Über die Newton'sche Näherungsmethode.

Von **A. Tauber** in Wien.

Die Newton'sche Näherungsmethode zur Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(z)=0$ besteht bekanntlich in der Darstellung einer dieser Wurzeln als Grenzwert von Größen

$$c,\ c_1,\ c_2, \ldots,\ c_\lambda, \ldots,$$

von denen die erste geeignet zu wählen ist, während sich die folgenden recurrierend durch die Gleichungen

$$(1) \quad c_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)},\ c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)}, \ldots,\ c_{\lambda+1} = c_\lambda - \frac{f(c_\lambda)}{f'(c_\lambda)}, \ldots$$

bestimmen. Um jedoch einen solchen Wert c angeben zu können, der die Eigenschaft besitzt, dass $\lim c_\lambda$ für $\lambda = \infty$ gleich einer Wurzel von $f(z)=0$ wird, ist im allgemeinen selbst wieder eine eigene Untersuchung nothwendig.

Wie nun im Folgenden gezeigt werden soll, gibt es auch Fälle, in denen diese Schwierigkeit nicht vorliegt, wo man vielmehr Werte c mit der verlangten Eigenschaft direct angeben kann.

So wird z. B. bewiesen werden, dass, wenn die Wurzeln von $f(z)=0$ alle reell und von gleichem Vorzeichen sind, man $c=0$ wählen darf.

Dieser Satz liefert, wenn alle Wurzeln einer Gleichung $f(z)=0$ reell sind, eine einfache Lösung der Aufgabe,

> zu irgend einer reellen Größe $\varkappa$ jene Wurzel von $f(z)=0$ zu finden, welche nächstgrößer oder nächstkleiner als $\varkappa$ ist. (Vgl. (F), (G) in § 3).

Es erscheint hienach die Abänderung der Newton'schen Methode, welche H. Laguerre[1]) zur Lösung derselben Aufgabe angegeben hat, als unnöthig.

Auch in dem etwas allgemeineren Fall, dass die Coefficienten von $f(z)$ reell sind, und $f(z)=0$ eine reelle Wurzel kleinsten ab-

[1]) Nouvelles annales de math. II. Serie. Bd. 19

soluten Betrages besitzt, ist es leicht, die Gleichung $f(z)=0$ auf eine andere zurückzuführen, für welche man die Newton'sche Entwicklung mit dem Werte $c=0$ beginnen darf.

§ 1. Die vorgelegte Gleichung $f(z)=0$ habe die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Bildet man dann mit Hilfe irgend einer Größe c successive die Ausdrücke (1), so kann $c_{\lambda+1}$ wegen

$$\frac{f'(c_\lambda)}{f(c_\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{c_\lambda - z_\nu}$$

auch in der Form

$$c_{\lambda+1} = c_\lambda + \frac{1}{\sum \frac{1}{z_\nu - c_\lambda}} \tag{2}$$

geschrieben werden. Setzt man andrerseits

$$x_\nu = z_\nu - c$$

und bildet successive die Ausdrücke

$$\begin{aligned} p &= \sum_1^n \frac{1}{x_\nu}, & x_\nu' &= p x_\nu - 1 \\ p' &= \sum_1^n \frac{1}{x_\nu'}, & x_\nu'' &= p' x_\nu' - 1 \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ p^\lambda &= \sum_1^n \frac{1}{x_\nu^\lambda}, & x_\nu^{\lambda+1} &= p^\lambda x_\nu^\lambda - 1 \end{aligned} \tag{3}$$

so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichungen

$$c_{\lambda+1} = c_\lambda + \frac{1}{p p' \ldots p^\lambda} \tag{4}$$

$$z_\nu = c_{\lambda+1} + \frac{1}{p p' \ldots p^\lambda} x_\nu^{\lambda+1}. \tag{5}$$

Denn zunächst ist $z_\nu - c = x_\nu$, also nach (2)

$$c_1 = c + \frac{1}{\sum \frac{1}{x_\nu}} = c + \frac{1}{p}$$

und

$$z_\nu - c_1 = z_\nu - \left(c + \frac{1}{p}\right) = x_\nu - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} x_\nu'.$$

Nachdem so die Gleichungen (4), (5) für $\lambda=0$ bewiesen sind, kann man den Schluss von λ auf $\lambda+1$ durchführen.

