Über zwei simultane Functional-Gleichungen.

Von G. v. **Escherich** in Wien.

Bezeichnen $g(x)$ und $h(x)$ ganze rationale Functionen von x, so kann die Frage nach einer Function $f(x)$, welche zugleich den beiden Gleichungen

$$(1) \qquad f(x+k) = e^{g(x)} f(x) \text{ und } f(x+k') = e^{h(x)} f(x)$$

genügt, durch die Substitution

$$f(x) = e^{\varphi(x)} F(x)$$

auf die Aufsuchung einer Function $F(x)$ zurückgeführt werden, welche die beiden Gleichungen

$$(2) \qquad F(x+k) = F(x) \text{ und } F(x+k') = e^{\psi(x)} F(x)$$

befriedigt und wo $\psi(x)$ wieder eine ganze rationale Function ist.

Für $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ergeben sich hierbei die Gleichungen

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{l} \varphi(x) + g(x) - \varphi(x+k) = 0. \\ \varphi(x) + h(x) - \varphi(x+k') = \psi(x). \end{array}\right\}$$

Aus den Gleichungen (2) folgt überdies, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\psi(x+k) - \psi(x) = 2ni\pi.$$

$\psi(x)$ muss somit linear sein, so dass $F(x)$ für eine periodische Function der drei Gattungen gewählt werden kann, wenn k und k', wie vorausgesetzt wird, nicht in einem reellen Verhältnisse stehen. Hieraus ergibt sich ohne weiteres die folgende Bemerkung:

Es besteht immer dann, aber auch nur dann eine eindeutige Function, welche überall im Endlichen sich wie eine rationale verhält, und den Gleichungen (1) genügt, wenn $g(x)$ und $h(x)$ so beschaffen sind, dass $\psi(x)$ in (3) linear wird.