Über eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene.

Von **Karl Carda** in Wien.

Wir stellen uns die folgende Aufgabe:

Es sind alle dreigliedrigen algebraischen Gruppen der Ebene zu bestimmen, welche mit der projektiven Gruppe

$$\boxed{p \quad 2xp+yq \quad x^2p+xyq}$$

ähnlich sind.

Da die gesuchten Gruppen algebraisch sind, so sind in ihren endlichen Gleichungen

$$x_1 = f_1\,(x, y, a_1, a_2, a_3),$$
$$y_1 = f_2\,(x, y, a_1, a_2, a_3)$$

die Ausdrücke f_1 und f_2 bei beliebigen Werten der Parameter a_1, a_2, a_3 algebraische Funktionen von x, y. Hieraus folgt, daß auch alle infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen algebraisch sind.

Um die Lösung der gestellten Aufgabe in Angriff zu nehmen, werden wir prüfen, ob jede mit der gegebenen projektiven Gruppe

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 f &\equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} \\ \mathfrak{X}_2 f &\equiv 2\mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} \\ \mathfrak{X}_3 f &\equiv \mathfrak{x}^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} \end{aligned} \tag{1}$$

ähnliche algebraische Gruppe

$$\begin{aligned} X_1 f &\equiv \xi_1\, p + \eta_1\, q \\ X_2 f &\equiv \xi_2\, p + \eta_2\, q \\ X_3 f &\equiv \xi_3\, p + \eta_3\, q \end{aligned} \tag{2}$$

in die gegebene kanonische Gruppe vermöge einer algebraischen Transformation übergeführt werden kann oder nicht. In letzterem Falle ergeben sich gewisse Klassen von Gruppen von der Art, daß zwei Gruppen, welche verschiedenen Klassen angehören, nur vermöge einer transzendenten Transformation in einander übergeführt werden können.

1.

Wir wollen voraussetzen, daß die infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen bereits in allgemeinster Weise so gewählt sind, daß vermöge einer gewissen Punkttransformation jedes $X_i f$ gerade in $\mathfrak{X}_i f$ übergeht. Dann bestehen die Gleichungen

$$X_1 f = \mathfrak{X}_1 f$$
(3) $$X_2 f = \mathfrak{X}_2 f$$
$$X_3 f = \mathfrak{X}_3 f.$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf (1)

(4) $$\mathfrak{x}^2 . X_1 f - \mathfrak{x} . X_2 f + X_3 f = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes f gilt, so zerfällt sie in

(5) $$\begin{gathered} \xi_1 . \mathfrak{x}^2 - \xi_2 . \mathfrak{x} + \xi_3 = 0 \\ \eta_1 . \mathfrak{x}^2 - \eta_2 . \mathfrak{x} + \eta_3 = 0. \end{gathered}$$

Diese beiden Gleichungen können nicht äquivalent sein, denn sonst wären alle Determinanten

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \xi_k \\ \eta_i & \eta_k \end{vmatrix} = 0,$$

also wäre die gesuchte Gruppe intransitiv, während die gegebene kanonische Gruppe transitiv ist. Die gemeinsame Lösung der Gleichungen (5) kann sich offenbar auch nicht auf eine Konstante reduzieren.

Wir bestimmen die gemeinsame Lösung der Gleichungen (5)

$$\mathfrak{x} = \vartheta (x, y).$$

$\vartheta (x, y)$ hängt von x und von y algebraisch ab. Die Kurvenschar $\mathfrak{x} = C$ bleibt bei allen Transformationen der kanonischen Gruppe invariant. Also bleibt die Kurvenschar $\vartheta (x, y) = C$ bei der gesuchten Gruppe invariant. Wir wenden auf die Gleichung

$$\vartheta (x, y) = \mathfrak{x}$$

die Prozesse $$X_i f = \mathfrak{X}_i f$$

an. Es ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{gathered} X_1 \vartheta = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{x} = 1 \\ X_2 \vartheta = \mathfrak{X}_2 \mathfrak{x} = 2 \mathfrak{x} = 2 \vartheta \\ X_3 \vartheta = \mathfrak{X}_3 \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^2 = \vartheta^2. \end{gathered}$$

Führen wir $\mathfrak{x} = \vartheta(x, y)$ als neue Variable an Stelle von x in die Gruppe der $X_i f$ ein, so folgt vermöge einer algebraischen Transformation

$$(6)\qquad \begin{aligned} X_1 f &\equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \alpha(\mathfrak{x}, y) \frac{\partial f}{\partial y} \\ X_2 f &\equiv 2\mathfrak{x} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \beta(\mathfrak{x}, y) \frac{\partial f}{\partial y} \\ X_3 f &\equiv \mathfrak{x}^2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \gamma(\mathfrak{x}, y) \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

2.