Die Formeln (3) bis (5) werden illusorisch, wenn eine der Größen $p, p', \ldots, p^{\lambda}, \ldots$ Null oder ∞ ist. Seien z. B. $p, \ldots, p^{\lambda-1}$ weder 0 noch ∞, dagegen entweder $p^{\lambda}=0$ oder $p^{\lambda}=\infty$. Im ersten Fall ist nach (4) $c_{\lambda+1}=\infty$, im zweiten muss eine der Größen x_{ν}^{λ}, etwa x_1^{λ} gleich Null sein; dann folgt aus (5), wenn darin λ durch $\lambda-1$ ersetzt wird, dass $z_1=c_{\lambda}$ oder $f(c_{\lambda})=0$ sein muss.

(A) Beide Fälle ausschließend, wollen wir bloß nach den Bedingungen fragen, unter welchen $\lim\limits_{\lambda=\infty} c_{\lambda}$ eine Wurzel von $f(z)=0$ darstellt, ohne dass bereits für ein endliches $\lambda\, f(c_{\lambda})$ selbst gleich Null ist.

Nennen wir z_1 jene Wurzel, welcher c_{λ} sich mit wachsendem λ beliebig annähern soll, so muss, wenn z_k irgend eine von z_1 verschiedene Größe unter $z_1, \ldots, z_n$ vorstellt, der Ausdruck

$$\frac{z_1-c_{\lambda+1}}{z_{\varkappa}-c_{\lambda+1}}$$

mit $\lambda=\infty$ beliebig klein werden. Nach (5) ist aber

$$\frac{z_1-c_{\lambda+1}}{z_{\varkappa}-c_{\lambda+1}}=\frac{x_1^{\lambda+1}}{x_{\varkappa}^{\lambda+1}},$$

mithin ist bei $\lim\limits_{\lambda=\infty} c_{\lambda}=z_1$ auch

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{x_1^{\lambda}}{x_{\varkappa}^{\lambda}}=0 \tag{6}$$

und umgekehrt. Durch (6) wird überdies von selbst der Fall, dass eine der Größen $p, p', \ldots$ gleich Null sein könnte, ausgeschlossen, da z. B. aus $p^{\lambda}=0$ folgt, dass alle Größen $x_{\nu}^{\lambda+1}$ einander gleich sind, ebenso alle Größen $x_{\nu}^{\lambda+2}$, u. s. f., entgegen der Bedingung (6).

(B) Wir können somit die Aufgabe (A) auch dahin formulieren: Bedingungen für n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu finden, damit, wenn man successive die Größen

$$p=\Sigma\frac{1}{x_{\nu}}, \qquad x_{\nu}'=p\,x_{\nu}-1$$

$$p'=\Sigma\frac{1}{x_{\nu}'}, \qquad x_{\nu}''=p'\,x_{\nu}'-1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p^{\lambda}=\Sigma\frac{1}{x_{\nu}^{\lambda}}, \qquad x_{\nu}^{\lambda+1}=p^{\lambda}\,x_{\nu}^{\lambda}-1$$

bildet,

$$\lim \frac{x_1^\lambda}{x_\varkappa^\lambda} = 0$$

sei, und keine der Größen x_ν^λ (für ein endliches λ) verschwinde.

Aus der Gleichung (4) folgt weiter:

$$c_{\lambda+1} = c + \frac{1}{p} + \frac{1}{p\,p'} + \cdots + \frac{1}{p\,p' \ldots p^\lambda}, \tag{7}$$

daher sind, wenn die Bedingung (6) für $\lim c_\lambda = z_1$ erfüllt ist, z_1 und $x_1 = z_1 - c$ darstellbar durch

$$\begin{aligned} z_1 &= c + \frac{1}{p} + \frac{1}{p\,p'} + \cdots + \frac{1}{p\,p' \ldots p^\lambda} + \cdots \\ x_1 &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p\,p'} + \cdots + \frac{1}{p\,p' \ldots p^\lambda} + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

Die letzte Gleichung ist auch identisch mit der Aussage, dass die Newton'sche Methode, angewandt auf jene Gleichung $F(x) = 0$, deren Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ sind, mit Hilfe des Anfangswertes Null eine Wurzel x_1 von $F(x) = 0$ liefert.

