Über die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels.

Von **A. Tauber** in Wien.

K. Neumann hat die Giltigkeit seiner „Methode des arithmetischen Mittels“ [1]) für die Lösung des Dirichlet'schen Problems,

eine harmonische Function für ein Gebiet zu construieren, auf dessen Begrenzung die Werte dieser zu suchenden Function in beliebiger, jedoch stetiger Weise vorgeschrieben sind,

unter der Bedingung dargethan, dass die Begrenzung aus einer einzigen geschlossenen Curve oder Fläche besteht, welche

1. überall convex nach Außen ist,
2. nicht zu jenen gehört, welche H. Neumann als zweisternig bezeichnet.

Zu den durch 2. ausgeschlossenen Gebieten gehören aber z. B. unter den ebenen das Dreieck, unter den räumlichen das Tetraeder etc. Es soll deshalb im Folgenden der Nachweis für die Giltigkeit der Methode des arithmetischen Mittels geführt werden, wenn lediglich die Bedingung 1. festgehalten wird.

Übrigens erlaubt speciell für das innere Problem eine geringfügige Modification der Neumann'schen Methode, eine Function zu finden, für welche der Beweis, dass sie wirklich die Lösung des innern Dirichlet'schen Problems ist, etwas einfacher ist. —

Es sei entweder in der Ebene eine geschlossene Curve σ, oder im Raume eine geschlossene Oberfläche σ gegeben und es seien auf σ irgend welche Werte f in bestimmter, jedoch stetiger Weise vorgeschrieben. Ferner bedeute in Beibehaltung der Neumann'schen Bezeichnung

h die Zahlen 1 oder 2, jenachdem es sich um die Ebene oder den Raum handelt,

τ_s den ebenen oder räumlichen Innenwinkel der Curve oder Fläche σ in einem ihrer Punkte s, wobei zur Abkürzung

$$\vartheta_s = 1 - \frac{\tau_s}{h\pi}$$

gesetzt werde, und

---

[1]) Abhandlungen der math.-phys. Classe der k. s. Gesellschaft der Wissenschaften XIII. p. 705, XIV. p. 563.

$(d\sigma)_x$ eine in folgender Weise definierte Größe: Ist $d\sigma$ ein Element der Begrenzung σ, x irgend ein nicht auf $d\sigma$ liegender Punkt der Ebene oder des Raumes, δ der Winkel, den die Richtung der innern Normale von $d\sigma$ mit der Richtung der Geraden von $d\sigma$ nach x bildet, endlich E die Entfernung des Punktes x vom Element $d\sigma$, so soll

$$(d\sigma)_x = \frac{\cos\delta}{E^h}\, d\sigma$$

sein; $(d\sigma)_x$ ist also der Winkel, unter welchem $d\sigma$ von x aus gesehen wird und auch in der Form

$$(d\sigma)_x = \pm \frac{u}{E^{h+1}}\, d\sigma$$

darstellbar, wenn u die Länge des Perpendikels ist, welches von x auf die Tangente, resp. Tangentialebene des Elementes $d\sigma$ gefällt wird.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen sollen in irgend einem Punkt s auf σ die Functionen

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} f'_s &= \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(\sigma)(d\sigma)_s \\ f''_s &= \vartheta_s f'_s + \frac{1}{h\pi}\int f'(\sigma)(d\sigma)_s \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

definiert werden. Hiebei ist jedes Integral auf der rechten Seite der Grenzwert desjenigen Integrales, welches über eine durch Hinwegnahme einer der Null zustrebenden Umgebung von s aus σ entstehende Curve oder Fläche zu erstrecken ist.

