

Fluiddynamik bei quer angeströmten Zylindern

D. Sucker und H. Brauer, Berlin

Investigation of the Flow around Transverse Cylinders

Abstract. The steady incompressible flow around a circular cylinder has been investigated. Numerical solutions of the full Navier-Stokes equation have been obtained for a range of Reynolds numbers from $Re = 10^{-4}$ to $Re = 1,2 \cdot 10^2$. The calculated velocity distributions allowed to determine the values of the drag coefficient, the angles of separation, and the wake lengths. They depend on the extend of the numerical field. These quantities can be predicted now by means of correlations, which are in good agreement with all available experimental and theoretical data. - Especially it is presented a drag equation for the range of Reynolds numbers from $Re = 10^{-4}$ up to $Re = Re_{kr}$. The critical Reynolds number, Re_{kr} , is a function of the turbulence intensity. This function is known. For very low Reynolds numbers, $Re < 10^{-4}$, there is an analytical drag equation, that based on Oseen type linearization of the Navier-Stokes equation.

Zusammenfassung. Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit der stationären Umströmung eines einzelnen Kreiszyllinders. Die vollständige Navier-Stokessche Gleichung wurde für den Bereich der Reynolds-Zahl von $Re = 10^{-4}$ bis $Re = 1,2 \cdot 10^2$ numerisch integriert. - Die das Strömungsfeld kennzeichnenden Merkmale sind der Strömungswiderstand, die Größen für die Ablösung der Strömung sowie die kritische Reynolds-Zahl. Sie sind abhängig von der Ausdehnung des umgebenden Fluids. Zur Berechnung dieser Größen werden Gleichungen mit praktisch bedeutsamen Gültigkeitsbereich mitgeteilt. Diese Berechnungsgleichungen sind durch theoretisch-numerische Daten sowie durch zahlreiche Meßdaten gestützt. - Insbesondere wird ein Widerstandsgesetz erörtert, dessen Gültigkeit im Bereich der Reynolds-Zahl von $Re = 10^{-4}$ bis zur kritischen Reynolds-Zahl theoretisch und experimentell einwandfrei gesichert ist. Es ist das bisher umfassendste Widerstandsgesetz für Kreiszyllinder. Für kleinere Werte der Reynolds-Zahl als $Re = 10^{-4}$ wird ein analytisches Näherungsgesetz für den Widerstandsbeiwert mitgeteilt.

Formelzeichen

d	Zylinderdurchmesser
F	Schattenfläche des Zylinders
l*	bezogene Länge des Rückströmungsgebietes
p, p*	örtlicher, bezogener örtlicher Druck
R	Zylinderradius
r, r*	radiale, bezogene radiale Koordinate
W	Strömungswiderstand des Zylinders
w_∞	Anströmgeschwindigkeit des Fluids
w_r, w_r^*	örtliche, bezogene örtliche Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung
w_θ, w_θ^*	örtliche, bezogene örtliche Geschwindigkeitskomponente in Umfangsrichtung
w'	zeitliche Schwankungsgeschwindigkeit
ζ	Widerstandsbeiwert des Zylinders
ζ_D, ζ_R	Druck- und Reibungsanteil des Widerstandsbeiwerts
θ	Umfangswinkel vom vorderen Staupunkt gemessen

θ_A	Ablösewinkel vom hinteren Staupunkt gemessen
ν	kinematische Viskosität des Fluids
ρ	Massendichte des Fluids
Φ, Φ^*	örtliche, bezogene örtliche Wirbelstärke
Ψ, Ψ^*	örtliche, bezogene örtliche Stromfunktion
$Re \equiv \frac{w_\infty d}{\nu}$	Reynolds-Zahl
Re_{kr}	kritischer Wert der Reynolds-Zahl
$Tu \equiv \sqrt{\frac{w'^2}{w_\infty^2}}$	Turbulenzgrad
Indices	
r	in radialer Richtung
θ	in Umfangsrichtung

1. Einleitung

Die Umströmung von Zylindern ist bereits häufig experimentell und theoretisch untersucht worden. Anhand der Meßergebnisse läßt sie sich mit Hilfe der Reynolds-Zahl folgendermaßen einteilen:

- $0 < Re \leq 6$: Ablösungsfreie Umströmung.
- $6 < Re \leq 50$: Umströmung mit stetig wachsendem Ablösungsgebiet auf der Zylinderrückseite; es tritt ein stationärer Doppelwirbel auf.

