Vielbeine einer:

Dehnung längs $\mathfrak{v}$:	$\mathfrak{v}\,\mathfrak{v},\ 0,\ \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}/6$;
Querkontraktion gegen $\mathfrak{v}$:	$\mathfrak{v}\,\mathfrak{v},\ 0,\ -\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}/3$;
Einfachen Scherung:	$\mathfrak{v}\,\mathfrak{w},\ \mathfrak{v}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{w},\ 0$;
Doppelscherung:	$\mathfrak{v}\,\mathfrak{w},\ 0,\ 0.$

16. Es soll nun der Teil des Strains betrachtet werden, der allein durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ gegeben ist, der **Zweibeinstrain**. Er ordnet dem Vektor $\mathfrak{a}$ den Vektor

$$(34)\qquad \mathfrak{u}^2 \dot{,}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\, \dot{,}\, \mathfrak{a} = {}^1\!/_2\, \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{q} + {}^1\!/_2\, \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{p} - {}^2\!/_3\, Q\,\mathfrak{a}$$

zu.[1]) Den Vektoren $\mathfrak{p}\pm\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}$, die resp. auf den Halbierungslinien und dem Lote des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ liegen, entsprechen (s. Art. 10) vermöge dieses Strains die Vektoren

$$({}^1\!/_3\, Q \pm P)(\mathfrak{p}\pm\mathfrak{q}),\ -{}^2\!/_3\, Q\,\mathfrak{p}\,\mathrm{i}\,\mathfrak{q}.$$

Demnach sind diese Geraden Hauptachsen des Strains und die entsprechenden Hauptdilatationen sind (s. Art. 7):

$$35)\qquad \tau_{2,3} = {}^1\!/_3\, Q \pm P = 2\,e_{2,3},\ \tau_1 = -{}^2\!/_3\, Q = 2\,e_1.$$

Daher: Die Hauptdilatation des Zweibeinstrains längs des Lotes des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ ist $-{}^2\!/_3$mal dem skalaren Produkt dieses Zweibeins.[2])

Aus (35) ergibt sich, daß die durch den Zweibeinstrain hervorgerufene Volumdilatation, die durch $\tau_1+\tau_2+\tau_3$ gegeben ist, verschwindet.[3]) Daher: Durch den Skalar $\mathfrak{u}^0$ des allgemeinen Strains von der Gestalt (32) ist wie bekannt die durch den Strain bewirkte Dilatation des Volumelements gegeben, durch den Vektor die Rotation des Volumelements. „**Das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ eines Strains bestimmt denjenigen Teil des Strains, der allein eine Gestaltveränderung des Volumelements hervorruft.**

---

[1]) Ein solcher spezieller Strain ist die Doppelscherung (s. Art. 15); nur stehen bei dieser die Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ (die in Art. 15 mit $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bezeichnet wurden) aufeinander senkrecht.

[2]) Die beiden anderen Hauptdilatationen werden ebenso aus den skalaren Produkten der zu $\mathfrak{u}^2$ assoziierten Zweibeine gefunden.

[3]) Hiezu kann man auch gelangen, indem man den durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ gegebenen Strain durch die Dyadik:

$$\Phi = {}^1\!/_2\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} + {}^1\!/_2\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p} - {}^1\!/_3\,\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}\,\mathrm{I}$$

gegeben denkt. Es ist dann die Volumdilatation gleich dem Skalar der Dyadik

$$\Phi_s = {}^1\!/_2\,\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + {}^1\!/_2\,\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{p} - {}^1\!/_3\,\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}\,\mathrm{I}_s = 0,$$

da der Skalar I_s des Idemfaktors I gleich 3 ist.

Dieser Teil des Strains wird also durch Bildung des zweiten Produkts des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Zweibein $\mathfrak{u}^2$ gefunden; er erscheint daher allein durch die binäre Operation der zweiten Überschiebung charakterisiert, während sich die Teile der Dilatation und der Rotation des Volumelements durch 0^{te} und 1^{te} Überschiebung ergeben.

Für den reinen Strain (33) tritt zu den Hauptdilatationen des Zweibeinstrains noch die Dilatation $\frac{1}{3}\mathfrak{u}^0$, die von dem Gliede $\frac{1}{3}\mathfrak{u}^0\mathfrak{a}$ des Strains hervorgerufen wird, so daß die Hauptdilatationen dieses reinen Strains sind:

$$\sigma_\varkappa = \tau_\varkappa + \tfrac{1}{3}\mathfrak{u}^0 = 2e_\varkappa + \tfrac{1}{3}\mathfrak{u}^0. \tag{36}$$

Die Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ sind auch hier die Hauptachsen des Strains; die Hauptdilatation längs des Lotes des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ ist:

$$\sigma_3 = \tfrac{1}{3}(\mathfrak{u}^0 - 2Q).$$

17. Die auf die Volumeinheit bezogene **potentielle Energie** φ **des Volumelements eines elastischen isotropen Mediums** mit dem durch Gleichung (33) gegebenen reinen Strain ist in der **Helmholtzschen Normalform** ausgedrückt durch

$$\varphi = \tfrac{1}{3}K\sum(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \tfrac{1}{2}H(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Hierin ist nach (36), da $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ist:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \mathfrak{u}^0,$$

$$\sum(\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 4\sum(e_2 - e_3)^2 = -24\sum e_2 e_3 = 6g_2.$$

Daher ist

$$\varphi = 2Kg_2 + \tfrac{1}{2}H\mathfrak{u}^{0\,2}.$$

Hierin ist der erste Teil allein durch das Zweibein des Strains, der zweite Teil allein durch den Skalar des Strains bestimmt.[1])

Vermöge des im Art. 7 für g_2 gegebenen Ausdruckes ist auch:

$$2\varphi = KP^2 + \tfrac{1}{3}KQ^2 + H\mathfrak{u}^{0\,2} =$$

$$= KP^2(1 + \tfrac{1}{3}\cos^2\varphi) + H\mathfrak{u}^{0\,2}.$$

Daher setzt sich die aus dem Widerstande gegen Gestaltsveränderungen herrührende Energie weiters aus zwei Teilen zusammen, die resp. proportional sind dem Quadrate der Größe und dem Quadrat des skalaren Produkts des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ des Strains.

---

[1]) Dieser Ausdruck für die Energie des isotropen Mediums wird in Art. 27 nochmals direkt abgeleitet werden. Nach obigem ist auch

$$\varphi = K\mathfrak{r}\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{s} + H\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{s}\;\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{s}.$$

Der Vektor $\mathfrak{a}''$ des Streß, der durch den Strain bewirkt wird, wird durch Differentiation von $-\varphi$ nach den Strainkoordinaten gefunden. Das dyadische Produkt des Streß in der Form (26) ergibt sich daher aus:

$$-\varphi = -K\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f} - {}^1\!/_2\, H\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}\;\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}$$

durch Evektantenbildung bezüglich $\mathfrak{r}\mathfrak{f}$ als

$$-2K\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y} - H\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}\;\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{z};$$

daher folgt:

$$\mathfrak{a}'' = -2K\mathfrak{r}\mathfrak{f}_{\dot 2}\,\mathfrak{a} - H\mathfrak{u}^0\mathfrak{a} = -2K\mathfrak{u}^2{}_{\dot 2}\,\mathfrak{a} - H\mathfrak{u}^0\mathfrak{a}.$$

Auch dieser Vektor kann nach Art. 10 leicht konstruiert werden, wenn das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und der Skalar $\mathfrak{u}^0$ des Strains sowie der Vektor $\mathfrak{a}$ gegeben sind.