Dann ist zunächst der folgende Hilfssatz zu beweisen:

„Bezeichnet man die Maxima von f, f', f'',... auf σ „mit G, G', G'',..., und die Minima von f, f', f'',... auf σ „mit K, K', K'',...., so besteht die Ungleichung

$$(2) \qquad G''-K'' \leqq \lambda^2 (G-K),$$

„wo die Größe λ derart bestimmbar ist, dass sie nur von der „Gestalt von σ, nicht aber von den jedesmal vorgeschriebenen „Werten f, abhängt und kleiner als 1 (nicht gleich 1) ist.“ Immer vorausgesetzt, dass σ convex ist. K. Neumann hat für die von ihm betrachteten Curven und Flächen die Ungleichung

$$G'-K' \leqq \lambda (G-K)$$

bewiesen,[1]) in welcher die positive Größe λ ebenfalls die obige Eigenschaft besitzt, und für λ die Bezeichnung „Configurations-

[1]) a. a. O. XIII. p. 760.

constante von σ^u gewählt. Eine derartige Größe existiert z. B. für das Dreieck nicht.

Für irgend zwei Punkte p, q auf der Begrenzung σ hat die Function f' gemäß der ersten Gleichung (1) die Werte

$$f'_p = \vartheta_p f_p + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_p = \vartheta_p f_p + \frac{1}{h\pi}\int \{G-(G-f)\}(d\sigma)_p$$

$$f'_q = \vartheta_q f_q + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_q = \vartheta_q f_q + \frac{1}{h\pi}\int \{K+(f-K)\}(d\sigma)_q$$

und durch Subtraction erhält man unter Berücksichtigung von

$$\frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_p = 1-\vartheta_p, \quad \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_q = 1-\vartheta_q$$

die Identität

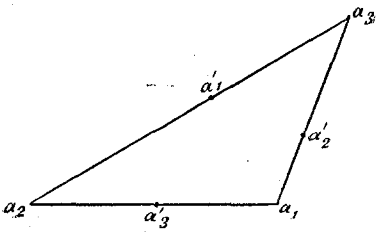
$$f'_p - f'_q = G-K-\frac{1}{h\pi}\left[\int (G-f)(d\sigma)_p + \int (f-K)(d\sigma)_q\right] -$$
$$-\vartheta_p(G-f_p) - \vartheta_q(f_q-K),$$

woraus, weil für die convexe Curve oder Fläche σ die ϑ Null oder positiv sind,[1]) bei $f'_p \geqq f'_q$

$$(3)\quad 0 \leqq f'_p - f'_q \leqq G-K-\frac{1}{h\pi}\left[\int (G-f)(d\sigma)_p + \int (f-K)(d\sigma)_q\right]$$

resultiert. Nunmehr dürfte es jedoch genügen, sich auf die beiden speciellen Fälle des Dreieckes (für die Ebene) und des Tetraeders (für den Raum) zu beschränken, da im allgemeinen Fall der Gang des Beweises analog bleibt.

Wir theilen die Begrenzung σ des gegebenen Dreiecks $a_1\, a_2\, a_3$



mit Hilfe der drei Punkte $a'_1\, a'_2\, a'_3$ in 6 Theilstrecken, für welche die Bezeichnungen

$$(4)\quad \begin{array}{lll} a'_1\, a_2 = \sigma_{12}, & a_2\, a'_3 = \sigma_{32}, & a'_3\, a_1 = \sigma_{31} \\ a_1\, a'_2 = \sigma_{21}, & a'_2\, a_3 = \sigma_{23}, & a_3\, a'_1 = \sigma_{13} \end{array}$$

---

1) a. a. O. XIII. p. 737.

eingeführt werden mögen. Ferner werde gesetzt

$$(4\,a)\qquad \begin{aligned} \sigma_1 &= a_2 a_3, & \alpha_1 &= \sigma_{21} + \sigma_{31} \\ \sigma_2 &= a_1 a_3, & \alpha_2 &= \sigma_{12} + \sigma_{32} \\ \sigma_3 &= a_1 a_2, & \alpha_3 &= \sigma_{13} + \sigma_{23}, \end{aligned}$$

so dass σ_ν die der Ecke a_ν gegenüberliegende Seite und α_ν den Inbegriff der beiden in der Ecke a_ν zusammenstoßenden Theilstrecken vorstellt.

