

## Note über einige besondere inverse Flächen des Cayley'schen Cylindroids.

Von Eduard Janisch in Wien.

Herr C. Tesch hat im Brill'schen Verlag kürzlich Modelle der Flächen herausgegeben, welche von den Krümmungskreisen der durch irgend einen Punkt einer beliebigen Fläche geführten Normalschnitte erfüllt sind.<sup>1)</sup>

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass diese Flächen, welche wesentlich verschiedene Gestalten annehmen, je nachdem der gewählte Punkt ein elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Punkt ist, sämtlich nach dem Principe der reciproken Radien aus dem Cayley'schen Cylindroide (Plücker'schem Conoide) abgeleitet werden können.

Wir gehen zu dem Zwecke von der bekannten Euler'schen Formel aus

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} \pm \frac{\sin^2 \alpha}{R_2},$$

welche den Krümmungsradius  $R$  irgend eines Normalschnittes ausdrückt durch die Krümmungsradien  $R_1, R_2$  der Hauptschnitte und den Winkel  $\alpha$ , den die Ebene jenes Normalschnittes mit der Ebene des ersten Hauptschnittes einschließt.

Sei nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem derart gewählt, dass die Ebenen der beiden Hauptschnitte beziehungsweise mit der  $xz$ - und  $yz$ -Ebene zusammenfallen und den Hauptkrümmungskreisen resp. die Gleichungen zukommen:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + (z - R_1)^2 &= R_1^2 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} K_1, \quad \left. \begin{aligned} y^2 + (z \mp R_2)^2 &= R_2^2 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} K_2,$$

so finden wir zunächst, wenn wir den Coordinatenanfangspunkt zum Inversionscentrum wählen und  $2\rho^2$  als Inversionspotenz nehmen, als Inverse der beiden Kreise  $K_1, K_2$  die Geraden:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\rho^2}{R_1} \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} k_1, \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{\rho^2}{\pm R_2} \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} k_2.$$

<sup>1)</sup> Brill, Mathemat. Modelle, Serie XXII.

Die Gerade  $k$ , welche die Inverse des Krümmungskreises  $K$  für den unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die  $xz$ -Ebene geneigten Normal-schnitt erscheint, hat dann die Gleichungen:

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha, \quad z = \frac{\rho^2}{R} = \rho^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} \pm \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} \right).$$

Die Gleichungen für den Ort der Geraden  $k$ , welcher augenscheinlich ein gerades Conoid mit der  $xy$ -Ebene als Richtebene und der  $z$ -Axe als gerader Leitlinie ist, ergibt sich nunmehr durch Elimination von  $\alpha$  aus den beiden Gleichungen für  $k$  und zwar zunächst in der Form:

$$z = \frac{\rho^2}{x^2 + y^2} \left( \frac{x^2}{R_1} \pm \frac{y^2}{R_2} \right).$$

Setzen wir  $\frac{\rho^2}{R_1} = a$ ,  $\frac{\rho^2}{R_2} = b$ , so erhalten wir

$$z(x^2 + y^2) = ax^2 \pm by^2,$$

und hieraus ergibt sich endlich die einfache transformierte Gleichung unseres Conoides bezogen auf ein neues durch Parallelverschiebung des alten Axensystems in der Richtung von  $z$  um den Betrag von  $+\frac{a \pm b}{2}$  erhaltenes Axensystem in der Form:

$$z(x^2 + y^2) = \frac{a \mp b}{2} (x^2 - y^2),$$

welche das Conoid als Cayley'sches Cylindroid charakterisiert.<sup>1)</sup>

Die Torsallinien desselben sind hiernach die Inversen der beiden Hauptkrümmungskreise und ihr durch die  $z$ -Axe (Doppellinie der Fläche) gemessener kürzester Abstand beträgt  $(a \mp b)$ .

Nehmen wir für  $\rho^2$  den speciellen Wert  $R_1 R_2$ , so wird  $a = R_2$ ,  $b = R_1$ , und die Gleichung des Cylindroids nimmt die einfachere Gestalt an:

$$z(x^2 + y^2) = \frac{R_2 \mp R_1}{2} (x^2 - y^2).$$

Wir können dann auf Grund des Vorausgehenden behaupten:

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt einer Fläche  $F$ ,  $T$  dessen Tangentialebene,  $N$  seine Normale und sind  $O_1$  und  $O_2$  (auf  $N$ ) die Mittelpunkte der Krümmungskreise  $K_1$ ,  $K_2$  (mit den Radien  $R_1$ ,  $R_2$ ) der durch  $N$  gehenden Hauptschnitte der Fläche  $F$ , so ist die Inverse der von den Krümmungskreisen der sämtlichen durch  $N$  gehenden Normalschnitte gebildeten Tesch'schen Fläche für

<sup>1)</sup> Vergl. etwa Mannheim, Cinématique, page 265.

das Inversionscentrum  $P$  und für  $2\rho^2 = 4R_1 R_2$  als Inversionspotenz ein Cayley'sches Cylindroid, welches die Normale  $N$  zur Doppelgeraden besitzt und deren zwei Torsallinien die Axen der beiden Hauptkreise sind, d. s. die Normalen in  $O_1$  und  $O_2$  bez. auf die Ebenen von  $K_1$  und  $K_2$ .

Es gilt dieser Satz offenbar ebensowohl für den Fall, dass  $P$  ein elliptischer, als auch für den Fall, dass  $P$  ein hyperbolischer Punkt der Fläche  $F$  sei.

Das Verhalten im Falle des parabolischen Punktes stellt eine separate Untersuchung unschwer klar. — Es ist selbstverständlich, dass in diesem Falle die Annahme  $\rho^2 = R_1 R_2$  unzulässig ist. Machen wir jedoch bezüglich  $\rho^2$  keine spezielle Annahme, so haben wir nur in der allgemeinen Gleichung

$$z(x^2 + y^2) = \frac{a \mp b}{2}(x^2 - y^2),$$

indem wir etwa  $R_2 = \infty$  voraussetzen,  $b = \frac{\rho^2}{R_2} = 0$  zu erachten und erhalten

$$z(x^2 + y^2) = \frac{\rho^2}{2R_1}(x^2 - y^2)$$

die Gleichung eines Cayley'schen Cylindroides, deren eine Torsallinie mit dem in eine gerade Linie ausgearteten Hauptkrümmungskreis augenscheinlich zusammenfällt.

Wir haben daher den Satz:

Die Fläche der Krümmungskreise der Normalenschnitte für einen parabolischen Punkt  $P$  einer Fläche  $F$  gibt zur Inversen für  $P$  als Pol ein Cayley'sches Cylindroid, welches  $P$  zu einer Spitze und die Haupttangente der  $F$  in  $P$  zur zugehörigen Torsallinie besitzt.