Aus der Gleichung (6) ergeben sich auch die Grenzwerte, welche x_1^λ, $x_\varkappa^\lambda$, p^λ für $\lambda = \infty$ haben. Sind r der Größen x_ν gleich x_1, während die übrigen $n - r$ von x_1 verschieden sind, so ist

$$\lim x_1^\lambda = r - 1, \quad \lim x_\varkappa^\lambda = \infty, \; \lim p^\lambda = \frac{r}{r-1}. \tag{9}$$

Denn wegen $\lim \frac{x_1^\lambda}{x_\varkappa^\lambda} = 0$ ist der Grenzwert von

$$p^\lambda x_1^\lambda = \Sigma \frac{x_1^\lambda}{x_\nu^\lambda} = r + \Sigma \frac{x_1^\lambda}{x_\varkappa^\lambda}$$

für $\lambda = \infty$ gleich r, woraus folgt

$$\lim x_1^{\lambda+1} = \lim \left[x_1^\lambda\, p^\lambda - 1\right] = r - 1$$

$$\lim x_\varkappa^{\lambda+1} = \lim \left[\frac{x_\varkappa^\lambda}{x_1^\lambda}\, x_1^\lambda\, p^\lambda - 1\right] = \infty,$$

d. s. die ersten beiden Relationen (9); die dritte ergibt sich aus

$$\lim x_1^\lambda = r - 1$$

$$\lim x_1^\lambda\, p^\lambda = r.$$

Für $r = 1$, wenn also z_1 eine einfache Wurzel von $f(z) = 0$ ist, wird $\lim p^\lambda = \infty$, und dies besagt, dass dann die Reihen (8) für z_1, resp. x_1 schließlich rascher als jede geometrische Reihe convergieren.

Die Bedingung (6) ist ferner gleichwertig mit

$$\lim \frac{x_1^\lambda}{x_\varkappa^\lambda - x_1^\lambda} = 0 \tag{10}$$

für den Ausdruck links erhält man mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{x_1'}{x_\varkappa' - x_1'} = \frac{x_1}{x_\varkappa - x_1} \, \frac{x_1'}{1 + x_1'}$$

$$\frac{x_1''}{x_\varkappa'' - x_1''} = \frac{x_1'}{x_\varkappa' - x_1'} \, \frac{x_1''}{1 + x_1''}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^\lambda}{x_\varkappa^\lambda - x_1^\lambda} = \frac{x_1^{\lambda-1}}{x_\varkappa^{\lambda-1} - x_1^{\lambda-1}} \, \frac{x_1^\lambda}{1 + x_1^\lambda}$$

die Form

$$\frac{x_1^\lambda}{x_\varkappa^\lambda - x_1^\lambda} = \frac{x_1}{x_\varkappa - x_1} \left[\frac{x_1'}{1 + x_1'} \, \frac{x_1''}{1 + x_1''} \cdots \frac{x_1^\lambda}{1 + x_1^\lambda} \right]$$

und es kann somit die Bedingung (10) durch

$$\lim \left[\frac{x_1'}{1 + x_1'} \, \frac{x_1''}{1 + x_1''} \cdots \frac{x_1^\lambda}{1 + x_1^\lambda} \right] = 0 \tag{11}$$

ersetzt werden.

Die Größen x_ν' sind übrigens nicht mehr unabhängig von einander, sondern es besteht zwischen ihnen die Relation

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 + x_\nu'} = 1,$$

wie aus

$$\frac{1}{x_\nu} = \frac{p}{1 + x_\nu'}$$

und

$$\Sigma \frac{1}{x_\nu} = p \, \Sigma \frac{1}{1 + x_\nu'}$$

hervorgeht. Ebenso ist

$$\Sigma \frac{1}{1 + x_\nu''} = 1 \text{ u. s. f.}$$

§. 2. Größen $x_1, \ldots, x_n$ von der Art, wie sie die Aufgabe (B) zu finden verlangt, erhält man, wenn $x_1, \ldots, x_n$ die beiden nachstehenden Eigenschaften besitzen:

(C) 1. Die symmetrischen Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ sollen reell sein.

2. Der reelle Bestandtheil jeder der Größen $\frac{x_\varkappa}{x_1}$ soll positiv und $\geqq 1$ sein, wobei $x_\varkappa$ wie vorher irgend eine der Größen x_ν, welche von x_1 verschieden ist, bezeichnet.