Nun werde einem Punkte auf α_ν die Seite σ_ν, somit jedem Punkt auf σ (wenigstens) eine Seite zugeordnet. Auf solche Art sei z. B. dem obigen Punkte p die Seite σ_i zugeordnet worden. Alsdann ist offenbar, weil sämmtliche $(d\sigma)_p \geqq 0$ sind,[1])

$$\frac{1}{\pi}\int (G-f)(d\sigma)_p \geqq \frac{1}{\pi}\int (G-f)(d\sigma_i)_p;$$

es ist nämlich das Integral auf der rechten Seite bloß über einen Theil von σ, die Seite σ_i erstreckt. Der Definition nach ist aber

$$(d\sigma_i)_p = \frac{u_p}{E^2}\, d\sigma_i$$

wenn $d\sigma_i$ ein Element von σ_i, u_p das Perpendikel von p aus auf die Tangente an der Stelle $d\sigma_i$, d. h. in unserem Falle auf die Seite σ_i selbst, und E die Entfernung des Punktes p von $d\sigma_i$ ist. Und weil das Perpendikel von irgend einem Punkte von σ auf die ihm zugeordnete Seite ein von Null verschiedenes Minimum u hat — u ist das kleinste der 6 Perpendikel, die von den 3 Punkten a_1'; a_2'; a_3' auf die Seiten des Dreiecks σ_2, σ_3; σ_1, σ_3; σ_1, σ_2 zu fällen sind, so folgt

$$\frac{u_p}{E^2} \geqq \frac{u}{D^2},$$

wenn D die größte Entfernung zweier Punkte von σ ist. Dies ergibt

$$\frac{1}{\pi}\int (G-f)(d\sigma)_p \geqq \frac{1}{\pi}\,\frac{u}{D^2}\int (G-f)\,d\sigma_i$$

und eine analoge Ungleichung für q, dem die Seite σ_j zugeordnet sei

$$\frac{1}{\pi}\int (f-K)(d\sigma)_q \geqq \frac{1}{\pi}\,\frac{u}{D^2}\int (f-K)\,d\sigma_j.$$

[1]) a. a. O. XIII. p. 753.

Somit kann statt (3) geschrieben werden

$$(5)\quad 0 \leqq f'_p - f'_q \leqq G - K - \frac{1}{\pi}\frac{u}{D^2}\left[\int (G-f)\, d\sigma_i + \int (f-K)\, d\sigma_j\right].$$

Für den Fall $i = j$ folgt aber hieraus

$$0 \leqq f'_p - f'_q \leqq G - K - \frac{1}{\pi}\frac{u}{D^2}(G-K)\int (d\sigma)_i,$$

und da $\int d\sigma_i$ die Länge der Seite σ_i, demnach nicht kleiner ist, als die kleinste Seite d des Dreieckes, so folgt weiter

$$0 \leqq f'_p - f'_q \leqq (G-K)(1-\omega)$$
$$\omega = \frac{1}{\pi}\frac{u}{D^2}\, d.$$

Also besteht zwischen dem Maximum G'_{α_i}, welches f' auf dem Theile α_i besitzt, und dem Minimum K'_{α_i}, welches f' auf α_i besitzt, weil allen Punkten auf α_i die Seite σ_i zugeordnet ist, die Ungleichung

$$(6)\qquad G'_{\alpha_i} - K'_{\alpha_i} \leqq (G-K)(1-\omega),\quad \omega = \frac{1}{\pi}\frac{u\, d}{D^2},$$

mit deren Hilfe leicht die Richtigkeit der nachfolgenden Ungleichung

$$(7)\qquad G'' - K'' < (G-K)(1-\omega^2 \varkappa)$$

zu zeigen ist, wofern $\varkappa$ kleiner gewählt wird, als jede der beiden Größen $\frac{d'}{4d}$ und $\frac{1}{2\omega}$, unter d' die kleinste der Strecken $\sigma_{i\varkappa}$ verstanden.