18. Ausdrücke der Formen des Strains durch die Strainkoordinaten. Es seien die Gleichungen des Strains, dessen Koordinaten $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ sind:

$$\text{(37)}\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x_x\, x + {}^1\!/_2\, x_y\, y + {}^1\!/_2\, x_z\, z \\ y' &= {}^1\!/_2\, y_x\, x + y_y\, y + {}^1\!/_2\, y_z\, z \\ z' &= {}^1\!/_2\, z_x\, x + {}^1\!/_2\, z_y\, y + z_z\, z \end{aligned}\right.$$

wo x, y, z; x', y', z' resp. die Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ sind.

Führt man nach (2) statt der Koordinaten x, y, z die Koeffizienten des Quadrik $\mathfrak{a}$ ein, so erhält man

$$x' = {}^1\!/_2\, x_x(A_0 + A_2) + i\,x_y(A_2 - A_0) + {}^1\!/_2\, i\,z_x A_2, \text{ u. s. w.}$$

und hieraus nach (1) die Quadrik des Vektors $\mathfrak{a}'$. Wird hierin y statt ξ geschrieben und

$$A_0 = x_2^2,\; A_1 = -x_1 x_2,\; A_2 = x_1^2$$

gesetzt, so ergibt sich als Duploquadrik des Strains:

$$\begin{aligned} &{}^1\!/_2 \left\{ (x_x + y_y)\, x_2^2 + (x_x - y_y + i\,x_y)\, x_1^2 + (y_z - i\,z_x)\, x_1 x_2 \right\} y_1^2 + \\ &{}^1\!/_2 \left\{ (x_x - y_y - i\,x_y)\, x_2^2 + (x_x + y_y)\, x_1^2 - (y_z - i\,z_x)\, x_1 x_2 \right\} y_2^2 + \\ &{}^1\!/_2 \left\{ -(y_z + i\,z_x)\, x_2^2 + (y_z - i\,z_x)\, x_1^2 - 4 z_z\, x_1 x_2 \right\} y_1 y_2 . \end{aligned}$$

Wird hier $x = y = \xi$ gesetzt, so erhält man die Elementar Komitante u^4 dieser Duploquadrik oder die Biquadrik des Zweibeins u^2 des Strains als:

$$\begin{aligned} u^4 &\equiv {}^1\!/_2\,(x_x - y_y + i\,x_y)\,\xi_1^4 + (y_z - i\,z_x)\,\xi_1^3\xi_2 + (x_x + y_y - 2z_z)\,\xi_1^2\xi_2^2 \\ &\quad + {}^1\!/_2\,(x_x - y_y - i\,x_y)\,\xi_2^4 - (y_z + i\,z_x)\,\xi_1\xi_2^3 \equiv \\ &\equiv u_0\,\xi_1^4 + 4u_1\,\xi_1^3\xi_2 + 6u_2\,\xi_1^2\xi_2^2 + 4u_3\,\xi_1\xi_2^3 + u_4\,\xi_2^4 . \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Ω-prozesses an der letzten Duploquadrik erhält man ferner:

$$\tfrac{1}{2}(x_x + y_y + z_z)(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Setzt man hier $y = x = \xi$, so erhält man identisch 0, was dem Umstande entspricht, daß die Elementarkomitante u^2 der Duploquadrik identisch verschwindet, da hier ein reiner Strain vorliegt.

Durch Anwendung des Ω-prozesses an der letzten bilinearen Form erhält man schließlich die Elementarinvariante der Duploquadrik:

$$u^0 = x_x + y_y + z_z.$$

19. Die fünf Invarianten bei elastischer Isotropieachse. Hat das Medium eine elastische Isotropieachse und wird diese als z-Achse gewählt, so läßt sich nach Beltrami die potentielle Energie aus den folgenden, bei Rotationen um die z-Achse invarianten in den Strainkoordinaten quadratischen Ausdrücken:

$$B_1 = z_z^2,\ B_2 = (x_x + y_y)^2,\ B_3 = (x_x + y_y)\, z_z,\ B_4 = x_x\, y_y - \tfrac{1}{4}\, x_y^2,$$

$$B_5 = \tfrac{1}{4}\,(y_z^2 + x_z^2)$$

linear ableiten.

Diese fünf Beltramischen Invarianten lassen sich ersetzen durch Produkte $\mathfrak{P}_k$, die gebildet werden aus dem Zweibein $\mathfrak{u}^2$, dem Skalar $\mathfrak{u}^0$ des Strains und einem Vektor $\mathfrak{z}$, der auf der Isotropieachse liegt. Denn die B_k sind invariant für alle Rotationen um O und multiplizieren sich bei einer Streckung mit dem Zentrum O mit einem Faktor; daher müssen sie bei allen binären linearen Transformationen invariant bleiben und sich folglich durch die Invarianten des vollen Systems der Formen u^4, u^0 und der Quadrik $\mathfrak{z}$ ausdrücken lassen. Da aber die B_k quadratisch in den Strainkoordinaten sind, kommen hiezu nur die Invarianten des Systems in Betracht, die in den Koeffizienten von u^4 und in u^0 höchstens vom zweiten Grade sind.[1]) Es sind dies die Invarianten (vgl. Art. 7)

$$(u^4, \mathfrak{z}^2)^4,\ g_2,\ (\mathrm{h}, \mathfrak{z}^2)^4,\ (\mathfrak{z}, \mathfrak{z})^2.$$

Demnach ergeben sich durch Hinzutreten von $u^0 = \mathfrak{u}^0$ die folgenden invarianten Produkte

$$\mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{u}^0\, \mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{z}^2,\ (\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{z}^2)^2,\ g_2,\ f^2 \cdot \mathfrak{z}^2,\ \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z}.$$

---

[1]) Bezüglich des Systems einer Biquadrik und einer Quadrik s. Clebsch, Binäre Formen, p. 212.

Nun kann angenommen werden, daß der Vektor $\mathfrak{z}$ der Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ ist, so daß $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z} = 2$ gesetzt werden kann und sich ergibt: Die bei einer elastischen Isotropieachse, welche den Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ trägt, auftretenden invarianten Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{u}^{0^2}, \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{u}^0 \mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{k}^2, \mathfrak{P}_3 = (\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{k}^2)^2, \ \mathfrak{P}_4 = g_2, \mathfrak{P}_5 = \mathfrak{h}^2 \cdot \mathfrak{k}^2;$$

aus ihnen läßt sich die potentielle Energie des Mediums linear ableiten.