Infolgedessen hat man den Satz:

(D) Besitzen Größen $x_1, \ldots, x_n$ die in (C) angeführten Eigenschaften, so darf man die Newton'sche Entwicklung für die Gleichung $F(x) = 0$, deren Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ sind, mit dem Wert Null beginnen.

Die Größe x_1, deren Existenz in (C) gefordert wird, muss jedenfalls reell sein. Denn wäre x_1 complex gleich $\alpha + i\beta$, so müsste der Voraussetzung nach eine der Größen x gleich $\alpha - i\beta$ sein, der reelle Bestandtheil von

$$\frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

wäre somit nicht positiv $\geqq 1$. Daher ist, wenn

$$x_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$$

gesetzt wird, nothwendig $\beta_1 = 0$.

Ferner sollte in $\frac{x_\varkappa}{x_1} = \frac{\alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa}{\alpha_1}$ der reelle Theil $\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_1}$ positiv $\geqq 1$ sein, demnach sind alle Größen α_ν von gleichem Vorzeichen, und wir dürfen dieselben alle als positiv voraussetzen, da sich die Größen $x'_1, \ldots, x'_n$ nicht ändern, wenn die Größen x_ν durch $-x_\nu$ ersetzt werden. Dann ist

$$\alpha_\varkappa \geqq \alpha_1 > 0. \tag{13}$$

Zunächst soll gezeigt werden, dass auch die Größen x'_ν der Bedingung (C) genügen. Weil $p = \Sigma \frac{1}{x_\nu}$ reell ist, müssen auch die symmetrischen Functionen der Größen $x'_\nu = p\,x_\nu - 1$ reell sein, ebenso ist x'_1 reell. Setzt man ferner

$$x'_\nu = p\,x_\nu - 1 = \alpha'_\nu + i\beta'_\nu$$

so folgt durch Trennung des Reellen und Imaginären

(14) $$\alpha'_\nu = p\,\alpha_\nu - 1; \quad \beta'_\nu = p\,\beta_\nu,$$

wobei p den Wert

$$p = \Sigma \frac{1}{x_\nu} = \Sigma \frac{\alpha_\nu - i\beta_\nu}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2} = \Sigma \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}$$

hat. Da $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alle positiv sind, muss

$$p > \frac{1}{\alpha_1}$$

sein und deshalb ist sowohl

$$x'_1 = \alpha'_1 = p\,\alpha_1 - 1$$

positiv, als auch

$$\alpha'_\varkappa - \alpha'_1 = p(\alpha_\varkappa - \alpha_1)$$

nicht negativ, also, wie zu zeigen war

(13') $$\alpha'_\varkappa \geqq \alpha'_1 > 0.$$

Ebenso lässt sich zeigen, dass

$$\alpha''_\varkappa \geqq \alpha''_1 > 0$$

ist u. s. f. Außer den so bewiesenen Ungleichungen

(15) $$\alpha'_1 > 0, \quad \alpha''_1 > 0, \quad \alpha'''_1 > 0, \ldots$$

bestehen auch noch die folgenden

(16) $$\alpha'_1 > \alpha''_1 > \alpha'''_1 > \ldots$$

Denn es ist, wenn r der Größen x_ν gleich x_1 sind,

$$p = \frac{r}{x_1} + \Sigma \frac{1}{x_\varkappa} = \frac{r}{\alpha_1} + \Sigma \frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2}$$

und daher

$$\alpha'_1 = p\,\alpha_1 - 1 = r - 1 + \Sigma \frac{\alpha_1 \alpha_\varkappa}{\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2}$$

und ebenso

$$\alpha''_1 = p'\,\alpha'_1 - 1 = r - 1 + \Sigma \frac{\alpha'_1 \alpha'_\varkappa}{\alpha'^2_\varkappa + \beta'^2_\varkappa}$$

woraus durch Subtraction folgt

$$\alpha_1' - \alpha_1'' = \sum\left(\frac{\alpha_1\alpha_\varkappa}{\alpha_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2} - \frac{\alpha_1'\alpha_\varkappa'}{\alpha_\varkappa'^2+\beta_\varkappa'^2}\right)$$
$$= \sum\frac{\alpha_\varkappa\alpha_\varkappa'(\alpha_1\alpha_\varkappa'-\alpha_\varkappa\alpha_1') + (\alpha_1\alpha_\varkappa\beta_\varkappa'^2-\alpha_1'\alpha_\varkappa'\beta_\varkappa^2)}{(\alpha_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2)(\alpha_\varkappa'^2+\beta_\varkappa'^2)}.$$