Denn entweder ist bereits

$$G' - K' \leqq (G-K)(1-\omega^2\varkappa),$$

dann muss wegen

$$G'' - K'' \leqq G' - K'$$

auch die Ungleichung (7) statthaben. Oder es ist

$$(8)\qquad G' - K' > (G-K)(1-\omega^2\varkappa),$$

woraus $G-K < \frac{G'-K'}{1-\omega^2\varkappa}$ und somit aus (6), wegen $K\omega < \frac{1}{2}$, die weitere Beziehung

$$G'_{\alpha_i} - K'_{\alpha_i} < (G'-K')\left(1-\frac{\omega}{2}\right) \tag{9}$$

resultiert. Dieselbe beweist die Behauptung:

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} &\text{entweder es ist } G'_{\alpha_i} < G' - \frac{\omega}{4}(G'-K'), \\ &\text{oder es ist } K'_{\alpha_i} > K' + \frac{\omega}{4}(G'-K'). \end{aligned}$$

Betrachtet man jetzt irgend zwei Punkte p, q auf der Begrenzung σ, für welche $f''_p \geqq f''_q$ ist, so erhält man die zu (5) analoge Ungleichung

$$0 \leqq f''_p - f''_q \leqq G'-K' - \frac{1}{\pi}\frac{u}{D^2}\left[\int (G'-f')\,d\sigma_i + \int (f'-K')\,d\sigma_j\right] \tag{11}$$

in welcher i und j gleich oder ungleich sein können. Jedenfalls ist die Summe der beiden in der obigen Klammer stehenden Integrale nicht kleiner als

$$\int (G'-f')\,d\sigma_{i\nu} + \int (f'-K')\,d\sigma_{j\nu},$$

wobei für ν eine sowohl von i als auch von j verschiedene Zahl aus 1, 2, 3 zu wählen ist; denn dann ist $\sigma_{i\nu}$ ein Theil von σ_i, und $\sigma_{j\nu}$ ein Theil von σ_j. Jedes der beiden letzten Integrale ist aber über einen Theil von α_ν erstreckt. Entweder ist jetzt

$$G'_{\alpha_\nu} < G' - \frac{\omega}{4}(G'-K'),$$

demnach auch auf $\sigma_{i\nu}$, welches ein Theil von α_ν ist,

$$f' < G' - \frac{\omega}{4}(G'-K')$$

und daher

$$\int (G'-f')\,d\sigma_{i\nu} > \frac{\omega}{4}(G'-K')\int d\sigma_{i\nu};$$

oder es ist nach der Bemerkung (10)

$$K'_{\alpha_\nu} > K' + \frac{\omega}{4}(G'-K'),$$

demnach auch auf $\sigma_{j\nu}$

$$f' > K' + \frac{\omega}{4}(G' - K')$$

und daher

$$\int (f' - K')\, d\sigma_{j\nu} \geqq \frac{\omega}{4}(G' - K') \int d\sigma_{j\nu}.$$

Zusammengefasst ergibt sich also

$$\int (G' - f')\, d\sigma_i + \int (f' - K')\, d\sigma_j > \frac{\omega}{4}(G' - K')\, d', \tag{12}$$

und die Ungleichung (11) ist ersetzbar durch

$$0 \leqq f_p'' - f_q'' < G' - K' - \frac{1}{\pi}\frac{u}{D^2}\left[\frac{\omega}{4}(G' - K')\, d'\right]$$
$$< G' - K' - \omega^2 (G' - K')\frac{d'}{4d}$$
$$< (G' - K')(1 - \omega^2 \varkappa),$$

da $\varkappa < \frac{4d'}{d}$ sein sollte. Wegen $G' - K' \leqq G - K$ ist somit die zu beweisende Ungleichung (2) erfüllt, wenn man nur die dort stehende Größe λ^2 gleich $1 - \omega^2 \varkappa$ wählt.

Um den Hilfssatz (2) für irgend eine geschlossene überall convexe Curve σ zu beweisen, zerlege man dieselbe in drei Theile σ_1, σ_2, σ_3, wobei darauf zu achten ist, dass kein ebener Theil von σ, wofern ein solcher existiert, zerstückt wird, d. h. gleichzeitig mit zweien der Theile σ_1, σ_2, σ_3 je eine Curvenstrecke gemein hat. Dann werden jene Punkte der Curve σ, deren Entfernung von den Punkten des Theiles σ_i eine gewisse Größe e' überschreitet, auch von sämmtlichen Tangenten des Theiles σ_i einen Abstand haben, welcher ebenfalls eine gewisse angebbare Größe e überschreitet.