$50 < Re \leq 160$: Umströmung mit instationärem Doppelwirbel; schließlich periodisches Ab-schwimmen und Neubilden der Wirbel.

$160 < Re$: Umströmung mit aperiodischem Ab-schwimmen und Neubilden der Wirbel.

Die gewonnenen Erkenntnisse reichen jedoch noch nicht aus, um von einer eindeutigen Klärung der Zylinderumströmung ohne und mit Ablösung sprechen zu können. Vor allem fehlen bislang noch verlässliche Information über die Ablösung der Strömung auf der Rückseite des Zylinders.

ders und ein über weite Bereiche der Reynolds-Zahl experimentell und theoretisch gesichertes Widerstandsgesetz.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Klärung der stationären Zylinderumströmung liefern. Dazu werden zunächst die vollständigen Navier-Stokesschen Gleichungen mit Hilfe bewährter Differenzenverfahren numerisch integriert. Bei den Rechnungen wird davon ausgegangen, daß keine freie Konvektion auftritt und daß es sich um ein Newtonsches Fluid mit konstanten Stoffwerten handelt. Sind die Geschwindigkeitsfelder bekannt, so lassen sich Untersuchungen über den Strömungswiderstand sowie über alle mit der Ablösung der Strömung auf der Zylinderrückseite zusammenhängenden Erscheinungen anschließen. Die theoretisch-numerischen Ergebnisse werden mit Meßdaten sowie mit anderen theoretischen Daten verglichen.

Über den Einfluß der Strömung auf den stationären sowie auf den instationären Stoff- und Wärmetransport durch zylindrische Phasengrenzflächen wird in einer weiteren Arbeit berichtet.

2. Mathematische Grundlagen und Definitionen

Die Strömung um den Zylinder läßt sich mit Hilfe der Navier-Stokesschen Gleichung in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung beschreiben. Für den zweidimensionalen Fall der Zylinderumströmung erhält man für die Navier-Stokessche Gleichung in der dimensionsfreien Schreibweise:

$$w_r^* \frac{\partial w_r^*}{\partial r^*} + \frac{w_\theta^*}{r^*} \frac{\partial w_r^*}{\partial \theta} - \frac{w_\theta^{*2}}{r^{*2}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* w_r^*) \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 w_r^*}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial w_\theta^*}{\partial \theta} \right], \quad (1)$$

$$w_r^* \frac{\partial w_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{w_\theta^*}{r^*} \frac{\partial w_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{w_r^* w_\theta^*}{r^*} = -\frac{1}{2r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* w_\theta^*) \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 w_\theta^*}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial w_r^*}{\partial \theta} \right]. \quad (2)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial r^*} (r^* w_r^*) + \frac{\partial w_\theta^*}{\partial \theta} = 0. \quad (3)$$

Es bedeuten r^* und θ die dimensionsfreien Zylinderkoordinaten; θ wird vom vorderen Staupunkt aus über beide Seiten des Zylinders bis zum hinteren Staupunkt, $\theta = \pi$, gemessen. Die verwendeten Kennzahlen lauten:

$$r^* \equiv \frac{r}{R} \quad \text{örtlicher Radius,} \quad (4)$$

$$w_r^* \equiv \frac{w_r}{w_\infty} \quad \text{örtliche Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung,} \quad (5)$$

$$w_\theta^* \equiv \frac{w_\theta}{w_\infty} \quad \text{örtliche Geschwindigkeitskomponente in Umfangsrichtung,} \quad (6)$$

$$p^* \equiv \frac{p}{\rho w_\infty^2 / 2} \quad \text{örtlicher Druck,} \quad (7)$$

$$Re \equiv \frac{w_\infty d}{\nu} \quad \text{Reynolds-Zahl.} \quad (8)$$

Hierin bedeuten $d = 2R$ den Durchmesser des Zylinders, w_∞ die Geschwindigkeit der Grundströmung, ρ die Masendichte und ν die kinematische Viskosität des Fluids.

