

Über gleitende und rollende Bewegung.

Von Alfred Vierkandt in Braunschweig.

Einleitung.

§. 1.

Problemstellung. — Literaturübersicht.

Die Bewegung eines Körpers auf der Oberfläche eines zweiten kann je nach der Beschaffenheit der Oberflächen beider Körper einen ganz verschiedenen Charakter haben. Die beiden Oberflächen werden nämlich im allgemeinen der Bewegung einen gewissen Reibungswiderstand entgegensetzen, dessen Stärke vom Grade ihrer Rauhigkeit abhängt. Hinsichtlich dieses Grades der Rauhigkeit gibt es zwei Extreme: den Fall absoluter Glattheit beider Oberflächen, in welchem gar keine Reibung stattfindet, und den Fall absoluter Rauhigkeit, in welchem jedes Gleiten ausgeschlossen ist, die einander auf beiden Körpern entsprechenden Wegelemente also stets einander gleich sind. Im ersten Fall heißt die Bewegung eine gleitende, im zweiten eine rollende. Nur diese beiden Extreme, die gleitende und die rollende Bewegung, sind es, die wir in der Folge näher betrachten wollen. Dabei werden wir uns nicht, wie es in den bisherigen Arbeiten stets geschehen, auf den Fall beschränken, dass der eine der beiden Körper sich im Zustande der Ruhe befindet, sondern auch den Fall mit in Betracht ziehen, dass beide Körper sich im Raume bewegen, während sie gleichzeitig auf einander gleiten oder rollen. Und zwar werden wir zunächst die allgemeinen Formeln für die in Rede stehende Bewegung entwickeln, sodann aber zur Behandlung einiger Specialfälle übergehen.

Die vorliegende Arbeit führt dabei im wesentlichen gewisse allgemeine Betrachtungen über gleitende und rollende Bewegung, die Herr Professor Carl Neumann in einer jüngst erschienenen Arbeit¹⁾ veröffentlicht hat, näher aus, und wendet sie auf einige

¹⁾ Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper (Abdruck aus den Berichten der math.-phys. Classe der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1887).

specielle Fälle an. Auch die Methode der Untersuchung ist der genannten Arbeit entlehnt. Sie besteht darin, dass man zur Discussion der Bewegung die Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Form unter Benutzung von fünf Variablen verwendet. Zu ihrer Aufstellung bedarf man zunächst der Kenntnis der lebendigen Kraft der Bewegung. Diese ermittelt man im vorliegenden Fall am einfachsten, wenn man gewisse geometrische Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers benutzt, welche von Herrn Professor Carl Neumann in eine für mechanische Anwendungen bequeme Form gebracht sind.

Diese Sätze sind in §. 2 der Arbeit kurz zusammengestellt, nachdem eingangs dieses Paragraphen zunächst über die Bezeichnungsweise die nöthigen Festsetzungen getroffen sind.

Es folgen sodann im **ersten Abschnitt** die allgemeinen Betrachtungen über gleitende und rollende Bewegung. Zunächst wird in §. 3 die lebendige Kraft der Bewegung in der eben angedeuteten geometrischen Weise abgeleitet. In §. 4 folgt die Ableitung der dynamischen Differentialgleichungen. Als solche benutzen wir, wie schon bemerkt, die Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Form. Im Falle der gleitenden Bewegung, wo die von uns benutzten Variablen unabhängig sind, bietet ihre Entwicklung keinerlei Schwierigkeit. Anders bei der rollenden Bewegung, bei der Bedingungsgleichungen, und zwar, wie wir sehen werden, in der Form von linearen Differentialgleichungen, auftreten. Da für diesen Fall die Lagrangeschen Gleichungen fast in keinem Lehrbuch der Mechanik abgeleitet sind, so haben wir sie ausführlich entwickeln zu sollen geglaubt.

Im **zweiten Abschnitt** werden die entwickelten Formeln angewandt auf den Fall, dass beide Körper Kugeln sind. Für den Fall der rollenden Bewegung (§. 5) denken wir uns dabei den einen Körper in Ruhe versetzt. Für die Discussion der gleitenden Bewegung (§. 6) erscheint es angemessen, ein anderes System von Variablen einzuführen, als wir es sonst benutzen, weil sich dann das Problem in der elegantesten Weise fast ohne Rechnung lösen lässt.