Nun zerlegen wir jeden Theil σ_i abermals in 2 Theile $\sigma_{i\varkappa}$, $\sigma_{i\lambda}$ und richten die Bezeichnung derart ein, dass zwei Theile $\sigma_{i\varkappa}$, welche denselben zweiten Index haben, an einander grenzen. Solche zwei Theile fassen wir unter der Bezeichnung $\alpha_\varkappa$ zusammen und ordnen jedem Punkt von $\alpha_\varkappa$ den Theil $\sigma_\varkappa$ zu. Dadurch wird erreicht, dass das Perpendikel eines Punktes p von σ auf eine Tangente in einem Punkte des p zugeordneten Theiles beständig größer als eine angebbare Größe u ist; u. s. f. ganz analog dem obigen Beweisgang.

Sei andrerseits ein Tetraeder mit den Ecken $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ gegeben.

Die der Ecke a_i gegenüberliegende Fläche werde mit σ_i bezeichnet und in 3 Theilflächen zerlegt; etwa dadurch, dass von einem im Innern des Dreiecks σ_i befindlichen Punkt a_i' 3 Gerade nach den Halbierungspunkten der Seiten des Dreiecks σ_i gezogen werden. Auf diese Art entstehen 12 Theilflächen, welche wir mit

$$\sigma_{i\varkappa} \quad i \gtrless \varkappa \quad i, \varkappa = 1, 2, 3, 4$$

bezeichnen, so dass $\sigma_{i\varkappa}$ die Fläche jenes Vierecks vorstellt, welches den Punkt a_i' und die Ecke $a_\varkappa$ zu Eckpunkten hat. Die Gesammtheit der drei in der Ecke $a_\varkappa$ zusammenstoßenden Theilflächen $\sigma_{i\varkappa}$ werde unter der Bezeichnung $\alpha_\varkappa$ zusammengefasst. Daher ist

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{14}; & \alpha_1 &= \sigma_{21} + \sigma_{31} + \sigma_{41} \\ \sigma_2 &= \sigma_{21} + \sigma_{23} + \sigma_{24}; & \alpha_2 &= \sigma_{12} + \sigma_{32} + \sigma_{42} \\ \sigma_3 &= \sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{34}; & \alpha_3 &= \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{43} \\ \sigma_4 &= \sigma_{41} + \sigma_{42} + \sigma_{43}; & \alpha_4 &= \sigma_{14} + \sigma_{24} + \sigma_{34}. \end{aligned}$$

Wird nunmehr einem Punkte der Tetraederoberfläche σ, welcher sich auf dem Theile α befindet, die Fläche σ_i zugeordnet, so kann analog, wie oben beim Dreieck, weiter geschlossen werden: Die Länge des von irgend einem Punkte der Fläche α_i auf die zugeordnete Fläche σ_i gefällten Perpendikels ist größer als eine angebbare von Null verschiedene positive Größe u, und es besteht daher die der Ungleichung (5) entsprechende

$$(5')\; 0 \leqq f_p' - f_q' \leqq G - K - \frac{1}{2\pi}\,\frac{u}{D^3}\left[\int (G-f)\,d\sigma_i + \int (f-K)\,d\sigma_j\right],$$

wenn die zwei Punkte p, q der Oberfläche die Bedingung $f_p' \geqq f_q'$ erfüllen, und σ_i resp. σ_j denselben zugeordnet sind. Bezeichnet ferner d die Größe der kleinsten der Flächen σ_i, D die größte Entfernung zweier Punkte auf σ, und wird $\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{u}{D^3}\,d$ gesetzt, so restultieren die Ungleichungen

$$(6') \qquad G_{\alpha_i}' - K_{\alpha_i}' \leqq (G-K)(1-\omega),$$

wobei G_{α_i}', K_{α_i}' Maximum und Minimum von f' auf α_i vorstellen.