Zur Vorbereitung der Lösung der gekoppelten Gln. (1) bis (3) werden die Wirbelstärke ϕ und die Stromfunktion ψ eingeführt. Die Wirbelstärke ϕ ist definiert als der Betrag der Rotation des örtlichen Geschwindigkeitsvektors im Strömungsfeld:

$$\phi \equiv \frac{\partial w_\theta}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \theta}. \quad (9)$$

Die örtlichen Geschwindigkeitskomponenten lassen sich durch die Stromfunktion ψ darstellen, die durch folgende Beziehungen definiert ist:

$$w_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (10)$$

$$w_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (11)$$

Die Stromfunktion und die Wirbelstärke lassen sich folgendermaßen dimensionsfrei darstellen:

$$\psi^* \equiv \frac{\psi}{R w_\infty} \quad \text{Stromfunktion,} \quad (12)$$

$$\phi^* \equiv \frac{\phi R}{w_\infty} \quad \text{Wirbelstärke.} \quad (13)$$

Da sich die Werte der Stromfunktion und der Wirbelstärke in der Nähe der Zylinderoberfläche weitaus stärker ändern als in größerer Entfernung vom Zylinder, wird die Koordinatentransformation $r^* = e^z$ eingeführt.

Dadurch sowie unter Verwendung variabler Schrittweiten sind die numerischen Rechnungen auch für große Entfernungen von der Zylinderoberfläche möglich, obwohl das Differenzenverfahren nur eine endliche Zahl von radialen Schritten erlaubt.

Berücksichtigt man die Gln. (9) bis (13) in den gekoppelten Gln. (1) bis (3), so läßt sich die Strömung um den Zylinder durch die folgenden dimensionsfreien Gleichungen für die Stromfunktion und für die Wirbelstärke beschreiben:

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} = \Phi^* e^{2z} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \theta^2} = \frac{Re}{2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right) \quad (15)$$

Zu diesen gekoppelten Differentialgleichungen gehören folgende Randbedingungen:

$$\theta = 0, \pi: \psi^* = 0, \frac{\partial \psi^*}{\partial z} = 0, \Phi^* = 0. \quad (16), (17), (18)$$

$$z = 0: \psi^* = 0, \frac{\partial \psi^*}{\partial z} = 0. \quad (19), (20)$$

Die letzten beiden Gleichungen müssen durch Gl. (14) erfüllt werden. Hieraus ergibt sich für die Wirbelstärke die folgende Randbedingung:

$$z = 0: \Phi^* = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} \quad (21)$$

In sehr großer Entfernung vom Zylinder soll Potentialströmung vorliegen; eine weitere Randbedingung lautet daher:

$$z = z_\infty: \psi^* = \sin \theta \left(e^z - \frac{1}{e^z} \right), \Phi^* = 0. \quad (22), (23)$$

Die iterative Lösung der Gln. (14) und (15) liefert das gesamte Strömungsfeld in der Nähe des Zylinders einschließlich der Ablösung mit dem Doppelwirbel auf der Zylinderrückseite.

Zur Kennzeichnung des Strömungswiderstandes dient der Widerstandsbeiwert, der folgendermaßen definiert ist:

$$\zeta \equiv \frac{W/F}{\rho w_\infty^2 / 2} \quad (24)$$

Es bedeuten W die Widerstandskraft, F die Schattenfläche des Zylinders, ρ die Dichte sowie w_∞ die An-

strömungsgeschwindigkeit des Fluids. Der Widerstandsbeiwert setzt sich additiv aus einem Reibungsanteil und einem Druckanteil zusammen:

$$\zeta = \zeta_R + \zeta_D \quad (25)$$

Ist die Verteilung der Wirbelstärke Φ^* im Strömungsfeld des Zylinders bekannt, so lassen sich hieraus der Reibungswiderstandsbeiwert ζ_R und der Druckwiderstandsbeiwert ζ_D mit Hilfe folgender Gleichungen berechnen:

$$\zeta_R = \frac{4}{Re} \int_0^\pi (\Phi^*)_{z=0} \sin \theta \, d\theta, \quad (26)$$

$$\zeta_D = \int_0^\pi \left[1 + \frac{4}{Re} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} dz + \frac{4}{Re} \int_0^\theta \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right)_{z=0} d\theta \right] \cos \theta \, d\theta. \quad (27)$$