Die Produkte $\mathfrak{P}_k$ müssen sich durch die Invarianten B_k linear ausdrücken lassen. Zunächst ist

$$\mathfrak{P}_1 = (x_x + y_y + z_z)^2 = B_1 + B_2 + 2\,B_3.$$

Ferner hat nach (3) der Vektor $\mathfrak{k}$ die Quadrik $-\,2\,i\,\xi_1\,\xi_2$, also hat $\mathfrak{k}^2$ die Quadrik $-\,4\,\xi_1^2\,\xi_2^2$; da nun $[\mathfrak{u}^2\,\mathfrak{k}^2] = -\,4\,u_2$ ist, so ist

$$\mathfrak{P}_2 = -\,4\,u_2\,\mathfrak{u}^0 = \tfrac{2}{3}\,(2\,B_1 - B_2 + B_3).$$

Es gilt ferner für die folgenden Produkte der Koeffizienten von u^4:

$$u_0\,u_4 = {}^1\!/_4\,B_2 - B_4,\ u_1\,u_3 = {}^1\!/_4\,B_5,\ u_2^2 = {}^1\!/_9\,(B_1 + {}^1\!/_4\,B_2 - B_3);$$

daher ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_3 &= {}^{16}\!/_9\,(B_1 + {}^1\!/_4\,B_2 - B_3),\\
\mathfrak{P}_4 &= {}^1\!/_3\,(B_1 + B_2 - B_3 - 3\,B_4 - 3\,B_5),\\
\mathfrak{P}_5 &= -\,{}^2\!/_3\,(2\,B_1 + {}^3\!/_4\,B_2 - 2\,B_3 - B_4 + 4\,B_5).
\end{aligned}$$

§ 5. Die immanenten Vielbeine elastischer Medien.

20. Die potentielle Energie φ eines elastischen anisotropen Mediums ist eine in den Koordinaten $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ des reinen Strains quadratische Form gegeben durch:

$$2\,\varphi \equiv c_{11}\,x_x^2 + 2\,c_{12}\,x_x\,y_y + 2\,c_{13}\,x_x\,z_z + \cdots + 2\,c_{56}\,z_x\,x_y + c_{66}\,x_y^2,$$

wo die 21 Koeffizienten c_{kh} die elastischen Konstanten sind.

Demnach läßt sich φ, sobald der Strain durch die Duploquadrik $(r\,x)^2\,(s\,y)^2$ gegeben wird, darstellen als homogene Funktion zweiten Grades der Koeffizienten dieser Duploquadrik, also der Koeffizienten ihrer Elementarkovariante u^4 und ihrer Elementarinvariante u^0. Da φ ferner bei Transformationen auf ein anderes Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O ungeändert bleibt, ist φ eine simultane Invariante der Komitanten u^4, u^0. Nun sind u^4, h, g_2 die Komitanten ersten und zweiten Grades von u^4 (s. Art. 7); daher sind die Komitanten zweiten Grades von u^4 und u^0 und damit der Duploquadrik:

$$u^{4^2},\ u^4\,u^0,\ h,\ g_2,\ u^{0^2}.$$

Sind folglich

$$e^8, e^4, e'^4, e^0, e'^0$$

beliebige Formen der Ordnung des angeschriebenen Exponenten, so ist

$$\varphi = (e^8, u^{42})^8 + (e^4, u^4)^4 u^0 + (e'^4, h)^4 + e^0 g_2 + e'^0 u^{02}.$$

Ersetzt man den Strain durch sein Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und seinen Skalar $\mathfrak{u}$ so ergibt sich: „Aus der Forderung eines in den Strainkoordinaten $x_x, \cdots x_y$ quadratischen und homogenen elastischen Potentials ergibt sich, daß dasselbe in fünf Teile gespalten werden kann, die resp. durch ein Vierbein, zwei Zweibeine und zwei Konstante gegeben sind. Jedem Punkte des elastischen anisotropen Mediums ist also ein System von elastischen Vielbeinen $\mathfrak{e}^4, \mathfrak{e}^2, \mathfrak{e}'^2, \mathfrak{e}^0, \mathfrak{e}'^0$ zugeordnet, welche, wenn sie allgemein und von einander unabhängig sind, die 21 elastischen Konstanten liefern. Die fünf Teile des Potentials sind die skalaren Produkte dieser Vielbeine mit den quadratischen Vielbeinen

$$\mathfrak{u}^{2^2}, \mathfrak{u}^2 \mathfrak{u}^0, \mathfrak{h}^2, g_2, \mathfrak{u}^{0^2}$$

des Strains; es ist also

$$\varphi \equiv \mathfrak{e}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2} + \mathfrak{e}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 \mathfrak{u}^0 + \mathfrak{e}'^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}^2 g_2 + \mathfrak{e}'^0 \mathfrak{u}^{0^2 \text{“}}. \tag{38}$$

Bestimmt man die Vielbeine $\mathfrak{e}^4, \mathfrak{e}^2, \mathfrak{e}'^2$ resp. durch die Einheitsvielbeine $\mathfrak{E}^4, \mathfrak{E}^2, \mathfrak{E}'^2$ und die Skalare $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, so hat man auch:

$$\varphi \equiv \varepsilon_1 \mathfrak{E}^4 \cdot \mathfrak{u}^{22} + \varepsilon_2 \mathfrak{E}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 \mathfrak{u}^0 + \varepsilon_3 \mathfrak{E}'^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}^0 g_2 + \mathfrak{e}'^0 \mathfrak{u}^{02}.$$

Nunmehr sind die elastischen Einheitsvielbeine $\mathfrak{E}^4, \mathfrak{E}^2, \mathfrak{E}'^2$ nur durch Richtungen gegeben, und zur vollen Charakterisierung des Mediums die fünf elastischen Skalare $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \mathfrak{e}^0, \mathfrak{e}'^0$ anzugeben.

21. Das tetradische elastische Produkt $\mathfrak{E}$. Das tetradische Produkt

$$\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{e}; \mathfrak{f}; \mathfrak{l}; \mathfrak{m}$$

ist gegeben durch die vierfache Quadrik

$$\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{e}; \mathfrak{f}; \mathfrak{l}; \mathfrak{m} \equiv (e x)^2 (\mathfrak{f} \mathfrak{y})^2 (l z)^2 (m t)^2$$

wo $(e x)^2, (\mathfrak{f}\mathfrak{y})^2, (l t)^2, (m t)^2$ symbolische Quadriken mit den Veränderlichen x, y, z, t sind. Es weist dem dyadischen Produkt $\mathfrak{r}; \mathfrak{s}$ das Produkt

$$\mathfrak{r}'; \mathfrak{s}' = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{r} \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{s} \mathfrak{m}; \mathfrak{n} \tag{39}$$

zu und soll reell heißen, wenn vermöge der letzten Gleichung jedem reellen Produkt $\mathfrak{r}; \mathfrak{s}$ ein reelles $\mathfrak{r}'; \mathfrak{s}'$ entspricht. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die symbolischen Quadriken $\mathfrak{e} = e^2$, $\mathfrak{f} = f^2$, $\mathfrak{l} = l^2$, $\mathfrak{m} = m^2$ realisieren, was ähnlich wie der entsprechende Satz des Art. 2 bewiesen werden kann.

Die Gleichung (39) gibt auch, wenn $\mathfrak{T}$ allgemein ist, die allgemeine lineare Beziehung zwischen dyadischen Produkten.

