Zur Theorie der algebraischen Gleichungen.

Von **Leopold Gegenbauer** in Wien.

Vor Kurzem wurde von den Herren Hölder[1]), Mollame[2]), Kneser[3]) und mir[4]) bewiesen, dass die Wurzeln einer in einem bestimmten reellen Rationalitätsgebiete irreductiblen cubischen Gleichung sich nicht durch einen aus lauter reellen Radicalen zusammengesetzten Ausdruck darstellen lassen, falls dieselben sämmtlich reell sind, woraus folgt, dass der sogenannte casus irreducibilis der Cardani'schen Formel nicht einem Mangel der angewandten Methode entspringt, sondern in dem Wesen der algebraischen Auflösung der Gleichungen begründet ist. Herr Kneser und ich haben bei dieser Gelegenheit überdies noch das folgende Theorem, von welchem das auf die cubischen Gleichungen bezügliche der speciellste Fall ist, bewiesen:

Eine in einem bestimmten reellen Rationalitätsbereiche irreductible algebraische Gleichung mit nur reellen Wurzeln, deren Grad keine Potenz von 2 ist, kann nicht unter ausschließlicher Benützung von reellen Radicalen algebraisch aufgelöst werden.

Aus demselben folgt, wie hier besonders hervorgehoben werden mag, u. A. das Theorem:

Die reelle und die imaginäre Coordinate der n^{ten} Wurzel aus einer complexen Zahl kann, falls n keine Potenz von 2 ist, nicht durch lauter reelle Radicale ausgedrückt werden.

Es lässt sich nun, wie in der vorliegenden Mittheilung gezeigt werden soll, mit den allereinfachsten Mitteln ein allgemeiner Satz ableiten, aus welchem die eben erwähnten Theoreme unmittelbar folgen.

Eine Wurzel x_1 der in einem bestimmten reellen Rationalitätsgebiete irreductiblen algebraischen Gleichung

$$\text{(I)} \qquad x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n f_n = 0$$

lasse sich unter Adjunction einer reellen (ξ_1) unter den Wurzeln ξ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, p)$ der in demselben Bereiche irreductiblen Gleichung

$$\text{(II)} \qquad x^p - \varphi_1 x^{p-1} + \varphi_2 x^{p-2} - \ldots + (-1)^p \varphi_p = 0$$

---

1) „Über den Casus Irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades". — Mathematische Annalen, 38. Band, S. 307—312.

2) Schriften der Akademie der Wissenschaften in Neapel.

3) „Bemerkungen über den sogenannten casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen." Mathematische Annalen, 41. Band, S. 344—348.

4) „Über den sogenannten casus irreducibilis der Cardani'schen Formel." Monatshefte für Mathematik und Physik, 4. Jahrgang, S. 155—158.

vom Primzahlgrade p in einem reellen Gebiete, in welchem die Irreductibilität der beiden Gleichungen bestehen bleibt, darstellen, so dass also

$$x_1 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} a_\lambda \xi_1^\lambda$$

ist, wo die Coefficienten a_λ $(\lambda = 0, 1, \ldots, p-1)$ reelle Zahlen sind. Wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (II) genügen sämmtliche p Ausdrücke

$$\chi(\xi_\mu) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} a_\lambda \xi_\mu^\lambda \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

der Gleichung (I) und daher müssen, falls diese weniger reelle oder weniger complexe Wurzeln besitzt, als die zur Auflösung verwendete Hilfsgleichung (II) mindestens zwei der Größen $\chi(\xi_\mu)$ denselben Wert haben.

Nun ist aber bekanntlich die Anzahl derjenigen Werte von μ, für welche $\chi(\xi_\mu)$ denselben Wert erhält, sowie die Anzahl der (verschiedenen) conjugierten algebraischen Zahlen $\chi(\xi_\mu)$ ein Theiler der Ordnung (p) von ξ_μ und demnach kann die erstere, da sie größer als 1 ist, nur gleich p, die letztere aber nur gleich 1 sein. Man hat daher in diesem Falle die Gleichung

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=p}\left(x - \chi(\xi_\mu)\right) = \left(x - \chi(\xi_1)\right)^p = G(x; a_0, a_1, \ldots a_{p-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p),$$

wo $G(x; a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ eine ganze Function von x vom Grade p ist, deren Coefficienten dem reellen Rationalitätsgebiete der nach dem Strichpunkte stehenden Größen angehören. Da nach dieser Gleichung

$$x - \chi(\xi_1) = \frac{p\, G(x; a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)}{G'(x; a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)}$$

ist, so gehört auch $\chi(\xi_1)$ dem soeben angeführten Rationalitätsbereiche an; dies ist aber nach der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichungen (I) und (II) unmöglich und daher hat man das Theorem:

Erhält eine in einem bestimmten reellen Rationalitätsgebiete irreductible algebraische Gleichung bei Erweiterung des Bereiches durch Adjunction einer beliebigen Anzahl von reellen Größen keine rationale Wurzel, so verliert sie diese Eigenschaft auch nicht, wenn zu den adjungierten Größen noch die Wurzel einer im erweiterten Gebiete irreductiblen Gleichung von einem Primzahlgrade, welche mehr reelle oder mehr complexe Wurzeln als dieselbe besitzt, hinzugenommen wird.

Beachtet man, dass die algebraische Auflösung der Gleichungen die Darstellung der Wurzeln durch eine Kette von reinen Gleichungen vom Primzahlgrade ist, so erschließt man aus diesem Satze sofort den folgenden speciellen:

Eine in einem bestimmten reellen Rationalitätsgebiete irreductible algebraische Gleichung ist in einem reellen Gebiete, welchem keine ihrer Wurzeln angehört, nicht oder nur so algebraisch auflösbar, dass jeder bei der Darstellung auftretende äussere (primzahlige) Wurzelexponent nicht um mehr als zwei Einheiten größer ist, als die Anzahl ihrer complexen Wurzeln.

Nun ist aber bekanntlich jeder dieser äußeren Wurzelexponenten ein Theiler des Grades der aufzulösenden Gleichung, und daher hat man das weitere Theorem:

Eine in einem bestimmten reellen Rationalitätsgebiete irreductible algebraische Gleichung ist in einem reellen Gebiete, innerhalb dessen keine ihrer Wurzeln liegt, algebraisch unauflösbar, wenn sie entweder keine reelle Wurzel besitzt, oder wenn die Anzahl ihrer complexen Wurzeln um mehr als eine Einheit kleiner ist, als der kleinste ungerade Primtheiler ihres Grades.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist folgender:

Die reellen Wurzeln einer in einem bestimmten reellen Rationalitätsgebiete irreductiblen algebraischen Gleichung, deren Grad die Potenz einer ungeraden Primzahl ist, können nicht unter bloßer Benützung von reellen Radicalen dargestellt werden, wenn dieselbe mehr als **eine** reelle Wurzel besitzt.