3. Diskussion des Strömungsfeldes

3.1. Stromlinienfeld

Stromlinienbilder vermitteln einen Eindruck von den örtlichen Strömungsverhältnissen. Sie zeigen Linien konstanter Werte der Stromfunktion. Die Tangente an eine Stromlinie zeigt die Richtung des Geschwindigkeitsvektors an; sein Betrag ändert sich im allgemeinen längs einer Stromlinie. Der Abstand zwischen zwei Stromlinien gibt Aufschluß über die Größe der Geschwindigkeit: Konvergenz zweier Stromlinien veranschaulicht Beschleunigung des Fluids, Divergenz dagegen Verzögerung. Senkrecht zu einer Stromlinie findet kein konvektiver Impulstransport statt.

Die Bilder 1 bis 3 geben beispielhaft einige Stromlinien für die gleichen Werte der Stromfunktion bei verschiedenen Reynolds-Zahlen wieder. Bild 1 zeigt ein Stromlinienbild bei ablösungsfreier Umströmung des Zylinders für $Re = 1$. Im Anströmbereich und im Abströmbereich des Zylinders verlaufen die Stromlinien noch nahezu ähnlich. Dieses weist auf eine schleichende Umströmung hin, bei der die Trägheitskräfte noch von untergeordneter Bedeutung sind. In Bild 2 liegt die Symmetrie der Stromlinien zur Äquatorebene des Zylinders für $Re = 30$ mit Sicherheit nicht mehr vor. Deutlich sichtbar erscheint ein stationärer Doppelwirbel auf der Zylinderrückseite. Der Beginn der Strömungablösung auf der Rückseite des Zylinders ist durch den Ablösewinkel θ_A gekennzeichnet. Die hiervon ausgehenden

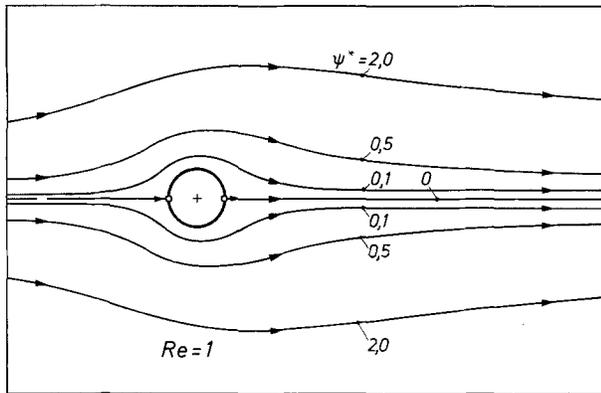


Bild 1. Linien konstanter Werte der Stromfunktion um einen Zylinder für die Reynolds-Zahl $Re = 1$

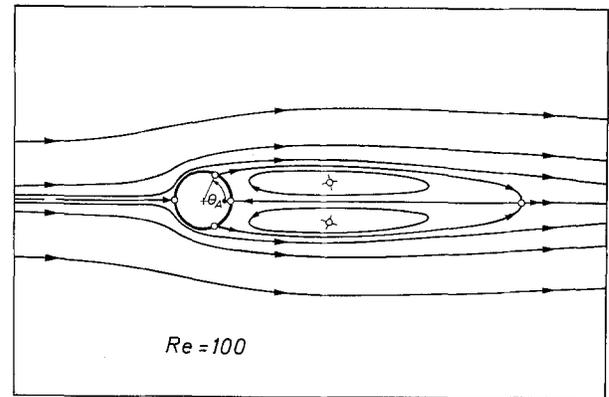


Bild 3. Linien konstanter Werte der Stromfunktion um einen Zylinder für die Reynolds-Zahl $Re = 100$