In beiden Fällen wird zunächst das Problem unter der Voraussetzung behandelt, dass zwischen den Theilchen der Kugeln gewisse anziehende Kräfte, die dem Newtonschen Gesetz gehorchen, thätig sind. Sodann wird an zweiter Stelle die Bewegung einer Kugel, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der inneren Oberfläche einer ruhenden Hohlkugel bewegt, näher untersucht; hierbei ergibt sich das interessante Resultat, dass die Bewegung der rollenden Kugel zu der eines gewissen Kreisels von kugelförmiger Gestalt, die Bewegung der gleitenden Kugel zu der eines gewissen sphärischen Pendels in enge Beziehung tritt.

Im **dritten Abschnitt** behandeln wir einen andern Specialfall: wir denken uns den einen Körper zur Horizontalebene, den andern zu einer ebenen Fläche, und zwar im besondern zu einer homogenen Kreisscheibe ausgeartet. Von Kräften lassen wir nur die Schwere einwirken. Wir behandeln diesen Fall nicht mittels Grenzübergang auf Grund der allgemeinen Formeln, sondern leiten die erforderlichen Formeln direct von neuem ab. Zunächst wird wieder auf geometrischem Wege die lebendige Kraft des bewegten Mobils festgestellt, woran sich sofort die Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen reiht (§. 8). In §. 9 wird dann die rollende Bewegung, in §. 10 die gleitende Bewegung der Kreisscheibe näher untersucht. In beiden Fällen ergibt sich, dass die Bewegung eine periodische ist. Im letzteren Fall reducirt sich überdies das Problem auf Quadraturen.

Auf die **Literatur** unseres Themas näher einzugehen, erscheint deswegen unnöthig, weil Herr Dr. Max Richter in seiner kürzlich erschienenen Dissertation: „Über die Bewegung eines Körpers auf einer Horizontalebene. Leipzig 1887.“ eine umfassende und gründliche Übersicht über die einschlägigen Arbeiten gegeben hat.¹⁾ Nachzutragen ist aus der neuesten Literatur nur die schon eingangs citierte Arbeit von Herrn Professor Carl Neumann, die den directen Anlass zu der vorliegenden Untersuchung gegeben hat, und der wir uns, beiläufig bemerkt, auch in der Bezeichnungsweise nach Möglichkeit angeschlossen haben. Hingegen seien uns einige Bemerkungen über die bei den früheren Arbeiten benutzten Methoden gestattet.

Als dynamische Differentialgleichungen sind in den meisten Arbeiten die Lagrangeschen Gleichungen erster Form oder die Eulerschen Differentialgleichungen der drehenden Bewegung benutzt und dabei theilweise für das vorliegende Problem specialisirt und umgeformt. Besonderes Interesse bietet in dieser Beziehung die Arbeit von Funcke²⁾, welcher die Eulerschen Gleichungen für das Problem der rollenden Bewegung in modificirter Gestalt entwickelt und zur Grundlage eleganter, halb geometrischer Untersuchungen über das Rollen einer Kugel auf einer andern oder auf der Horizontalebene gemacht hat.

Die Verwendung der angeführten dynamischen Differentialgleichungen ist jedoch im allgemeinen mit gewissen Umständlichkeiten und Schwierigkeiten verbunden, vorzüglich deswegen, weil in die Formeln stets die (ihrer Größe nach zunächst unbekannt) Cohäsionskräfte eingehen, welche dafür sorgen, dass die Flächen an einander haften. Diesem Übelstande entgeht man bei Benutzung der Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Form.

¹⁾ Übrigens werden wir bei den einzelnen Problemen die einschlägigen älteren Arbeiten, soweit solche überhaupt vorhanden und uns bekannt geworden sind, stets namhaft machen

²⁾ Zur Theorie des Rollens (Diss. Göttingen 1869).

Als Variable kann man dabei zwei von den Coordinaten $\xi \eta \zeta$ des Schwerpunktes des bewegten Körpers in einem festen Coordinatensystem, sowie die drei Winkel wählen, welche die Richtungen der Hauptträgheitsachsen des Körpers bestimmen, wobei man sich eine von den drei Variablen $\xi \eta \zeta$ auf Grund der Thatsache, dass die Oberfläche des bewegten Körpers die des ruhendem stets in einem Punkte berührt, aus dem ursprünglichen Ausdruck für die lebendige Kraft eliminiert denken muss. In dieser Weise hat Amthor¹⁾, und ihm sich anschließend Piper²⁾ das Problem behandelt, jedoch nur für gleitende Bewegungen, bei denen die genannten Variablen von einander unabhängig sind. Die erwähnte Elimination bietet jedoch in den meisten Fällen große Schwierigkeiten, weshalb diese Methode nur für einzelne besondere Fälle (wie wir später in §. 6 einen solchen kennen lernen werden) sich eignet. Für die rollende Bewegung ist sie überdies deswegen ungeeignet, weil die bei dieser Bewegung auftretenden Bedingungengleichungen bei Benutzung der in Rede stehenden Variablen im allgemeinen eine sehr umständliche Form annehmen. Sie scheint daher für die rollende Bewegung in der bisherigen Literatur auch nur einmal in einem Specialfall von Routh³⁾ angewandt zu sein, und zwar für die rollende Bewegung einer von der Schwerkraft sollicitierten Kugel auf einer geneigten Ebene; in welchem Specialfall bei passender Wahl des Coordinatensystemes sich die Dinge allerdings sehr einfach gestalten.