Es sei nun $\mathfrak{T}$ symmetrisch in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, ferner auch in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{l}$ so daß die Identitäten bestehen:

$$(40) \qquad \mathfrak{e};\mathfrak{f};\mathfrak{l};\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{f};\mathfrak{e};\mathfrak{l};\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{l};\mathfrak{f};\mathfrak{e};\mathfrak{m}.$$

Ein Produkt mit diesen Symmetrien ist das elastische Produkt $\mathfrak{E}$, aus welchem und aus dem dyadischen Produkte $\mathfrak{r};\mathfrak{s}$ des Strains das Potential φ des elastischen anisotropen Mediums gefunden wird durch

$$2\varphi \equiv \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{s}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}.$$

Der dem Strain entsprechende Streß wird dann (vgl. Art. 17) aus diesem Ausdruck durch Evektantenbildung gefunden als:

$$\mathfrak{r}';\mathfrak{s}' = -\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{s}\mathfrak{l};\mathfrak{m}.$$

22. Entwicklung des Produkts $\mathfrak{E}$. Wegen der Identitäten (40) kann $\mathfrak{E}$ gefunden werden, indem man die Entwicklungen der symmetrischen dyadischen Produkte:

$$\mathfrak{e};\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y} + {}^1/_3\, \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$$
$$\mathfrak{l};\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t} + {}^1/_3\, \mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}$$

miteinander multipliziert, so daß sich ergibt

$$\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y}\,\mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t} + {}^1/_9\, \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t} +$$
$$+ {}^1/_3\, (\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + {}^1/_3\, (\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}).$$

Wendet man nun auf das erste Produkt rechts in dieser Gleichung, in welchem $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}\mathfrak{m}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{t}$ Biquadriken sind, die Clebsch-Gordansche Reihenentwicklung an, so erhält man:[1])

$$\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + 2(\mathfrak{e}\mathfrak{f}_1\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + {}^{12}/_7\, (\mathfrak{e}\mathfrak{f}_2\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}\mathfrak{t})$$
$$+ {}^4/_5\, (\mathfrak{e}\mathfrak{f}_3\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + {}^1/_5\, (\mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{l}\mathfrak{m})(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t}).$$

Wird dies in die letzte Entwicklung von $\mathfrak{E}$ eingesetzt, dann die $\mathfrak{E}$ nicht verändernde Vertauschung von $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{m}$ vorgenommen und das Resultat zu $\mathfrak{E}$ addiert, die Summe halbiert, so fallen die Glieder aus, welche ungerade Überschiebungen von $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{l}\mathfrak{m}$ enthalten, da sie bei der angegebenen Vertauschung ihr Zeichen ändern, so daß sich schließlich ergibt:

$$(41) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E} \equiv\; & \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + {}^1/_6\, (\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m} + \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}) + \\ & + {}^{12}/_7\, (\mathfrak{e}\mathfrak{f}_2\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + {}^1/_5\, (\mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + {}^1/_9\, \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}. \end{aligned}$$

[1]) Es werden hier und im folgenden statt der Zeichen für Überschiebungen die Bezeichnungen der eingeführten entsprechenden Produkte verwendet.

Demnach ist $\mathfrak{E}$ entwickelt in die Summe von fünf Gliedern, in welchen der Reihe nach die Elementarkomitanten

$$\mathfrak{e}^4 \equiv \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m},\ \mathfrak{e}^2 \equiv {}^1/_6\,(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m} + \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}) \tag{42}$$
$$\mathfrak{e}'^2 \equiv {}^{24}/_7\,\mathfrak{e}\mathfrak{f}\overset{.}{_2}\mathfrak{l}\mathfrak{m},\ \mathfrak{e}^0 = {}^2/_5\,\mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{l}\mathfrak{m},\ \mathfrak{e}'^0 = {}^1/_4\,\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}$$

des Produkts $\mathfrak{E}$ auftreten und mit einer Komitante der Quadriken $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}$ überschoben sind, die in derselben Weise aus $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}$ gebildet sind wie diese Elementarkomitanten aus $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}$.

Ist $\mathfrak{E}$ das allgemeine Produkt seiner Art mit 21 Konstanten, so sind diese Elementarkomitanten allgemeine von einander unabhängige Formen, die zusammen, da sie von den Ordnungen 8, 4, 4, 0, 0 sind, die 21 Konstanten von $\mathfrak{E}$ ergeben. Sie bestimmen, wie leicht in der für das Produkt $\mathfrak{r}\,;\mathfrak{s}$ in Art. 13 durchgeführten Weise gezeigt werden kann, für ein reelles Produkt $\mathfrak{E}$ die reellen Vielbeine desselben: das Vierbein $\mathfrak{e}^4$, die Zweibeine $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ und die Skalare $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}'^0$.

Hienach ist der Satz des vorigen Artikels nochmals, vom elastischen Produkt $\mathfrak{E}$ ausgehend, bewiesen und gleichzeitig gezeigt, wie nach (42) die elastischen Vielbeine aus dem elastischen Produkt $\mathfrak{E}$ gefunden werden können, ferner daß die Vielbeine des allgemeinen elastischen Produkts $\mathfrak{E}$ allgemein und von einander unabhängig sind.

Führt man, um das Potential zu bilden, in dem letzten Ausdruck für $\mathfrak{E}$ den Strain mit dem dyadischen Produkt $\mathfrak{r}\,;\mathfrak{s}$ ein, indem man $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ und ebenso $\mathfrak{z}, \mathfrak{t}$ durch $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ ersetzt, so ergibt sich da

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s} = \mathfrak{u}^2,\ {}^1/_2\,\mathfrak{r}\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{s} = \mathfrak{h}^2,\ {}^1/_2\,\mathfrak{r}\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{s} = g_2,\ \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{s} = \mathfrak{u}^0$$

ist der Ausdruck (38) für φ als:

$$\varphi \equiv \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{u}^{2^2} = {}^1/_6\,(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m} + \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m})\cdot\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0 + \tag{43}$$
$$+ {}^{24}/_7\,(\mathfrak{e}\mathfrak{f}\overset{.}{_2}\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot\mathfrak{h}^2 + {}^2/_5\,\mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{l}\mathfrak{m}g_2 + {}^1/_9\,\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{u}^{0^2}.$$

23. Die elastischen Vielbeine der Poisson-Cauchyschen Theorie. Unter Voraussetzung der Gültigkeit der Poisson-Cauchyschen Hypothese, daß die elastischen Kräfte nur von der Entfernung der Moleküle abhängen, bestehen bekanntlich die folgenden Gleichungen zwischen den Elastizitätskonstanten:

$$c_{23} = c_{44},\ c_{31} = c_{55},\ c_{12} = c_{66},\ c_{14} = c_{56},\ c_{25} = c_{64},\ c_{36} = c_{65}.$$

Diese Gleichungen sagen aus, daß das elastische tetradische Produkt $\mathfrak{E}$ außer den Symmetrien (40) noch die Vertauschung von $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{l}$, und somit alle Vertauschungen von $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}$ gestattet. Dann muß aber $\mathfrak{E}$ in der Form (41) auch alle Vertauschungen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}$ gestatten, also noch die Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{z}$. Bei dieser Vertauschung ändern sich aber die Produkte:

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t},\ \mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{y}\overset{.}{_2}\mathfrak{z}\mathfrak{t},\ \mathfrak{S} \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t},\ \mathfrak{S}' = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}$$

respektive in

$$\mathfrak{B}+\mathfrak{F},\ \mathfrak{Z}-{}^7/_{12}\,\mathfrak{F},\ \mathfrak{S}+{}^5/_6\,\mathfrak{G},\ \mathfrak{S}'=\mathfrak{G},$$

wobei

$$\mathfrak{F}\equiv\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}+\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}-\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{t}-\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{t},$$

$$\mathfrak{G}\equiv\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}-\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{t}$$

ist. Soll demnach $\mathfrak{E}$ bei Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ ungeändert bleiben, so muß:

$$\mathfrak{e}^2\cdot\mathfrak{F}-{}^7/_{12}\,\mathfrak{e}'^2\cdot\mathfrak{F}\equiv(\mathfrak{e}^2-{}^7/_{12}\,\mathfrak{e}'^2)\cdot\mathfrak{F}\equiv 0$$

$$({}^5/_6\,\mathfrak{e}^0-\mathfrak{e}'^0)\,\mathfrak{G}\equiv 0$$

sein. Daher folgt: „Unter Zugrundelegung der Poisson-Cauchyschen Hypothese besteht zwischen den elastischen Zweibeinen die Relation:

$$\mathfrak{e}'^2\equiv{}^{12}/_7\,\mathfrak{e}$$

und zwischen den elastischen Skalaren die Relation:

$$\mathfrak{e}'^0={}^5/_6\,\mathfrak{e}^{“}.$$

Bei Einführung der Helmholtzschen Konstanten $K=\mu$, $H=(3\lambda+2\mu)/3$ (s. Art. 27) ergibt sich demnach $H={}^5/_3\,K$, also die Cauchysche Relation $\lambda=\mu$, oder für die Zahl $\Theta=\lambda/2K$ der Wert $^1/_2$.

§ 8. Automorphe elastische Produkte.

24. Soll das tetradische elastische Produkt $\mathfrak{E}$ durch die Transformation einer Gruppe G von Rotationen, Spiegelungen und Drehspiegelungen in sich übergehen, so muß seine vierfache Quadrik lineare Transformationen in sich zulassen. Vermöge dieser Transformationen müssen dann die Elementarkomitanten der vierfachen Quadrik in sich übergehen, weshalb die ihnen entsprechenden Vielbeine von $\mathfrak{E}$ bei G invariant sein werden.

Um die verschiedenen automorphen $\mathfrak{E}$ zu finden, können daher die Systeme von Vielbeinen $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$, $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}'^0$ bestimmt werden, für die jedes der Vielbeine die Gruppe G gestattet. Da die Konstanten $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}'^0$ bei allen Transformationen von G ungeändert bleiben, so kommen sie nicht in Betracht; sie sind aber bei allen folgenden Konstantenzählungen mitzurechnen.

Es handelt sich also um automorphe Systeme, die aus einem Vierbein und zwei Zweibeinen bestehen, deren Gruppe G (unter vorläufiger Ausschaltung von Drehspiegelungen) nur aus Rotationen besteht (vgl. Art. 14). Demnach wird zunächst das Vierbein allein nach der Gruppe, welche es gestattet, klassifiziert. Die Zweibeine $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}'^2$ müssen dann so gewählt werden, da sie dieselbe Gruppe zulassen.

In den folgenden drei Artikeln werden auf diese Weise die sämtlichen automorphen elastischen Produkte $\mathfrak{E}$ aufgestellt. Hiebei wird die Konstantenzahl k jedes einzelnen Produkts bestimmt und die kristallographische Gruppe K, die in der Gruppe G enthalten sein kann. Ferner werden die Elementarkomitanten e^8, e^4, e'^4 charakterisiert, die zu der vierfachen Quadrik des Produkts gehören, wenn die z-Achse als Hauptachse der Gruppe G gewählt wird. Es werden auch in jedem Falle die ternären Darstellungen der Vielbeine $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ angegeben, so daß sich das elastische Potential immer als linear ableitbar ergibt aus invarianten skalaren Produkten $\mathfrak{P}_k$ der Vielbeine $\mathfrak{u}^{2^2}$, $\mathfrak{h}^2$, $\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0$, g_2, $\mathfrak{u}^2$ des Strains und von Vielbeinen, die aus den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bestehen.

25. Fälle ohne dreizählige Achse. I. Das Vierbein $\mathfrak{e}^4$ ist allgemein mit neun Konstanten; die zugehörige kristallographische Gruppe K ist die trikline. Die Zweibeine $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ sind allgemein und liefern zusammen zehn Konstante, so daß $k=21$ ist. Die Formen e^8, e^4, e'^4 sind allgemein und die ternären Darstellungen der Vielbeine sind (s. Art. 4):

$$\mathfrak{e}^4=\mathfrak{F}^4+\mathfrak{k}\mathfrak{F}^3,\ \mathfrak{e}^2=\mathfrak{F}^2+\mathfrak{k}\mathfrak{F}^1,\ \mathfrak{e}'^2=\mathfrak{F}'^2+\mathfrak{k}\mathfrak{F}'^1.$$

Demnach ergeben sich vermöge (38) die 21 invarianten skalaren Produkte

$$\mathfrak{i}^4\cdot\mathfrak{u}^{2^2}\ \text{u. s. w. bis}\ \mathfrak{e}'\,\mathfrak{u}^0,$$

aus welchen sich das elastische Potential linear ableiten läßt.

II. Das Vierbein $\mathfrak{e}^4$ gestattet die Gruppe C^2; es besteht aus zwei Zweibeinen $\mathfrak{e}_1^2$, $\mathfrak{e}_2^2$ mit einer gemeinsamen Symmetrielinie, die Achse von C^2 ist. Die Gruppe K ist die des monoklinen Systems. Die Zweibeine $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ haben diese Achse als Symmetrielinie. Es ist $k=13$. Wird sie als z-Achse gewählt, so ist durch die lineare Transformation

$$\xi_1=i\,\xi_1',\ \xi_2=i\,\xi_2' \tag{45}$$

eine Drehung um 180° um diese Achse gegeben. Sollen daher die Formen u^8, u^4, u'^4 bei Anwendung dieser Transformation ungeändert bleiben, so müssen alle Glieder der Formen, die ungerade Potenzen von ξ_1 enthalten, ausfallen. Bei dieser Drehung übergehen ferner die Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in $-\mathfrak{i}$, $-\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Sollen daher die Vielbeine $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ bei derselben ungeändert bleiben, so müssen sie die Gestalt haben:

$$\mathfrak{e}^4\equiv\mathfrak{F}^4,\ \mathfrak{e}^2\equiv\mathfrak{F}^2,\ \mathfrak{e}'^2=\mathfrak{F}'^2.$$

Die Form $\mathfrak{F}^4$ hat entweder lauter reelle Wurzeln, wo dann (vgl. Art. 4) die Zweibeine $\mathfrak{e}_1^2$, $\mathfrak{e}_2^2$ von $\mathfrak{e}^4$ die z-Achse als Halbierungslinie besitzen, oder sie hat paarweise konjugierte Wurzeln, wo dann die z-Achse Halbierungslinie für das eine und Lot für das andere Zweibein ist.

Die 13 Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind außer g_2 und $\mathfrak{u}^{0^2}$ die skalaren Produkte von $\mathfrak{u}^{2^2}$, $\mathfrak{h}^2$, $\mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0$ über Produkte von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$.

III. Die Symmetrielinien der Zweibeine $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ von II fallen zusammen; $\mathfrak{e}^4$ gestattet die Gruppe V. Die Gruppe K ist die des rhombischen Systems. $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ haben dieselben Symmetrielinien wie $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$. $k = 9$.