Aus (14) folgt aber

$$\alpha_1\alpha_\varkappa' - \alpha_\varkappa\alpha_1' = \alpha_\varkappa - \alpha_1 \geqq 0$$
$$\alpha_1\alpha_\varkappa\beta_\varkappa'^2 - \alpha_1'\alpha_\varkappa'\beta_\varkappa'^2 = \beta_\varkappa^2(\alpha_1'+\alpha_\varkappa'+1) \geqq 0,$$

somit ist jeder Summand der letzten Summe positiv und die erste der Ungleichungen (16) bewiesen; die übrigen sind in gleicher Weise zu verificieren. Wegen (15), (16) ist also wirklich der zu erfüllenden Bedingung (11)

$$\lim_{\lambda=\infty}\left[\frac{\alpha_1'}{1+\alpha_1'}\,\frac{\alpha_1''}{1+\alpha_1''}\cdots\frac{\alpha_1^\lambda}{1+\alpha_1^\lambda}\right] = 0$$

Genüge geleistet. Die gleichwertige Bedingung (6) wird in unserem Fall derart befriedigt, dass auch noch

$$\left|\frac{x_1}{x_\varkappa}\right| > \left|\frac{x_1'}{x_\varkappa'}\right| > \left|\frac{x_1''}{x_\varkappa''}\right| > \cdots$$

ist, denn die Differenz

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2} - \frac{\alpha_1'^2}{\alpha_\varkappa'^2+\beta_\varkappa'^2} = \frac{(\alpha_\varkappa-\alpha_1)(2p\alpha_1\alpha_\varkappa-\alpha_\varkappa-\alpha_1)+\beta_\varkappa^2(2p\alpha_1-1)}{(\alpha_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2)(\alpha_\varkappa'^2+\beta_\varkappa'^2)}$$

ist wegen $\alpha_\varkappa - \alpha_1 \geqq 0$ und $p\alpha_1 > 1$ positiv.

§. 3. Offenbar besitzen irgendwelche reelle Größen $x_1, \ldots, x_n$ von gleichem Vorzeichen die in (C) angeführten Eigenschaften, da man einfach für x_1 die numerisch kleinste der Größen x_ν zu nehmen hat. Dieser specielle Fall liefert demnach den Satz:

Sind $x_1, \ldots, x_n$ reelle Größen, die alle dasselbe Vorzeichen besitzen, so convergiert die Reihe

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{pp'} + \frac{1}{pp'p''} + \cdots$$

in welcher $p, p', \ldots$ gemäß den Gleichungen (3) zu bilden sind, und hat die numerisch kleinste der Größen $x_1, \ldots, x_n$ zur Summe.

Ist nunmehr eine Gleichung $f(z) = 0$ vorgelegt, deren Wurzeln alle reell sind, so kann man leicht c so wählen, dass alle Größen $z_\nu - c = x_\nu$ dasselbe Vorzeichen erlangen.

Weiß man bereits, dass alle z_ν selbst gleichbezeichnet sind, so kann man $c = 0$ wählen.

Andernfalls kann man z. B. $c = \pm M$ wählen, wo die positive Größe M größer als der absolute Betrag aller Wurzeln z_ν ist. Für M sind verschiedene Formeln aufgestellt worden.[1])

(F) Wenn daher die Wurzeln einer Gleichung $f(z) = 0$ sämmtlich reell sind, so darf man die Newton'sche Entwicklung mit jedem reellen Wert c beginnen, dessen Betrag größer als jener aller Wurzeln von $f(z) = 0$ ist.

Man erhält auf diese Weise die (algebraisch) kleinste oder größte Wurzel, je nachdem $c < 0$ oder $c > 0$ ist.