Zu einer allgemeinen Anwendbarkeit für das vorliegende Problem hat aber erst Herr Professor Carl Neumann⁴⁾ die Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Form erhoben, indem er andere, für diese Probleme geeignetere Coordinaten einführte. Denkt man sich nämlich beide Körper von je zwei Curvenscharen überzogen, so ist durch Angabe der Parameter, welche diese Curven im momentanen Berührungspunkte auf beiden Körpern besitzen, ihre Position vollständig bestimmt bis auf eine noch mögliche Drehung um die gemeinschaftliche Normale im Berührungspunkt. Durch Einführung einer gewissen fünften Variablen beseitigt man auch diese Unbestimmtheit; und man erhält im ganzen fünf Variable, die bei der gleitenden Bewegung von einander unabhängig, bei der rollenden Bewegung aber durch zwei einfache Bedingungengleichungen mit einander verbunden sind. — Denkt man sich beide Körper bewegt, so bestimmen die genannten fünf Variablen nur die relative Lage beider Körper zu einander, während es zur Bestimmung der absoluten Lage eines von beiden noch weiterer sechs independenter Variablen bedarf.

¹⁾ Über die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Fläche (Diss. Leipzig, Teubner 1868).

²⁾ Über die Bewegung eines Körpers, dessen Oberfläche eine im Raum feste Curve berührt (Diss. Dessau 1879).

³⁾ Elementary Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies (4. Ed. 1883), pag. 327.

⁴⁾ Grundzüge der analytischen Mechanik. Zweiter Artikel, § 16.

§. 2.

Bezeichnungsweise. — Einige kinematische Sätze.

Ehe wir uns der eigentlichen Aufgabe zuwenden können, müssen wir zunächst einige Festsetzungen über die Bezeichnungsweise treffen.

Um die beiden Körper von einander zu unterscheiden, gebrauchen wir die oberen Indices 1 und 2 — entsprechend der Ausdrucksweise: erster und zweiter Körper. Die Masse wollen wir mit M , die drei Hauptträgheitsmomente mit $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_3$ bezeichnen. Wir führen ferner ein absolut festes Coordinatensystem xyz ein; der Schwerpunkt eines Körpers habe in ihm die Coordinaten $x_\sigma y_\sigma z_\sigma$. Weiter benutzen wir zwei Coordinatensysteme $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, welche mit den durch die Hauptträgheitsachsen der Körper gebildeten Systemen identisch sein sollen. Die Coordinaten des Berührungspunktes beider Körper mögen in diesen Systemen $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ heißen. Wir denken uns ferner die Oberflächen beider Körper mit orthogonalen Flächencoordinaten $v w$ überzogen. Im Berührungspunkt mögen zwei weitere Coordinatensysteme errichtet sein, wovon jedem Körper eins zugehören möge. Und zwar mögen zwei Axen jedes derselben zusammenfallen mit den im Berührungspunkt construirten Tangenten der Curven $w = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$, derart, dass in der Richtung der positiven Axen die Parameter v und w wachsen; die dritte Axe aber möge gegeben sein durch die Normale im Berührungspunkt, und zwar benutzen wir beim ersten Körper die äußere, beim zweiten Körper die innere Normale. Für die Axen und Coordinaten in diesen Systemen wollen wir die Buchstaben $\bar{v} \bar{w} \bar{n}$ oder statt dessen in anderer Reihenfolge $\bar{n} \bar{v} \bar{w}$ verwenden. Beide Systeme haben die \bar{n} -Axe gemein und sind somit nur um einen gewissen Winkel gegen einander gedreht; dieser Winkel, gerechnet von der positiven $\bar{v}^{(1)}$ -Axe aus nach der positiven $\bar{w}^{(1)}$ -Axe hin, möge ψ heißen. Die Richtungscosinus der Winkel, welche die Axen $\bar{n} \bar{v} \bar{w}$ mit den Axen ξ_i desselben Körpers bilden, mögen $\alpha_i \beta_i \gamma_i$ heißen ($i = 1, 2, 3$).