Auf Grund der vorangehenden Betrachtungen können wir stets voraussetzen, daß in der gesuchten Gruppe

$$\xi_1 \equiv 1, \quad \xi_2 \equiv 2x, \quad \xi_3 \equiv x^2$$

ist. Es ist demnach das System zu untersuchen

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} \\ 2x \frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} &= 2\mathfrak{x} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{y} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} \\ x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} &= \mathfrak{x}^2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{x}\mathfrak{y} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (5) geben

$$\mathfrak{x} = x,$$
$$\mathfrak{x}^2 . \alpha - \mathfrak{x} . \beta + \gamma = 0.$$

Für $\mathfrak{y}$ erhält man das System von Differentialgleichungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} &= 0 \\ 2x \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} &= \mathfrak{y} \\ x^2 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} &= \mathfrak{x}\mathfrak{y}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind mit einander verträglich. Demnach genügt es, die beiden ersten Gleichungen allein zu betrachten. Es folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = \frac{\alpha \mathfrak{y}}{2x\alpha - \beta}$$
$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \frac{-\mathfrak{y}}{2x\alpha - \beta}.$$

hieraus ergibt sich $\mathfrak{y}$ durch eine Quadratur

$$\log \mathfrak{y} = \int \frac{\alpha\, d x - d y}{2 x \alpha - \beta}.$$

$\log \mathfrak{y}$ ist also ein Abelsches Integral in x, y. Der Integrand ist ein exaktes Differential auf Grund der aus der Relation

$$(X_1 X_2) \equiv 2 X_1 f$$

fließenden Gleichung

$$X_1 \beta - X_2 \alpha \equiv 2 \alpha.$$

Die übrigen Klammerrelationen

$$(X_1 X_3) \equiv X_2 f$$
$$(X_2 X_3) \equiv 2 X_3 f$$

liefern nichts Neues.

Demnach hat jede Transformation, welche die beiden Systeme (7) in einander überführt, Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = e^{\int (P(x, y)\, d x + Q(x, y)\, d y)}. \tag{9}$$

3.

Wir wollen nunmehr die endlichen Transformationen der gesuchten Gruppen betrachten. Zu diesem Zwecke werden wir die endlichen Transformationen der kanonischen Gruppe bestimmen und so dann vermittels der Formeln (9) zu den endlichen Transformationen der gesuchten Gruppe übergehen.

Wir finden nach bekannten Regeln die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppen

$$p: \begin{cases} x_1 = x + a \\ y_1 = y \end{cases}$$

$$2 x p + y q: \begin{cases} x_1 = b^2 x \\ y_1 = b y \end{cases}$$

$$x^2 p + x y q: \begin{cases} x_1 = \dfrac{x}{1 - c x} \\ y_1 = \dfrac{y}{1 - c x}. \end{cases}$$

Somit lauten die endlichen Transformationen der gegebenen kanonischen Gruppe (1)

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{a + (b^2 - a c)\, \mathfrak{x}}{1 - c\, \mathfrak{x}},$$

$$\mathfrak{y}_1 = \frac{b\, \mathfrak{y}}{1 - c\, \mathfrak{x}}.$$

Also lauten die endlichen Transformationen der gesuchten Gruppe

$$(10)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a + (b^2 - a\,c)\,x}{1 - c\,x}, \\ \displaystyle\int^{x_1, y_1} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \int^{x,y} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) + \\ \qquad\qquad + \log \dfrac{b}{1 - c\,x}. \end{cases}$$

Auf diese Form lassen sich die endlichen Transformationen der gesuchten Gruppen stets vermöge einer algebraischen Transformation bringen.

4.

Wir werfen nun die Frage auf, wann die dreigliedrige Gruppe (10) algebraisch ist. Die dreigliedrige Gruppe läßt die Kurvenschar $x = C$ invariant. Wir wollen alle Transformationen der Gruppe betrachten, welche die willkürlich gewählte Gerade $x = k$ der Schar in Ruhe lassen. Dieselben bilden eine zweigliedrige Untergruppe der dreigliedrigen Gruppe (10). Die einzelnen Punkte der Geraden $x = k$ werden höchstens zweigliedrig unter einander vertauscht.