Zur Beurtheilung der Annäherung von $c_{\lambda+1}$ an diese Wurzel, es sei dieselbe wieder z_1, liefert die Gleichung (5) zunächst

$$z_1 - c_{\lambda+1} = \frac{x_1^{\lambda+1}}{pp'\ldots p^\lambda} = x_1^{\lambda+1}(c_{\lambda+1} - c_\lambda).$$

Nun ist gemäß (16) $x_1^{\lambda+1} < x_1'$ und x_1' ist durch

$$x_1' = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p'p''} + \cdots + \frac{1}{p'p''\ldots p^\lambda} + \cdots$$

darstellbar, somit kleiner als

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p'p''} + \cdots + \frac{1}{p'p''\ldots p^\lambda} = p(c_{\lambda+1} - c_1) = \frac{c_{\lambda+1} - c_1}{c_1 - c}.$$

Daher folgt für die gesuchte Differenz von $c_{\lambda+1}$ und der zu berechnenden Wurzel

$$(17) \qquad |z_1 - c_{\lambda+1}| < \frac{c_{\lambda+1} - c_1}{c_1 - c} \, |c_{\lambda+1} - c_\lambda|.$$

Es ist zu bemerken, dass

$$|c_1 - c| > |c_2 - c_1| > |c_3 - c_2| > \cdots$$

ist, denn da alle x_ν' positiv sind (nach (13')), so folgt aus $x_\nu' = p x_\nu - 1$

$$x_\nu' < p x_\nu, \quad p' = \Sigma \frac{1}{x_\nu'} > \frac{1}{p} \Sigma \frac{1}{x_\nu} > 1,$$

[1]) Vgl. z. B. Serret, Handbuch d. h. Algebra §. 46.

also ist $p' > 1$, ebenso $p'' > 1$, u. s. f., was nach (4) die obige Bemerkung beweist.

Anstatt die Gleichung $f(z) = 0$ durch die Substitution $z = x + c$ auf eine solche in x mit lauter gleichbezeichneten Wurzeln zurückzuführen, kann dies auch in der Weise geschehen, dass man die Gleichung bildet, deren Wurzeln $z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2$ sind und für die man die Newton'sche Entwicklung sofort mit dem Wert Null beginnen kann.

Eine dritte Art, die Gleichung $f(z) = 0$ auf eine solche mit gleichbezeichneten Wurzeln zurückzuführen, besteht in der Substitution $x = \frac{z}{z + m}$, wo m numerisch kleiner als jede der Wurzeln z_ν sein soll. Alsdann wird nämlich jede der Größen

$$x_\nu = \frac{z_\nu}{z_\nu + m}$$

positiv sein, gleichgiltig welches Vorzeichen m hat, und die Newton'sche Methode, angewandt auf die Gleichung

$$F(x) = f\left(\frac{m x}{1 - x}\right) = 0$$

mit dem Anfangswert Null liefert die kleinste der Größen x_ν, es sei dies x_1. Die so erhaltene Wurzel $z_1 = \frac{m x_1}{1 - x_1}$ ist, jenachdem $f(z) = 0$ Wurzeln mit dem für m gewählten Vorzeichen besitzt oder nicht, im ersten Fall die numerisch kleinste der mit m gleichbezeichneten, im zweiten Fall die numerisch größte der mit m ungleichbezeichneten Wurzeln von $f(z) = 0$.

Würde man statt der Gleichung $f(z) = 0$ die Gleichung $f(z + \varkappa) = f_1(z) = 0$ der Betrachtung zu Grunde gelegt haben, so würde man für die Aufgabe

> jene Wurzel von $f(z) = 0$ zu finden, welche nächstgrößer oder nächstkleiner als $\varkappa$ ist,

die nachfolgende Lösung erhalten haben:

(G) Man entscheide zunächst, ob die Wurzeln von $f_1(z) = 0$ alle gleichbezeichnet sind oder nicht. Der erste Fall tritt dann und nur dann ein, wenn in der Reihe

$$f(\varkappa),\ \frac{1}{1!} f'(\varkappa),\ \frac{1}{2!} f''(\varkappa), \ldots \tag{18}$$

entweder bloß Zeichenwechsel oder bloß Zeichenfolgen vorkommen.

In diesem Fall liefert die Newton'sche Methode für $f(z)=0$ mit dem Anfangswert $\varkappa$ die der Größe $\varkappa$ zunächst benachbarte Wurzel von $f(z)=0$.