Sämmtliche hier angegebene Coordinatensysteme sollen einander congruent sein; und zwar sollen sie alle positiv sein; d. h. es sollen die drei Axen jedesmal zu einander gelegen sein wie bei der linken Hand der kleine Finger zum Zeigefinger zum Daumen.

Endlich sei noch bemerkt, dass wir beide Körper stets als überall convexe voraussetzen. Und zwar sollen im besondern beide so beschaffen sein, dass sie sich stets nur in einem Punkte berühren können.

Unser nächstes Ziel bildet, wie schon bemerkt, die Ermittlung der lebendigen Kraft. Dazu schicken wir zunächst einige Sätze über die unendlichkleine Bewegung eines starren Körpers

voraus. Hinsichtlich ihrer Ableitung sei dabei auf eine Abhandlung von Herrn Professor Carl Neumann verwiesen.¹⁾

1. Jede unendlichkleine Bewegung eines Körpers ist entweder eine translatorische oder eine rotatorische oder aber aus beiden zusammengesetzt.

2. Jede unendlichkleine Bewegung eines Körpers, bei der ein Punkt in Ruhe bleibt, ist eine rotatorische. Denken wir uns die Drehungsaxe als x -Axe eines positiven Coordinatensystems xyz , so soll die Drehung als positiv oder negativ bezeichnet werden, je nachdem sich bei ihr die Theilchen des Körpers in der Richtung von der positiven y -Axe zur positiven x -Axe oder umgekehrt bewegen. Denkt man sich ferner die Größe der Drehung durch eine dem Drehungswinkel proportionale Strecke repräsentiert, die auf der x -Axe (d. h. der Rotationsaxe) aufgetragen wird — und zwar auf der positiven oder negativen Seite derselben, je nachdem die Drehung positiv oder negativ ist —, so kann man mittels dieser Darstellung unendlichkleine Drehungen ganz wie Kräfte zusammensetzen und zerlegen.

3. Die Größe einer solchen Drehung lässt sich in folgender Weise bestimmen: bedeutet 0 einen festen Punkt im Raum, um den ein starrer Körper frei beweglich ist, und lässt man von 0 zwei Coordinatensysteme $l_1 l_2 l_3$ und xyz ausgehen, von denen das erste mit dem Körper starr verbunden, das zweite im Raume fest ist, und bedeuten ferner $\alpha_i \beta_i \gamma_i$ die Richtungscosinus der Winkel, welche die Axen l_i gegen die Axen xyz einschließen ($i = 1, 2, 3$), so besteht jede Bewegung des Körpers, welche den Größen $\alpha_i \beta_i \gamma_i$ die Incremente $d\alpha_i d\beta_i d\gamma_i$ erteilt, in einer Drehung, welchen nach den festen Axen xyz die Componenten hat:

$$\omega_\alpha = \sum_i \beta_i d\gamma_i, \quad \omega_\beta = \sum \gamma_i d\alpha_i, \quad \omega_\gamma = \sum \alpha_i d\beta_i$$

nach den beweglichen Axen $l_1 l_2 l_3$ aber die Componenten hat:

$$\omega_1 = -(\alpha_2 d\alpha_3 + \beta_2 d\beta_3 + \gamma_2 d\gamma_3)$$

$$\omega_2 = -(\alpha_3 d\alpha_1 + \beta_3 d\beta_1 + \gamma_3 d\gamma_1)$$

$$\omega_3 = -(\alpha_1 d\alpha_2 + \beta_1 d\beta_2 + \gamma_1 d\gamma_2).$$

Zugleich hat die Verrückung, welche der Punkt (xyz) des Körpers bei dieser Bewegung erfährt, nach den Axen xyz die Componenten:

$$dx = -\omega_\gamma y + \omega_\beta z$$

$$dy = -\omega_\alpha z + \omega_\gamma x$$

$$dz = -\omega_\beta x + \omega_\alpha y.$$

¹⁾ Carl Neumann, die unendlichkleinen Bewegungen eines starren Körpers etc., in den Math. Annalen, Bd. II, S. 388.