Werden die Symmetrielinien als Achsen gewählt, so kommt zu der Transformation (45) noch die Transformation

46) $$\xi_1 = \xi_2', \; \xi_2 = -\xi_1'$$

hinzu, welcher eine Rotation um 180^0 um die x-Achse entspricht. Sollen die Formen u^8, u^4, u'^4 von II auch diese Transformation zulassen, so müssen die Koeffizienten ihrer Glieder, die gleich hohe Potenzen von ξ_1, ξ_2 enthalten, einander gleich sein.

Die ternären Formen der Vielbeine $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ in II müssen ungeändert bleiben, wenn $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ durch $\mathfrak{i}, -\mathfrak{j}, -\mathfrak{k}$ ersetzt werden, so daß in $\mathfrak{F}^4$, $\mathfrak{F}^2$, $\mathfrak{F}'^2$ nur die Glieder verbleiben, die gerade Potenzen von $\mathfrak{i}$ enthalten. Da nach der Identität (7) gilt: $\mathfrak{i}^2\,\mathfrak{j}^2 = {}^1/_2\,(\mathfrak{k}^4 - \mathfrak{i}^4 - \mathfrak{j}^4)$, so kann auch gesetzt werden:

$$\mathfrak{e}^4 = a\,\mathfrak{i}^4 + b\,\mathfrak{j}^4 + c\,\mathfrak{k}^4.$$

Die neun Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind hier die skalaren Produkte von $\mathfrak{i}^4$, $\mathfrak{j}^4$, $\mathfrak{k}^4$ mit $\mathfrak{u}^{2^2}$, von $\mathfrak{i}^2$, $\mathfrak{j}^2$ mit $\mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0$ und $\mathfrak{h}^2$ und schließlich g_2 und $\mathfrak{u}^{0^2}$.

IV a. Die Zweibeine $\overset{2}{\mathfrak{e}}_1$, $\overset{2}{\mathfrak{e}}_2$, in welche $\mathfrak{e}^4$ zerfällt, sind kongruent, haben eine gemeinsame Winkelhalbierende und aufeinander senkrechte Ebenen. Diese Zweibeine $\overset{2}{\mathfrak{e}}_1$, $\overset{2}{\mathfrak{e}}_2$ übergehen dann in einander entweder durch eine Rotation um einen rechten Winkel, in welchem Falle das Vierbein regulär ist, oder aber durch Drehspiegelung mit einer Drehung um einen rechten Winkel und um diese Winkelhalbierende als Achse. In letzterem Falle bringt aber auch eine Rotation um einen rechten Winkel das Vierbein in sich, denn es ist (Art. 2) mit demjenigen gleich, das aus ihm durch Inversion an O hervorgeht. Demnach gestattet $\mathfrak{e}^4$ die Gruppe C^4. Die durch C^4 charakterisierten Gruppen des tetragonalen Systems. Die Zweibeine $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}'^2$ werden speziell und fallen in die Achse. Es ist $k = 7$. Da eine Rotation um einen rechten Winkel um die z-Achse durch die lineare Transformation

$$\xi_1 = \varepsilon\,\xi_1', \; \xi_2 = \xi_2'/\varepsilon$$

gegeben ist, wo ε eine der primitiven achten Wurzeln aus 1 ist, so sind die Formen u^8, u^4, u'^4, welche diese Transformation gestatten:

$$u^8 \equiv a\,\xi_1^8 + b\,\xi_1^4\,\xi_2^4 + c\,\xi_2^8,\; u^4 \equiv d\,\xi_1^2\,\xi_2^2,\; u'^4 \equiv e\,\xi_1^2\,\xi_2^2.$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{e}^4 = \alpha\,\mathfrak{i}^4 + \beta\,\mathfrak{j}^4 + \gamma\,\mathfrak{k}^4,\ \mathfrak{e}^2 = \delta\,\mathfrak{k}^2,\ \mathfrak{e}'^2 = \epsilon\,\mathfrak{k}^2.$$

Die sieben Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind demnach:

$$\mathfrak{i}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{j}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{k}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0,\ \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{h}^2,\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{u}^{0^2}.$$

IV*b*. Die Gruppe C^4 in IV*a* erweitert sich zu D^4 durch eine Rotation von 180° um die x-Achse. Die durch D^4 charakterisierten Gruppen des tetragonalen Systems. Die Zweibeine $\mathfrak{e}^2, \mathfrak{e}'^2$ liegen wie in IV*a*. $k = 6$. Die Formen u^8, u^4, u'^4 in IV*a* gestatten noch die Transformation (46), daher wird $a = b$ folglich auch $\alpha = \gamma$. Deshalb kann auch gesetzt werden:

$$\mathfrak{e}^4 = \rho\,\mathfrak{i}^2\,\mathfrak{j}^2 + \sigma\,\mathfrak{k}^4.$$

Die sechs Produkte $\mathfrak{P}_k$ lauten demnach:

$$\mathfrak{i}^2\mathfrak{j}^2 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{k}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0,\ \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{h}^2,\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{u}^{0^2}.$$

V. Die Teilvektoren von $\mathfrak{e}^4$ in IV*b* halbieren die Winkel zwischen den Koordinatenachsen. Reguläres System. $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ verschwinden identisch. $k = 3$. Es ist

$$\mathfrak{e}^4 = \alpha\,(\mathfrak{i}^4 + \mathfrak{j}^4 + \mathfrak{k}^4).$$

26. Fälle mit dreizähliger Achse. VI*a*. Drei Teilvektoren von $\mathfrak{e}^4$ bilden einen regulären Trivektor (sind Kanten einer regulären Pyramide), der vierte Teilvektor von $\mathfrak{e}^4$ liegt auf der Achse des Trivektors (Höhenlinie der Pyramide), welche Achse der Gruppe C^3 ist, die $\mathfrak{e}^4$ in sich überführt. Die durch C^3 charakterisierten Gruppen des rhomboëdrischen Systems. $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ wie in IV*a*. $k = 7$. Die Formen u^8, u^4, u'^4 gestatten die Transformation:

$$\xi_1 = \varepsilon\,\xi_1',\ \xi_2 = \xi_1'/\varepsilon,$$

wo ε eine der komplexen dritten Einheitswurzeln ist. Daher haben sie die Gestalt:

$$u^4 = \xi_1\,\xi_2\,(a\,\xi_1^6 + b\,\xi_1^3\,\xi_2^3 + c\,\xi_2^6),\ u^4 = d\,\xi_1^2\,\xi_2^2,\ u'^4 = e\,\xi_1^2\,\xi_2^2.$$

Da vermöge der Formeln (3) die Vektoren

$$^1/_2\,(\mathfrak{i} + i\,\mathfrak{j}),\ ^1/_2\,(\mathfrak{i} - i\,\mathfrak{j}),\ \mathfrak{k}$$

die Quadriken $\xi_1^2, \xi_2^2, -2\,i\,\xi_1\,\xi_2$ besitzen: so folgt

$$\mathfrak{e}^4 = {}^1/_2\,\mathfrak{k}\,\{(a + c)\,i\,(\mathfrak{i}^3 - 3\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}^2) + (a - c)\,(\mathfrak{j}^3 + 3\,\mathfrak{i}^2\,\mathfrak{j})\} + \gamma\,\mathfrak{k}^4.$$

Daher ist, wenn

$$a = -\beta - i\,\alpha,\ c = \beta - i\,\alpha$$

gesetzt wird:

$$\mathfrak{e}^4 = \mathfrak{k}\{\alpha(\mathfrak{i}^3 - 3\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}^2) + \beta(\mathfrak{j}^3 + 3\,\mathfrak{i}^2\mathfrak{j}) + \gamma\,\mathfrak{k}^3\}.$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{e}^2 = \delta\,\mathfrak{k}^2,\ \mathfrak{e}'^2 = \varepsilon\,\mathfrak{k}^2.$$

Die Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind demnach die skalaren Produkte von $\mathfrak{k}(\mathfrak{i}^3 - 3\mathfrak{i}\mathfrak{j}^2)$, $\mathfrak{k}(\mathfrak{j}^3 + 3\mathfrak{i}^2\mathfrak{j})$, $\mathfrak{k}^4$ über $\mathfrak{u}^{2^2}$, von $\mathfrak{k}^2$ über $\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0$ und $\mathfrak{h}^2$ und g_2 und $\mathfrak{u}^{0^2}$.