Im zweiten Fall wähle man zunächst die positive Größe m kleiner als den absoluten Betrag einer jeden Wurzel von $f_1(z)=0$.[1])

Dann liefert die Newton'sche Methode, angewandt auf die beiden Gleichungen

$$F_1(x)=f_1\left(\frac{mx}{1-x}\right)=f\left(\varkappa+\frac{mx}{1-x}\right)=0$$

$$F_2(x)=f_1\left(\frac{-mx}{1-x}\right)=f\left(\varkappa-\frac{mx}{1-x}\right)=0,$$

jedesmal mit dem Anfangswert Null, zwei Größen x_1, x_2, durch welche die verlangten Wurzeln z_1, z_2 in der Form

$$z_1=\varkappa+\frac{mx_1}{1-x_1},\quad z_2=\varkappa-\frac{mx_2}{1-x_2}$$

darstellbar sind.

§. 4. Auch der allgemeinere Fall, dass die Gleichung $f(z)=0$ reelle Coefficienten besitzt, und unter denjenigen ihrer Wurzeln, welche den kleinsten absoluten Betrag haben, sich eine reelle befindet, lässt sich auf den in §. 2 erörterten Fall zurückführen.

Wir nehmen an, es sei z_1 jene Wurzel, so dass bei

$$z_\nu=\gamma_\nu+i\delta_\nu$$

$$\delta_1=0,\ \gamma_1^2\leqq\gamma_\varkappa^2+\delta_\varkappa^2$$

ist. Kennt man jetzt das Vorzeichen von z_1, so erhält man durch die Substitution

$$x_\nu=\frac{z_\nu}{z_\nu+m},$$

wobei m reell, mit z_1 gleichbezeichnet und an absolutem Betrag kleiner als alle $|z_\nu|$ sein soll, Größen x_ν, welche der Bedingung (C) genügen. Dann ist nämlich

$$\frac{x_\varkappa}{x_1}-1=\frac{m}{z_1}\,\frac{z_\varkappa-z_1}{z_\varkappa+m},$$

---

[1]) Man erhält z. B. einen Wert für m (vgl. Serret a. a. O.), wenn man

$$m=\frac{|f(\varkappa)|}{A+|f(\varkappa)|}$$

setzt, wo die positive Größe A größer als der absolute Betrag eines jeden der Ausdrücke (18) ist.

und der reelle Theil hievon

$$\frac{m}{\gamma_1} \frac{(\gamma_\varkappa - \gamma_1)(\gamma_\varkappa + m) + \delta_\varkappa^2}{(\gamma_\varkappa + m)^2 + \delta_\varkappa^2}$$

ist positiv. Denn entweder ist $|\gamma_\varkappa| \geqq |\gamma_1|$ somit auch $|\gamma_\varkappa| > |m|$ dann haben $\gamma_\varkappa + m$ und $\gamma_\varkappa - \gamma_1$ beide das Vorzeichen von $\gamma_\varkappa$, und ihr Produkt ist positiv. Oder es ist $|\gamma_\varkappa| < |\gamma_1|$, dann wird

$$(\gamma_\varkappa + m)(\gamma_\varkappa - \gamma_1) + \delta_\varkappa^2 = (\gamma_\varkappa^2 + \delta_\varkappa^2 - \gamma_1^2) + (\gamma_1 - \gamma_\varkappa)(\gamma_1 - m)$$

ebenfalls positiv. Es ist somit für die Größen x_ν die Bedingung (C) erfüllt.

Will man hingegen das Vorzeichen von z_1 nicht als bekannt voraussetzen, so braucht man nur die Gleichung zu bilden, deren Wurzeln die Größen

$$x_\nu = \frac{z_\nu^2}{z_\nu^2 + m^2}$$

sind, wobei m reell und numerisch kleiner als alle $|z_\nu|$ zu wählen ist, und darf wiederum für diese Gleichung die Newton'sche Entwicklung mit dem Werte Null beginnen.

Druckfehlerberichtigung

zu der Abhandlung: „Über das Poisson'sche und das demselben conjugierte Integral" von A. Tauber.

S. 109, Z. 1 v. u. statt S. ist zu lesen S. 79. S. 110, Z. 9 v. o. statt z ist zu lesen α. S. 114, Z. 9 v. o. statt ρ_σ ist zu lesen $\rho'_\sigma > \rho_\sigma$. S. 114, Z. 10, 13 v. o. statt ρ_σ ist zu lesen ρ'_σ. S. 115, Z. 8, 12 v. o. statt $v(\rho, \alpha)$ ist zu lesen $2\pi v(\rho, \alpha)$.