4. Erfährt ein Körper eine unendlich kleine Drehung um eine durch einen Punkt gehende Axe, so können wir diese Bewegung, falls es beliebt, auch auffassen als Resultante zweier anderer Bewegungen: wir können ihr eine Drehung von der nämlichen Größe und Richtung substituieren um eine parallele Axe, die durch einen beliebigen Punkt A geht, falls wir nur zugleich allen Punkten des Körpers diejenige Bewegung zuertheilen, welche A selber in Folge der ursprünglichen Drehung erhalten haben würde.

5. Um die lebendige Kraft eines bewegten Körpers zu berechnen, führen wir alle simultanen unendlichkleinen Drehungen (nach der Anweisung von Nr. 4) auf solche um parallele, durch den Schwerpunkt gehende Axen zurück. Vereinigen wir alsdann alle translatorischen und alle rotatorischen Bewegungen für sich, und erhalten wir so zuletzt eine Parallelverschiebung mit den Componenten $x'_\sigma dt$ $y'_\sigma dt$ $z'_\sigma dt$ — diese Componenten gebildet nach drei beliebigen auf einander senkrechten Axen — und eine Drehung, deren Drehungswinkel nach den drei Hauptaxen des Körpers die Componenten $\omega_1 dt$ $\omega_2 dt$ $\omega_3 dt$ hat, so hat die lebendige Kraft T der Bewegung den Wert:

$$2T = M(x'_\sigma{}^2 + y'_\sigma{}^2 + z'_\sigma{}^2) + \mathfrak{M}_1 \omega_1^2 + \mathfrak{M}_2 \omega_2^2 + \mathfrak{M}_3 \omega_3^2$$

wo unter M die Masse, unter $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3$ aber die drei Hauptträgheitsmomente des Körpers zu verstehen sind.

Hieran sei noch der folgende, später wiederholt zu benützte Satz geknüpft:¹⁾

6. Reduciert sich eine der Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Form auf das Integral

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \text{constans},$$

wo T die lebendige Kraft des betreffenden Körpers, φ aber einen Winkel bedeutet derart, dass einer Änderung des Argumentes φ eine Drehung des Körpers um eine gewisse Axe A entspricht, so bedeutet jenes Integral den Flächensatz in bezug auf die Axe A — gleichviel ob jene Axe im Raume fest oder beweglich ist.

Führt man nämlich ein unbewegliches Coordinatensystem xyz ein, so ist

$$(a) \quad 2T = \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial \varphi'} + y' \frac{\partial y'}{\partial \varphi'} + z' \frac{\partial z'}{\partial \varphi'} \right) = \text{const.}$$

¹⁾ Er findet sich schon bei Routh, *Elementary Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies* (4. Ed. 1883), pag. 329.

Führt man nun an Stelle von xyz neue Variable $\vartheta\varphi\psi\dots$ ein, so wird

$$x = x(\vartheta\varphi\psi\dots), y = y(\vartheta\varphi\psi\dots), z = z(\vartheta, \varphi, \psi\dots)$$

$$x' = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \vartheta' + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \varphi' + \frac{\partial x}{\partial \psi} \psi' + \dots, y' \text{ und } z' \text{ analog}$$

also:
$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial y}{\partial \varphi'}, \frac{\partial z'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial z}{\partial \varphi},$$

so dass wir unser Integral (a) auch schreiben können:

$$(b) \quad \Sigma m \left(x' \frac{\partial x}{\partial \varphi} + y' \frac{\partial y}{\partial \varphi} + z' \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = \text{const.}$$

Bezeichnet man nun mit p den senkrechten Abstand des Punktes (xyz) von der erwähnten Axe A , um die sich der Körper bei einer alleinigen Änderung des Arguments φ drehen würde, so ist $d\sigma = p d\varphi$ das einer derartigen Änderung entsprechende Wegelement, welches nach den Axen xyz offenbar die Componenten $\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi$ hat. Bedeuten ferner $\alpha\beta\gamma$ die Richtungs-cosinus dieses Wegelementes in bezug auf die Axen xyz , so wird $\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \alpha d\sigma = \alpha p d\varphi$, oder

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \alpha p, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \beta p, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \gamma p,$$

sodass man das in Rede stehende Integral (b) auch schreiben kann

$$\Sigma m p (\alpha x' + \beta y' + \gamma z') = \text{const.}$$

oder

$$\Sigma m p \frac{ds}{dt} \cos(ds, d\sigma) = \text{const.}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Und diese Gleichung repräsentiert offenbar den Flächensatz in bezug auf die Axe A .