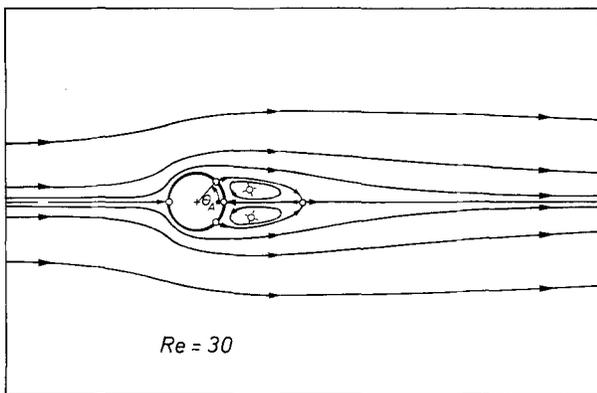


Bild 2. Linien konstanter Werte der Stromfunktion um einen Zylinder für die Reynolds-Zahl $Re = 30$

Stromlinien, $\psi^* = 0$, umschließen das Gebiet der Rückströmung. Sie grenzen das Wirbelgebiet in fluiddynamischer Hinsicht gegenüber der Außenströmung ab. Da quer zu den Stromlinien kein konvektiver Energiestrom auftreten kann, muß der zur Rotation des Doppelwirbels erforderliche Energiebedarf allein durch molekularen Transport von der Außenströmung her gedeckt werden. Innerhalb des Rückströmungsgebietes nehmen die Stromfunktion und die Wirbelstärke negative Werte an. Die Wirbelzentren sind durch Kreuze gekennzeichnet. Im hinteren Staupunkt ist die Strömung zum Zylinder gerichtet. Ein besonders gut ausgebildetes Rückströmungsgebiet weist das Strömungsfeld für $Re = 100$ auf, Bild 3. Die Wirbelschlepe nimmt in diesem Fall eine Ausdehnung von etwa 11 Zylinderradien ein.

Die für die verschiedenen Strömungsfelder charakteristischen Größen des Strömungswiderstandes und der Strömungsablösung sollen im folgenden erörtert werden.

Die hierfür berechneten Daten sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

3.2. Strömungsablösung

In Bild 4 ist der Ablösewinkel θ_A , gemessen vom hinteren Staupunkt, abhängig von der Reynolds-Zahl dargestellt. Die eigenen theoretisch-numerischen Daten sind als Doppelkreise eingetragen. Sie lassen sich gut ausgleichen durch folgende Approximationsgleichung:

$$\theta_A = \left(\frac{\ln Re - 1,83}{3 \cdot 10^{-4}} \right)^{0,456} \quad (28)$$

Ihr Gültigkeitsbereich ist durch $6,23 \leq Re \leq 10^3$ gegeben. Erste Ablöseerscheinungen treten bei $Re = 6,23$ auf. Die Übereinstimmung mit bisher bekannten Meßergebnissen und Rechenergebnissen ist gut. Lediglich die theoretischen Werte von Krall [10] weisen erhebliche Unregelmäßigkeiten untereinander sowie gegenüber allen anderen Daten auf. Der durch eine Pfeilkennzeichnung hervorgehobene Wert für $Re = 200$ ist beispielsweise kleiner als der bei $Re = 50$. Dies gibt Anlaß dazu, die Zuverlässigkeit der von Krall berechneten Geschwindigkeitsfelder zu bezweifeln. Die Meßwerte von Homann [2] liegen oberhalb der Kurve, die Meßwerte von Grove, Shair, Perterson und Acrivos [3] dagegen unterhalb der Kurve. In der zuletzt genannten Arbeit wird diese deutliche Abweichung zwischen den gemessenen Werten für θ_A damit erklärt, daß die Versuche beider Forschergruppen bei verschiedenen Werten für das Verhältnis B/d durchgeführt wurden. Mit B wird die Kanalbreite der Meßstrecke und mit d der Zylinderdurchmesser bezeichnet.