Wählt man ferner $\varkappa$ kleiner als jede der beiden Größen $\frac{d'}{4d}$ und $\frac{1}{2\omega}$, so genügt zum Beweis von

$$(7') \qquad G'' - K'' \leqq (G-K)(1-\omega^2\varkappa)$$

wiederum, wie oben, die Betrachtung des Falles, wo

$$(8') \qquad (G'-K') > (G-K)(1-\omega^2 \varkappa)$$

erfüllt ist. Dann gilt auch der Satz:

$$(10') \qquad \begin{aligned} &\text{Entweder ist } G'_{\alpha_i} < G' - \frac{\omega}{4}(G'-K'), \\ &\text{oder es ist } K'_{\alpha_i} > K' - \frac{\omega}{4}(G'-K'). \end{aligned}$$

Ebenso erhält man bei Betrachtung irgend zweier Punkte p, q auf σ, für welche $f''_p \geqq f''_q$ ist, die zu (11) analoge Ungleichung

$$(11') \quad 0 \leqq f''_p - f''_q \leqq G'-K' - \frac{1}{2\pi}\frac{u}{D^3}\left[\int (G'-f')\,d\sigma_i + \int (f'-K')\,d\sigma_j\right]$$

und die Summe der in der Klammer stehenden Integrale ist jedenfalls kleiner als

$$\int (G'-f')\,d\sigma_{i\nu} + \int (f'-K')\,d\sigma_{j\nu}$$

wo ν von i und j verschieden zu wählen ist. Da diese beiden Integrale über Theile von α_ν erstreckt sind, ergibt die Bemerkung (10′), wie oben beim Dreieck,

$$(12') \qquad \int (G'-f')\,d\sigma_{i\nu} + \int (f'-K')\,d\sigma_{j\nu} > \frac{\omega}{4}(G'-K')\,d',$$

unter d' die kleinste der Flächen $\sigma_{i\varkappa}$ verstanden, und schließlich auch die Richtigkeit der zu beweisenden Ungleichung (7′).

Um den Hilfssatz (2) für irgend eine geschlossene convexe Fläche σ zu beweisen, zerlege man dieselbe in 4 Theile σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, wobei darauf zu achten ist,

1. dass bei dieser Zerlegung kein ebener Theil von σ, wofern ein solcher vorhanden ist, zerstückt wird,
2. dass, wenn σ_i, $\sigma_\varkappa$ irgend zwei der Theile σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 sind, eine Theilfläche $\sigma_{i\varkappa}$ auf σ_i construierbar ist, welche nirgends an $\sigma_\varkappa$ grenzt, und
3. dass die drei so entstehenden Theilflächen $\sigma_{i\varkappa}$ der Fläche σ_i die letztere gänzlich überdecken.

Die drei Theile $\sigma_{i\varkappa}$ mit gleichem zweiten Index fassen wir unter der Bezeichnung $\alpha_\varkappa$ zusammen und ordnen jedem Punkt von $\alpha_\varkappa$ den Theil $\sigma_\varkappa$ zu, u. s. f. wie oben.

Mit Hilfe der Ungleichungen

$$G''-K'' < \lambda^2(G-K), \qquad G''''-K'''' < \lambda^2(G''-K''), \ldots,$$

von denen die zweite, etc. ebenso wie die erste beweisbar ist, und der folgenden

$$G'-K' \leqq G-K, \quad G''''-K'''' \leqq G'''-K''' \ldots,$$

erhält man

$$G^{(n)}-K^{(n)} \leqq \lambda^{n-1}(G-K) \quad n=1, 2, \ldots,$$

wodurch gezeigt ist, dass sich $G^{(n)}$ und $K^{(n)}$ mit wachsendem n ein und derselben bestimmten endlichen Größe C nähern. Ebenso folgt sofort, dass

$$(13) \qquad \begin{aligned} \varphi &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (C-f^{(\nu)}) \qquad\qquad f^0 = f \\ \psi &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1}(C-f^{(\nu)}) \end{aligned}$$

zwei auf σ stetige Functionen sind, weil die rechtsstehenden Reihen gleichmäßig für die ganze Erstreckung von σ convergieren; es ist nämlich $|C-f^{(\nu)}| \leqq G^{(\nu)}-K^{(\nu)}$, also

$$\left| R_{n+1} \right| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} (C-f^{(\nu)}) \right| < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}(G-K)$$

$$\left| R'_{n+1} \right| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}(C-f^{(\nu)}) \right| < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}(G-K).$$