Zur Bestimmung der Untergruppe setzen wir

$$k = \frac{a + (b^2 - a\,c)\,k}{1 - c\,.\,k} \equiv a + \frac{b^2\,k}{1 - c\,k}.$$

Ferner setzen wir

$$(11)\qquad \int^{x,y} (P\,(x, y)\,d\,x + Q\,(x, y)\,d\,y) \equiv u\,(x, y).$$

Die Gruppe, vermöge welcher die Punkte der Geraden $x = k$ unter einander vertauscht werden, ist die folgende

$$u\,(k, y_1) = u\,(k, y) + \log \frac{b}{1 - c\,k}.$$

Diese Gruppe ist nur eingliedrig. Wir können sie daher kurz schreiben

$$(12)\qquad u\,(k, y_1) = u\,(k, y) + t.$$

Diese Gruppe muß für jedes k algebraisch sein. Es ist infolge Gleichung (11)

$$\frac{\partial\,u\,(k, y)}{\partial\,y} \equiv Q\,(k, y).$$

Also

$$u(k, y) \equiv \int_{y_0}^{y} Q(k, y)\, d y + C,$$

$$u(k, y_1) \equiv \int_{y_0}^{y_1} Q(k, y)\, d y + C.$$

Demnach wird die Gleichung (12)

$$\int_{y_0}^{y_1} Q(k, y)\, d y = \int_{y_0}^{y} Q(k, y)\, d y + t. \tag{13}$$

Diese Gleichung soll nun für jedes k eine algebraische Gruppe darstellen. Dann muß bekanntlich $Q(k, y)$ in bezug auf y vom Geschlechte Null oder Eins sein. Man kann stets vermöge einer algebraischen Transformation erreichen, daß Q eine der drei Formen gewinnt

$$\text{I.} \quad Q \equiv 1$$

$$\text{II.} \quad Q \equiv \frac{1}{y}$$

$$\text{III.} \quad Q \equiv \frac{1}{\sqrt{y(1-y)(1-\vartheta(k)\, y)}}.$$

In dem letzten Ausdrucke bezeichnet $\vartheta(k)$ eine algebraische Funktion von k.

5.

Wir setzen zunächst voraus, daß man durch eine passende algebraische Transformation erreicht habe, daß

$$Q(x, y) \equiv 1.$$

Dann ist

$$u(x, y) \equiv y + X(x),$$

$$u(x_1, y_1) \equiv y_1 + X(x_1).$$

Hierin bezeichnet $X(x)$ ein Abelsches Integral,

$$X(x) \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\, d z.$$

Die Gleichungen (10) gehen über in

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + (b^2 - a c)\, x}{1 - c x}, \\ y_1 + X(x_1) = y + X(x) + \log \dfrac{b}{1 - c x}. \end{cases}$$

Es soll y_1 von x und von y algebraisch abhängen. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß eine Identität von der Form besteht

$$\int_{x_0}^{\frac{a+(b^2-ac)x}{1-cx}} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz - \log(1-cx) + A(x;a,b,c). \tag{14}$$

Hierin bezeichnet A eine algebraische Funktion von x.

In dieser Gleichung lassen wir nun b und c in willkürlicher Weise nach Null konvergieren. Es kommt

$$\int_{x_0}^{a} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz + A(x;a,0,0).$$

Hieraus ergibt sich, daß das Abelsche Integral $X(x)$ eine algebraische Funktion von x darstellen muß. Mithin besitzt die Funktionalgleichung (14) bei willkürlichem Werte von c keine Lösung der verlangten Art.

6.

Wir betrachten nunmehr den Fall

$$Q(x,y) \equiv \frac{1}{y}.$$

Die endlichen Gleichungen der Gruppe lauten

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a+(b^2-ac)x}{1-cx}, \\ \log y_1 + X(x_1) = \log y + X(x) + \log \dfrac{b}{1-cx}. \end{cases}$$

Damit die Gruppe algebraisch wird, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\int_{x_0}^{\frac{a+(b^2-ac)x}{1-cx}} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz + \log A(x;a,b,c).$$

Lassen wir wieder b und c in willkürlicher Weise nach Null konvergieren, so folgt

$$\int_{x_0}^{a} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz + \log A(x;a,0,0).$$

