

Aus diesen Beziehungen werden interessante Sätze über die Verteilung von Primidealen in Zahlgruppen nach Idealteilern gewonnen, analog den Sätzen über Primzahlen in arithmetischen Reihen.

Im 5. Buch (S. 623—707) gibt der Verfasser auf mehrfachen Wunsch einen Abriß seiner Theorie der algebraischen Funktionen auf rein arithmetischer Grundlage. Den Hauptpunkt der Theorie bildet die Darstellung der Funktionen durch eine Basis, insbesondere die Minimalbasis, die jede ganze Funktion des Körpers mit ganzen rationalen Koeffizienten linear darstellt. Die Diskriminante dieser Basis ist eine reine Körperinvariante. Die Potenzreihenentwickelungen algebraischer Funktionen für einen bestimmten Wert der Variablen finden hier ihr Bild in einer arithmetisch definierten Zerlegung rationaler Funktionen in ideale Primfaktoren, wozu der Begriff des Funktionals herangezogen wird, mit einem ähnlichen Zweck und Erfolg wie im 2. Bande des Algebra zur Definition der Idealzahlen. Auf dieser Grundlage ergibt sich eine rein arithmetische Definition des Punktes und der Riemannschen Fläche, die nur vom Körper abhängt. Die Bestimmung der Differentiale erster Gattung geschieht durch Aufstellung einer Basis, die zur Minimalbasis invers ist „so daß also durch Komposition der beiden Matrizen die Einheitsmatrix folgt.“ Die neue Basis erzeugt linear genau eine dem Geschlechte gleiche Anzahl unabhängiger Differentiale der 1. Gattung. Der Riemann-Rochsche Satz und der Nachweis von genau $2p$ linear unabhängigen Integralen der zweiten Gattung bilden den Abschluß der Theorie. Weiter führt die rein arithmetische Methode nicht, denn die Definition des Integrals erfordert Grenzprozesse. Diese Theorie hat vor den anderen mehr geometrischen und funktionentheoretischen Methoden den Vorzug, keine Spezialfälle, die z. B. durch die Lage der Asymptoten, mehrfachen Punkten usw. herbeigeführt werden, erledigen zu müssen; es ist aber natürlich, daß eine Begründung, bei der auf die Reinheit der Methode das Hauptgewicht gelegt wird, in Kürze und Anschaulichkeit mit den anderen nicht wettstreiten kann.

Dem Buche sind 5 Tafeln über die verschiedenen Entwickelungen der θ -Quotienten und der elliptischen Funktionen sowie eine Tafel der Klasseninvarianten beigelegt.

Daß das Werk an Kürze und Schönheit der Darstellung bei gleichzeitiger Klarheit alle Vorzüge hat, ist bei einem Buch, das H. Weber zum Verfasser hat, selbstverständlich. Durch Herausgabe dieser zweiten Auflage wird der Verfasser sein Verdienst, eine Disziplin, in welcher die tiefsten und schönsten Sätze der Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie zu gleichen Teilen in herrlichster Verknüpfung partizipieren und zu deren Entwicklung er selbst einen guten Teil beigetragen hat, in weitere Kreise getragen zu haben, nur noch vermehren.

J. P.

Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen von Ludwig Schlesinger. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908. X + 334 Seiten.

Es gibt heutzutage mehrere vorzügliche Darstellungen der auf Riemann und Fuchs zurückgehenden analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen. Um nicht zu diesen noch eine weitere hinzuzufügen, hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, die Theorie auf neuer Grundlage aufzu-

bauen und glaubte auch, auf Grund neuer Methoden die Theorie weitergeführt zu haben. Es sind vornehmlich die Existenzsätze, die in den Vordergrund treten. Zunächst das Existenztheorem für die Lösungen. Als Ausgangspunkt dient nicht, wie bisher, eine Differentialgleichung n -ter Ordnung, sondern ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung, was durch das ganze Buch konsequent beibehalten wird. Statt, wie gewöhnlich, den Existenzsatz auf Potenzreihenentwicklung zu gründen, wird ein Lösungssystem bei gegebenen Anfangswerten durch interpolatorische Methoden, die auf Cauchy und Lipschitz zurückgehen, aufgestellt. In ihrem Wesen läuft die Lösung auf jene eines Integralgleichungssystems vom Volterra-Typus hinaus, welche sich nach Integration beider Seiten des Differentialsystems

$$\frac{dy_x}{dz} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{x\lambda}(z) \cdot y_\lambda, \quad x = 1, 2, \dots, n,$$

d. h.

$$y_x(z) = y_x(z_0) + \int_{z_0}^z \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{x\lambda}(\zeta) y_\lambda(\zeta) d\zeta, \quad x = 1, 2, \dots, n$$