VI*b*. Die Gruppe C^3 von VI*a* wird zu D^3 durch Hinzutreten der Rotation um 180^0 um die Normale einer Symmetrieebene des regulären Dreibeins. Die durch D^3 charakterisierten Gruppen des rhomboedrischen Systems $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ wie in VI*a*. Wird diese Normale als x-Achse gewählt, so ist $k = 6$.

Formen u^4, u'^4 wie in VI*a*. Die Form u^8 von VI*a* muß noch die Transformation (46) gestatten, daher ist $a = c$. Demnach ist auch $\beta = 0$ und

$$\mathfrak{e}^4 = \mathfrak{k}\{\alpha(\mathfrak{i}^3 - 3\mathfrak{i}\mathfrak{j}^2) + \gamma\mathfrak{k}^3\},\ \mathfrak{e}^2 = \delta\mathfrak{k}^2,\ \mathfrak{e}'^2 = \varepsilon\mathfrak{k}^2.$$

Die sechs Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind die von VI*a* mit Ausnahme des zweiten.

27. Fälle der Isotropien. VII. Das Vierbein $\mathfrak{e}^4$ gestattet die kontinuierliche Gruppe von Rotationen um eine Achse; es wird demnach speziell und seine Teilbeine fallen in diese Achse, die eine Achse elastischer Isotropie wird. Hier müssen die durch C^6 oder D^6 charakterisierten Gruppen des hexagonalen Systems mit sechszähliger Symmetrieachse eingeordnet werden, denn das Auftreten einer solchen Achse bewirkt, daß das elastische Vierbein, welches dieselbe Symmetrie gestatten soll, speziell wird und in die Achse fällt.

Auch $\mathfrak{e}^2$ und $\mathfrak{e}'^2$ werden speziell und fallen in die Achse, so daß, wenn diese Achse als z-Achse gewählt wird, folgt: $k = 5$. Für die Vielbeine ist dann:

$$\mathfrak{e}^4 = c_1\,\mathfrak{k}^4,\ \mathfrak{e}^2 = c_2\,\mathfrak{k}^2,\ \mathfrak{e}'^2 = c_3\,\mathfrak{k}^2,$$

und das elastische Potential lautet demnach

$$(47)\quad \varphi \equiv c_1\,\mathfrak{k}^4\cdot\mathfrak{u}^{2^2} + c_2\,\mathfrak{k}^2\cdot\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0 + c_3\,\mathfrak{k}^2\cdot\mathfrak{h}^2 + e^0 g_2 + e'^0\,\mathfrak{u}^{0^2}.$$

Hierin sind c_1, c_2, c_3, e^0, e'^0 die fünf Konstanten der elastischen Isotropieachse und die auftretenden Produkte

$$\mathfrak{k}^2\cdot\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0,\ \mathfrak{k}^2\cdot\mathfrak{h}^2,\ g_2,\ \mathfrak{u}^{0^2}$$

sind mit den in Art. 19 eingeführten Produkten $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_5, \mathfrak{P}_4, \mathfrak{P}_1$ identisch. Das Produkt

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{k}^4\cdot\mathfrak{u}^{2^2}$$

das hier auftritt, läßt sich aus den fünf Produkten $\mathfrak{P}_k$ (und demnach auch aus den fünf Beltramischen Invarianten B_k) linear ableiten, da dies nach Art. 22 für jedes invariante Produkt, das zweiten Grades in $\mathfrak{u}^2$ und $\mathfrak{u}^0$ ist, der Fall sein muß.

„Die obige Zerlegung des allgemeinen elastischen Potentials in die fünf Teile, welche den elastischen Vielbeinen entsprechen, ist nach dem Vorstehenden als eine Erweiterung der in (47) angegebenen Zerlegung des Potentials bei elastischer Isotropieachse anzusehen".

VIII. Das Vierbein $\mathfrak{e}^4$ verschwindet identisch. Gruppe sämtlicher Rotationen um O. Komplette elastische Isotropie. Die Zweibeine $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ müssen dieselbe Gruppe gestatten, verschwinden daher ebenfalls identisch. Das elastische Potential ergibt sich als

$$\mathfrak{e}^0 g_2 + \mathfrak{e}'^0 \mathfrak{u}^{02} = 2 K g_2 + {}^1/_2 H \mathfrak{u}^{02}, \tag{48}$$

in der Helmholtzschen Normalform (vgl. Art. 20).

28. Es wurden oben die Gruppen ausgeschlossen, die Drehspiegelungen enthalten. Von solchen Drehspiegelungen, die ein Vierbein $\mathfrak{e}^4$ invariant lassen, kommen nur S^3 und S^4, die dreiresp. vierzählig sind, in Betracht. Wäre nun ein Teilbein $\mathfrak{e}_1$ von $\mathfrak{e}^4$ nicht senkrecht zur Achse von S^3, so müßte S^3 auf $\mathfrak{e}_1$ angewendet ein Sechsbein liefern. Wäre $\mathfrak{e}_1$ senkrecht zur Achse von S^3 so müßte $\mathfrak{e}^4$ noch zwei weitere Teilbeine $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ haben, die mit $\mathfrak{e}_1$ und miteinander Winkel von 120° einschließen und das vierte Teilbein $\mathfrak{e}_4$ von $\mathfrak{e}^4$ müßte auf der Achse liegen. Vermöge S^3 würde dann der Trivektor $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3$ in sich übergehen, $\mathfrak{e}_4$ aber sein Zeichen ändern. Demnach würde auch $\mathfrak{e}^4$ bei S^3 sein Zeichen ändern, also nicht invariant sein.

Es gibt ferner ein Vierbein $\mathfrak{e}^4$ das S^4 gestattet; es wird aus einem zur Achse von S^4 senkrechten Vektor durch Anwendung der Transformationen von S^4 erhalten und tritt unter IV auf.

29. Nach dem Vorstehenden ergeben sich acht verschiedene automorphe elastische Produkte $\mathfrak{E}$ und ferner die Fälle der elastischen Isotropieachse und der kompletten Isotropie. Sie sind durch ein Vierbein allein und durch die Gruppe G, die es gestattet, charakterisiert.