Das Abelsche Integral $X(x)$ ist also der Logarithmus einer algebraischen Funktion,

$$X(x) \equiv \log \mathfrak{A}(x).$$

Es kommt

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + (b^2 - a\,c)\,x}{1 - c\,x} \\ y_1\, \mathfrak{A}(x_1) = y\, \mathfrak{A}(x) \cdot \dfrac{b}{1 - c\,x}. \end{cases}$$

Durch die algebraische Transformation

$$x = \mathfrak{x} \quad , \quad x_1 = \mathfrak{x}_1$$
$$y\, \mathfrak{A}(x) = \mathfrak{y} \quad , \quad y_1\, \mathfrak{A}(x_1) = \mathfrak{y}_1$$

erhalten wir die kanonische Gruppe (1)

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{a + (b^2 - a\,c)\,\mathfrak{x}}{1 - c\,\mathfrak{x}}$$
$$\mathfrak{y}_1 = \frac{b\,\mathfrak{y}}{1 - c\,\mathfrak{x}}.$$

7.

Es erübrigt noch die Betrachtung des Falles

$$Q(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{y(1-y)\,(1 - \vartheta(x)\,y)}}.$$

Es wird

$$u(x, y) \equiv \int \frac{d\,y}{\sqrt{y(1-y)\,\;(1 - \vartheta(x)\,y)}} + X(x).$$

Da $u(x, y)$ ein Abelsches Integral in x, y sein soll, so muß der Ausdruck

$$\vartheta'(x) \cdot \int \frac{d\,y}{(1 - \vartheta(x)\,y)\sqrt{y(1-y)\,\;(1 - \vartheta(x)\,y)}}$$

von x und von y algebraisch abhängen. Das Integral ist aber bei willkürlicher Wahl von $\vartheta(x)$ keine algebraische Funktion von y. Hieraus schließt man

$$\vartheta'(x) \equiv 0,$$

also ist $\vartheta(x)$ eine Konstante. Setzen wir

$$y(1-y)(1 - C\,y) \equiv f(y),$$

so lauten die endlichen Gleichungen der Gruppe

$$(15)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a + (b^2 - a\,c)\,x}{1 - c\,x} \\ \displaystyle\int_{y_0}^{y_1} \frac{d\,z}{\sqrt{f(z)}} + \int_{x_0}^{x_1} \alpha(z)\,d\,z = \int_{y_0}^{y} \frac{d\,z}{\sqrt{f(x)}} + \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,d\,z + \log \frac{b}{1 - c\,x}. \end{cases}$$

Wir setzen zunächst

$$\log b = \int_{y_0}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

und wollen dann die drei in der Gleichung (15) auftretenden elliptischen Integrale erster Gattung auf Grund des Additionstheorems derselben zu einem einzigen Integral zusammenfassen. Es folgt die Identität

$$(16) \qquad \int_{y_0}^{\varphi(x;\, a,\, b,\, c,\, y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\, dz - \int_{x_0}^{\frac{a+(b^2-ac)x}{1-cx}} \alpha(z)\, dz - \log(1-cx).$$

Wir lassen nun b und c nach Null konvergieren. Es ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x} \alpha(z)\, dz \equiv \int_{y_0}^{\varphi(x;\, a,\, o,\, o,\, y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} + \int_{x_0}^{a} \alpha(z)\, dz.$$

Demnach erhalten wir aus (16) die folgende Identität

$$\int_{y_0}^{\varphi(x;\, a,\, b,\, c,\, y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \equiv \int_{y_0}^{\varphi(x;\, a,\, o,\, o,\, y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} - \int_{y_0}^{\varphi\left(\frac{a+(b^2-ac)x}{1-cx};\, a,\, o,\, o,\, y_0\right)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} - \log(1-cx).$$

Vermöge des Additionstheorems vereinfacht sich die Identität zu der folgenden

$$\int_{y_0}^{\psi(x;\, c,\, y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \equiv \log(1-cx),$$

wo ψ in x algebraisch ist. Diese Identität ist aber für willkürliche Werte von c unmöglich, so lange das algebraische Gebilde $\sqrt{f(z)}$ nicht ausartet. Die Funktionalgleichung (15) besitzt also keine Lösung der verlangten Art.

Hiemit ist die gestellte Aufgabe erledigt. Wir gelangen zu folgendem Theorem:

Jede algebraische mit der projektiven Gruppe

$$\boxed{p \qquad 2xp + yq \qquad x^2p + xyq}$$

ähnliche Gruppe läßt sich in diese vermöge einer algebraischen Transformation überführen.[1])

[1]) Man vergl. Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. 11, p. 54—55.