Table 1. Theoretisch-numerische Werte für die Widerstandsbeiwerte ζ_0 , ζ_R und ζ , für den Ablösewinkel θ_A und für die Ausdehnung des Rückströmungsgebietes l^* . Mit r^* wird die radiale Ausdehnung des numerisch untersuchten Feldes bezeichnet.

Re	r^*	ζ_R	ζ_D	ζ	θ_A	l^*
0,0001	1054	20380,0	20180,0	40560,0		
0,01	1054	211,7	213,0	424,7		
0,1	1054	28,635	28,602	57,237		
1	317	5,225	5,355	10,570		
4	317	2,128	2,374	4,502		
6	122	1,680	1,971	3,651		
6,2	122	1,646	1,942	3,588		
6,4	122	1,614	1,914	3,528	3,42	
6,6	122	1,585	1,881	3,465	8,07	
7	122	1,529	1,836	3,365	13,21	0,096
8	122	1,410	1,717	3,127	21,16	0,208
10	122	1,231	1,600	2,831	28,73	0,483
15	29	1,016	1,440	2,456	36,06	1,085
20	29	0,853	1,325	2,178	42,80	1,683
23	29	0,782	1,256	2,037	45,21	2,075
30	29	0,664	1,161	1,825	49,07	2,855
40	29	0,557	1,076	1,633	51,94	4,046
50	29	0,485	1,035	1,520	56,01	5,321
60	29	0,434	1,001	1,435	58,40	6,395
70	29	0,395	0,976	1,371	60,44	7,421
80	29	0,364	0,957	1,321	62,08	8,642
100	29	0,318	0,924	1,243	64,76	10,940
120	29	0,263	0,941	1,204	67,11	13,476

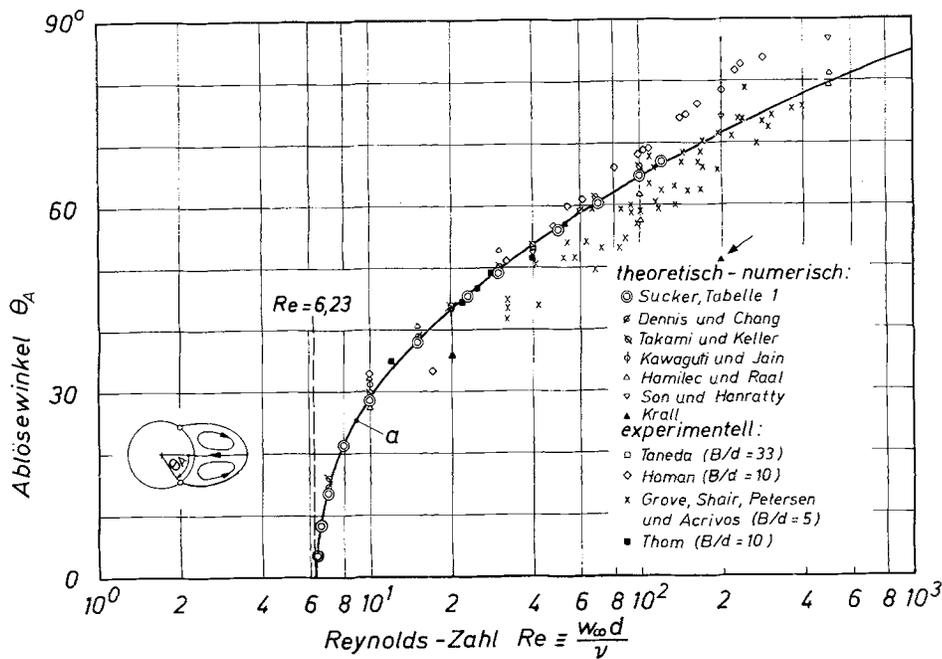


Bild 4. Ablösewinkel vom hinteren Staupunkt aus gemessen in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl; Kurve a nach Gl. (28); Verhältnis B/d von Kanalbreite B der Meßstrecke zum Zylinderdurchmesser d