durch sukzessives Einsetzen der bereits erhaltenen Näherungswerte unter dem Integralzeichen ergibt. Die Reihen sind, wie leicht zu zeigen, bei jedem Integrationsweg zwischen z_0 und z , der allen singulären Punkten ausweicht, konvergent wie eine Exponentialreihe, woraus auch gleichzeitig der Satz Poincarés folgt, das die Lösungen ganze transzendente Funktionen der in den Koeffizienten $a_{x\lambda}(z)$ ganz und rational vorhandenen Parametern sind. Dieses Ergebnis leitet jedoch Schlesinger durch eine Teilung des Integrationsweges $\widehat{z_0 z}$ und einen Grenzübergang her, wobei noch sämtliche Koeffizienten und Variablen in ihre realen und imaginären Teile gespalten werden, wodurch nicht nur der Beweisgang ins unnötige (über 50 Seiten) sich ausdehnt, sondern auch wegen des vielen Symbolismus sehr ermüdend wirkt. Eine ähnliche Methode gibt auch einen neuen Beweis des Fuchs'schen Satzes, daß die sogenannte Normalform in den singulären Punkten hinreicht, um ein Unbestimmtwerden der Lösungen zu verhindern. Der klassische Beweis nach Frobenius scheint uns aber weittragender zu sein. Das Verhalten in den Unbestimmtheitsstellen wird durch die asymptotischen Darstellungen Poincarés charakterisiert. Der Begriff der Kongruenz, Art und der Monodromiegruppe wird erörtert und das Riemannsche Problem formuliert. Der Hauptzweck des Buches ist geradezu auf die Beantwortung des Riemannschen Problems gerichtet, wonach es zu jeder beliebigen Monodromiegruppe lineare Differentialgleichungen gibt. Gelingt es zu zeigen, daß durch stetige Änderungen des System der Koeffizienten in einem Differentialsystem stets ein Differentialsystem mit vorgeschriebener Monodromiegruppe erhalten werden kann (Kontinuitätsmethode), so wäre das Problem Riemann beantwortet. Schlesinger glaubt dies geleistet zu haben, wobei noch gewisse ganze Zahlen in den Wurzeln sogenannter determinierender Fundamentalgleichungen „ganz willkürlich“ wählbar sind. Dieser Beweis Schlesingers, der in seinen speziell darauf gerichteten Vorbereitungen einen überwiegenden Teil des Buches ausmacht, ist aber unrichtig, ja der aufgestellte Satz selbst ist falsch, denn es gibt solche Differentialssysteme gar nicht immer. Der Beweis gründet sich auf einen ebenfalls

falschen Satz, wonach die Koeffizienten der Monodromiegruppe unendlich werden müßten, wenn irgend welche Koeffizienten im Differentialsystem ins Unendliche rücken. Diese Verhältnisse brauchen wir aber hier nicht näher zu erörtern.*) Den Hauptzweck des Buches wird man also wohl nicht als erreicht bezeichnen können. Im letzten Abschnitt (17. Vorlesung) werden die Lösungen als Funktionen der singulären Punkte betrachtet, die Ergebnisse finden sich aber durch die Anwendung des falschen Existenzsatzes in Mitleidenschaft gezogen.

Das Buch ist dem Andenken an L. Fuchs gewidmet.

J. P.

Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen : II. Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie von Hermann Minkowski, Professor a. d. Universität Göttingen. Leipzig, (B. G. Teubner), 1907, VIII + 236 Seiten. Geb. in Leinen M. 8.—

H. Minkowski stand unter den wenigen heutigen Mathematikern, die sich einer so abstrakten Wissenschaft, wie es die Zahlentheorie ist, aus vollem Herzen hingaben, in der vordersten Reihe und könnte fast als der einzige bezeichnet werden, welcher durch Einführung neuer Methoden der Zahlentheorie zum heutigen Aufschwung verholfen hat. Seine „Geometrie der Zahlen“ hat für die Zahlentheorie ganz neue Gesichtspunkte eröffnet und mit einer Leichtigkeit und Schärfe Sätze eingeleitet, welche vorher sei es nur mit größter Kraftenthaltung bewiesen werden konnten, teils jedem Beweisversuche trotzten. Es sei des einfachen Beweises gedacht, den die Methode Minkowskis für den Dirichletschen Satz von der Existenz und Anzahl unabhängiger Einheiten in einem algebraischen Zahlkörper gibt; insbesondere aber sichert Minkowski für immer einen Ehrenplatz in der Entwicklung der Zahlentheorie der früher vergeblich gesuchte Beweis des Satzes, daß die Diskriminante eines algebraischen (nicht rationalen) Körpers von $\neq 1$ verschieden ist, den Minkowski sogar in großartiger Weise dahin verschärft hat, daß eine gegebene Diskriminante nur einer endlichen Anzahl von Körpern zukommen kann, für deren Grad er eine obere Grenze angegeben. Das vorliegende Buch ist als eine leichte Einführung in die geometrischen Methoden der Zahlentheorie gedacht. Von den sechs Kapiteln, in welche das Werk zerfällt, enthalten die drei ersten (S. 1—117) die Herleitung geometrischer Sätze mit mannigfachen Anwendungen. Es ist zunächst ein Satz über lineare Formen, den wir Minkowski verdanken, und der gleichsam den Schlüssel zu den weiteren Resultaten gibt. Der Satz sagt aus, daß n beliebige reale lineare Formen mit der Determinante 1 stets bei geeigneter Wahl ganzzahliger Werte der n Variablen gleichzeitig kleiner als 1 und nicht sämtlich Null gemacht werden können. Das erste Kapitel (Anwendung eines elementaren Prinzips, S. 1—19) ist der Ableitung dieses Satzes gewidmet. Die beiden folgenden Kapitel (Zahlgitter in 2 Dimensionen, S. 1—58, Zahlgitter in 3 Dimensionen, S. 59—117) handeln von Formen von zwei bzw. drei Variablen und der oberen Grenze für ihren Minimalwert bei ganzzahligen Variablen. Jedem konvexen Körper läßt sich eine homogene Funktion zuordnen und so gibt die Methode dieser Kapitel

*) Sie werden vom Rezensenten und vom Autor in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung Bd. 18 (1909), p. 15, 21, 340 erörtert.
D. R.