Diese beiden Functionen φ und ψ genügen den nachfolgenden Functionalgleichungen

$$(14) \qquad \begin{aligned} C + \varphi'_s - \varphi_s &= f_s \\ C + \psi'_s + \psi_s &= f_s \end{aligned}$$

wenn man φ'_s ψ'_s genau wie f'_s nach der ersten Formel (1) bildet

$$\varphi'_s = \vartheta_s \varphi_s + \frac{1}{h\pi}\int \varphi(d\sigma)_s$$

$$\psi'_s = \vartheta_s \psi_s + \frac{1}{h\pi}\int \psi(d\sigma)_s.$$

Denn die Gleichungen

$$\varphi_s' = \vartheta_s \varphi_s + \frac{1}{h\pi} \sum_0^n \int (C - f^{(\nu)}) (d\sigma)_s + \frac{1}{h\pi} \int R_{n+1} (d\sigma)_s$$

$$\psi_s' = \vartheta_s \psi_s + \frac{1}{h\pi} \sum_0^n (-1)^{\nu+1} \int (C - f^{(\nu)}) (d\sigma)_s + \frac{1}{h\pi} \int R_{n+1}' (d\sigma)_s$$

ergeben nach einigen Reductionen unter Berücksichtigung von

$$\frac{1}{h\pi} \int (C - f^{(\nu)}) (d\sigma)_s = (C - f_s^{(\nu+1)}) - \vartheta_s (C - f_s^{(\nu)})$$

die Relationen

$$\varphi_s' - \varphi_s + C - f_s = \vartheta_s R_{n+1} - R_{n+2} + \frac{1}{h\pi} \int R_{n+1} (d\sigma)_s$$

$$\psi_s' + \psi_s + C - f_s = \vartheta_s R_{n+1}' + R_{n+2}' + \frac{1}{h\pi} \int R_{n+1}' (d\sigma)_s$$

und die rechte Seite kann durch Vergrößerung von n beliebig klein gemacht werden.

Nunmehr zeigt ein allgemein, nicht bloß für die hier in Rede stehenden Curven und Flächen giltiger Neumann'scher Satz, [1]) dass die für die Punkte a des außerhalb σ befindlichen Gebietes definierte Function

$$\Phi_a = C + \frac{1}{h\pi} \int \varphi (d\sigma)_a \tag{15a}$$

das äußere, und die für die Punkte i des innerhalb σ befindlichen Gebietes definierte Function

$$\Psi_i = C + \frac{1}{h\pi} \int \psi (d\sigma)_i \tag{15b}$$

das innere Problem löst.

Wie bereits erwähnt, ist Ψ_i in einer Form darstellbar, welche den Beweis, dass Ψ_i wirklich die Lösung für das innere Problem ist, vereinfacht.

Es sei x irgend ein Punkt im Innern oder auf der Begrenzung σ des von der gegebenen Curve oder Fläche σ umschlossenen Gebietes, und $d\sigma$ ein Element von σ. Haben dann δ, E die Eingangs erwähnten Bedeutungen, so definieren wir die Function $(D\sigma)_x$ durch

$$(D\sigma)_x = E \cos \delta \, d\sigma.$$

---

[1]) a. a. O. XIII. p. 750, 751.

$(D\sigma)_x$ ist gleichwie $(d\sigma)_x$ eine harmonische Function der Coordinaten des Punktes x und bedeutet, je nachdem σ eine Curve oder Fläche ist, entweder den doppelten Flächeninhalt des vom Punkte x und den Eckpunkten von $d\sigma$ gebildeten Dreieckes, oder das dreifache Volumen der Pyramide, deren Basis $d\sigma$ ist, und deren Spitze in x liegt.