Da den Teilvektoren des Vierbeins $\mathfrak{e}^4$ Quadriken mit gleicher Diskriminante zugehören und dieses vermöge der Operationen von G auch in dasjenige übergehen kann, das sich von ihm nur durch die Richtungen einer geraden Anzahl der Teilbeine unterscheidet, so folgt noch, daß die Aufgabe, die verschieden automorphen elastischen Produkte $\mathfrak{E}$ ohne Isotropien zu finden, identisch ist mit der folgenden:

„Es sind die Systeme von vier von einander verschiedenen Quadriken $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_4$ mit nicht verschwindender Diskriminante zu finden, die durch eine Gruppe von linearen Transformationen in sich oder in die Quadriken $\pm\mathfrak{e}_1$, $\pm\mathfrak{e}_2$, $-\mathfrak{e}_3$, $-\mathfrak{e}_4$ übergeführt werden."

30. Kubische Potentiale. Es möge noch die Frage behandelt werden, ob die potentielle Energie eines elastischen Körpers außer dem im vorstehenden behandelten quadratischen Teile φ noch einen Teil enthalten kann, der in den Strainkoordinaten homogen und vom dritten Grade ist, ohne daß die eventuellen Rotationssymmetrien dieses „kubischen Teiles Φ des Potentials" dem Gesetze der rationalen Indizes widersprechen.

Dieser Teil Φ muß in den Koeffizienten der Formen $u^4 \equiv f$, $u^0 \equiv k$ der Duploquadrik des Strains homogen und vom dritten Grade sein. Da nun

$$f,\ h,\ t,\ g_2,\ g_3$$

das volle System von f bilden, so hat man unter Hinzunahme von k die folgenden zehn Komitanten dritten Grades der Duploquadrik des Strains:

$$f^3;\ fh,\ f^2k;\ t;\ fg_2,\ fk^2,\ hk;\ g_2 k,\ g_3,\ k^3.$$

Diesen entsprechen die folgenden invarianten kubischen Vielbeine des Strains

$$\text{(49)} \qquad \mathfrak{u}^{2^3},\ \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{h}^2,\ \mathfrak{u}^{2^2}\,\mathfrak{u}^0;\ \mathfrak{t};\ \mathfrak{u}^2 g_2,\ \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^{0^2},\ \mathfrak{h}^2\,\mathfrak{u}^0;\ g_2\,\mathfrak{u}^0,\ g_3,\ \mathfrak{u}^{0^3}.$$

Bildet man nun die skalaren Produkte dieser Vielbeine mit Vielbeinen gleicher Ordnung $\mathfrak{c}^\nu$, so folgt:

$$\Phi \equiv \mathfrak{c}^6 \cdot \mathfrak{u}^{2^3} + \mathfrak{c}^4 \cdot \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{h}^2 + \mathfrak{c}'^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2}\,\mathfrak{u}^0 + \mathfrak{c}^3 \cdot \mathfrak{t} + \mathfrak{c}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 g_2 +$$
$$+ \mathfrak{c}'^2 \cdot \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^{0^2} + \mathfrak{c}''^2 \cdot \mathfrak{h}^2\,\mathfrak{u}^0 + \mathfrak{c}^0 g_2\,\mathfrak{u}^0 + \mathfrak{c}'^0 g_3 + \mathfrak{c}''^0\,\mathfrak{u}^{0^3}.$$

Statt der 56 kubischen Elastizitätskoeffizienten des durch die Strainkoordinaten ausgedrückten Φ können demnach diese „elastischen kubischen Vielbeine $\mathfrak{c}^{\nu}$", die von 0, 2, 3, 4, 6ter Ordnung sind und die zusammen von 56 Konstanten abhängen, eingeführt werden.

Man kann Φ auch, analog wie oben den quadratischen Teil φ des Potentials, geben durch eine sechsfache Quadrik

$$(a x)^2\,(b y)^2\,(p z)^2\,(q t)^2\,(m u)^2\,(n v)^2$$

oder durch ein sexadisches Produkt $\mathfrak{a};\mathfrak{b};\mathfrak{p};\mathfrak{q};\mathfrak{m};\mathfrak{n}$, aus dem sich Φ ergibt als

$$\Phi = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}\ \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{s}\ \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r}\ \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{s}\ \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{r}\ \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{s}.$$

Durch Entwicklung dieses Produkts nach der Methode des Art. 22 und durch Beachtung der Symmetrien, die es gestattet, ergibt sich das soeben abgeleitete Resultat nochmals.

Soll nun das elastische Medium im Punkte O eine Rotation zulassen, so müssen seine kubischen Vielbeine dieselbe Rotation gestatten. Für die kubischen Zwei- und Vierbeine erhält man dann, sowie oben für die quadratischen Vielbeine $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$, nur 2-, 3-, 4-zählige Rotationen, die also dem Gesetze der rationalen Indizes nicht widersprechen. Ebenso erhält man für $\mathfrak{c}^3$ keine anderszähligen Rotationen.

Das Sechsbein $\mathfrak{c}^6$ kann bei gewissen Spezialisierungen 2-, 3-, 4-, 6zählige Rotationen gestatten, die dem Rationalitätsgesetze auch nicht widersprechen würden. Es kann aber auch aus einem regulären Fünfbein und einem Vektor bestehen, der auf der Achse des Fünfbeins liegt, so daß $\mathfrak{e}^6$ eine fünfzählige Rotation gestattet, die dem Rationalitätsgesetze widerspricht. In diesem Falle müssen dann die anderen quadratischen und kubischen Vielbeine speziell werden und in die Achse des Fünfbeins fallen. Demnach:

„Wird die Achse des regulären Fünfbeins als z-Achse gewählt, so liefert seine ternäre Darstellung drei Konstante und jedes der anderen neun kubischen und fünf quadratischen Vielbeine je eine weitere Konstante, so daß das dem Gesetze der Rationalität widersprechende kubische Potential von 17 Konstanten abhängt."

Würde angenommen, daß das Sechsbein $\mathfrak{c}^6$ des kubischen Potentials a priori verschwinden würde, so hätte man nur elastische Null- bis Vierbeine. Da das Sechsbein 13 Konstante besitzt, so würde eine solche Annahme noch immer kubische Potentiale mit $56 - 13 = 43$ Konstanten liefern, welche Potentiale dem Rationalitätsgesetze nicht widersprechen können.

Bei Auftreten einer elastischen Isotropieachse würde das aus φ und Φ bestehende Potential von $5 + 10$ Konstanten abhängen und sich aus den skalaren Produkten von Potenzen des Einheitsvektors $\mathfrak{k}$ der Achse und den quadratischen und kubischen Vielbeinen des Strains linear ableiten lassen.

Bei kompletter elastischer Isotropie würden sich ergeben:[1])

$$\Phi = \mathfrak{c}^0 g_3 + \mathfrak{c}'^0 g_2 \mathfrak{k} + \mathfrak{c}''^0 \mathfrak{k}^3.$$

Brünn, 7. Juni 1906.

[1]) Vgl. Voigt: „Über eine anscheinend notwendige Erweiterung der Theorie der Elastizität", Wied. Ann., Bd. 52, p. 536. Der dort verwendete Satz des Herrn Stickelberger folgt nach dem Obigen als: Jede ganze rationale Funktion der Strainkoordinaten, welche vom Koordinatensystem unabhängig ist, ist eine ganze rationale Funktion von $\mathfrak{u}^0$, g_2, g_3; denn diese Größen bilden das volle System der Invarianten der Duploquadrik des Strains.