Der Einfachheit halber nehmen wir ferner die Längeneinheit derart gewählt an, dass die Entfernung zweier Punkte der Begrenzung höchstens gleich 1 ist, woraus

$$E \leqq 1$$

und für $\cos\delta \geqq 0$, d. h. für alle hier betrachteten Curven und Flächen

$$\frac{\cos\delta}{E^h} - E\cos\delta \geqq 0. \tag{16}$$

Bildet man successive die Functionen

$$\begin{aligned} {}'f_s &= \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f\,[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s] \\ {}''f_s &= \vartheta_s\, {}'f_s + \frac{1}{h\pi}\int {}'f\,[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s], \end{aligned} \tag{17}$$

so erkennt man zunächst, dass, weil alle Elemente $[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s]$ nach (16) positiv sind,

$$\begin{aligned} {}'f &\leqq G\left\{\vartheta_s + \frac{1}{h\pi}\int [(d\sigma)_s - (D\sigma)_s]\right. \\ &\leqq G\left\{1 - \frac{1}{h\pi}\int (D\sigma)_s\right\} \end{aligned}$$

sein muss. Nach der Bedeutung von $(D\sigma)_s$ ist aber $\int (D\sigma)_s = (h+1)\,\Omega$, wenn Ω den Flächen- oder Rauminhalt des von σ umschlossenen Gebietes vorstellt, also wird

$${}'f_s \leqq G\mu, \quad \mu = 1 - \frac{h+1}{h\pi}\,\Omega;$$

und ebenso ist die Relation

$${}'f_s \geqq K\mu$$

zu beweisen. Nimmt man zur Vereinfachung f, also auch K positiv an, so besagen diese für ${}'f_s$ erhaltenen Ungleichungen, dass auch ${}'f$

positiv, und sein Maximum höchstens $G\mu$ ist. Ebenso ist $''f$ positiv, und sein Maximum höchstens gleich $G\mu^2$ u. s. f., allgemein

$$0 \leqq {}^{(\nu)}f \leqq G\mu^{\nu} \qquad \mu = 1, 2, \ldots$$

Daraus folgt, dass

$$|R_{n+1}| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^{\nu}\, {}^{(\nu)}f_s \right| < G\frac{\mu^n}{1-\mu},$$

sowie dass die durch

$$(18) \qquad F_s = \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\nu}\, {}^{(\nu)}f_s \qquad {}^{(0)}f_s = f_s$$

auf σ definierte Function daselbst auch stetig ist und die Functionalgleichung

$$(19) \qquad F_s + \vartheta_s F_s + \frac{1}{h\pi}\int F[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s] = f_s$$

erfüllt. Denn es ist

$$\frac{1}{h\pi}\int F[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s] =$$

$$= \sum_{0}^{n} \frac{(-1)^{\nu}}{h\pi}\int {}^{(\nu)}f[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s] + \int R_{n+1}[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s]$$

$$= \sum_{0}^{n} (-1)^{\nu}({}^{(\nu+1)}f_s - \vartheta_s\, {}^{(\nu)}f_s) + \int R_{n+1}[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s]$$

und die linke Seite von (19) wird nach einigen Reductionen

$$f_s + \vartheta_s R_{n+1} + R_{n+2} + \frac{1}{h\pi}\int R_{n+1}[(d\sigma)_s - (D\sigma)_s],$$

was sich von f_s beliebig wenig unterscheidet.

Nach dem oben benützten Neumann'schen Satz convergiert die für die Innenpunkte i des von σ umschlossenen Gebietes definierte Function

$$\frac{1}{h\pi}\int F(d\sigma)_i$$

wenn i sich dem Punkt s von σ nähert, nach dem Werte

$$F_s + \vartheta_s F_s + \frac{1}{h\pi}\int F(d\sigma)_s;$$

andererseits ist

$$\lim_{i=s}\int F(D\sigma)_i = \int F(D\sigma)_s,$$

und daraus folgt, dass

$$\Psi_i = \frac{1}{h\pi}\int F(d\sigma)_i - \frac{1}{h\pi}\int F(D\sigma)_i \tag{20}$$

dem Randwerte

$$F_s + \vartheta_s F_s + \frac{1}{h\pi}\int F(d\sigma)_s - \frac{1}{h\pi}\int F(D\sigma)_s = f_s$$

wie verlangt wurde, zustrebt.