Bild 5 zeigt die Längsausdehnung des Wirbelgebietes auf der Rückseite des Zylinders abhängig von der Reynolds-Zahl. Die eigenen theoretisch-numerischen Daten, dargestellt durch Doppelkreise, werden gut ausgeglichen durch Kurve a, die mit Hilfe folgender Approximationsgleichung berechnet wurde:

$$l^* = 0,12 Re - 0,748 \text{ mit } 6,23 \leq Re \leq 140. \quad (29)$$

Ausgehend von $Re = 6,23$ wächst das Gebiet der Rückströmung mit zunehmenden Werten der Reynolds-Zahl. Für $Re = 120$ nimmt die Wirbelschlepe eine Länge von 13 Zylinderradien ein. Die Kurve a gibt auch alle bis-

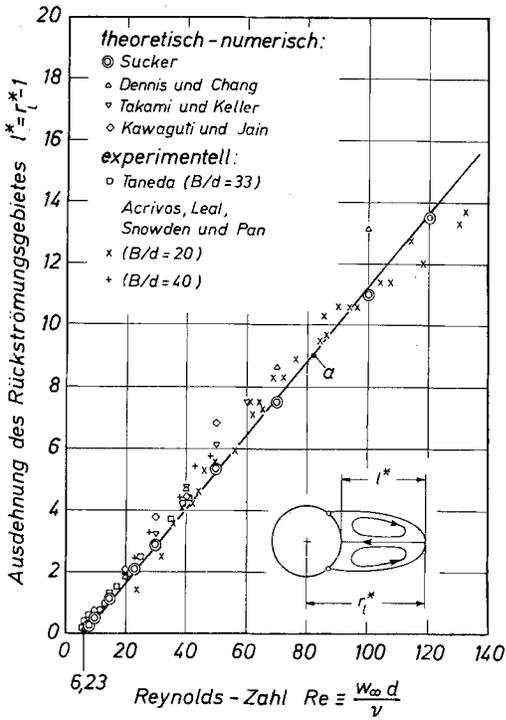


Bild 5. Radiale Ausdehnung des Rückströmungsgebietes gemessen von der Zylinderoberfläche in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl; Kurve a nach Gl. (29); Verhältnis B/d von Kanalbreite der Meßstrecke zum Zylinderdurchmesser d

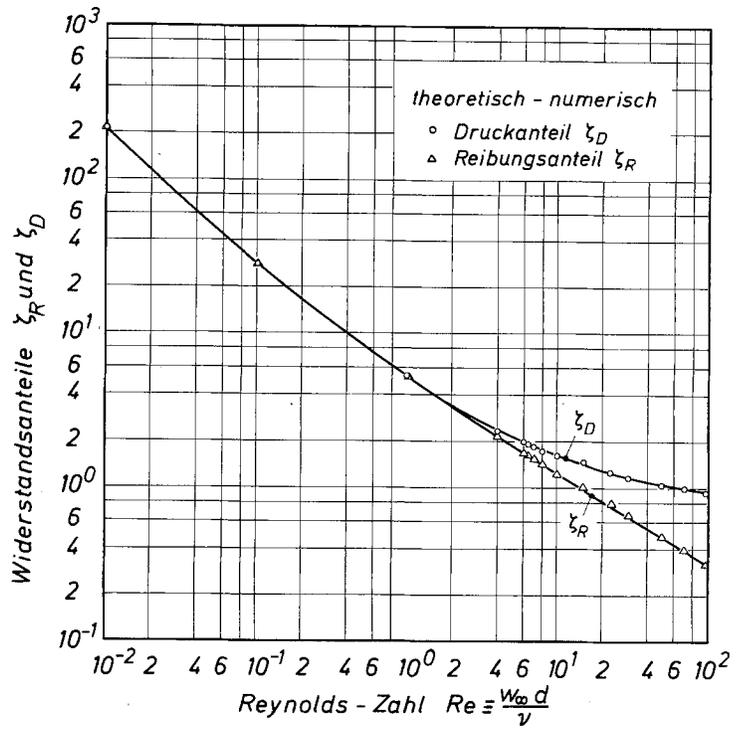


Bild 6. Druckwiderstandsbeiwert und Reibungswiderstandsbeiwert in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl

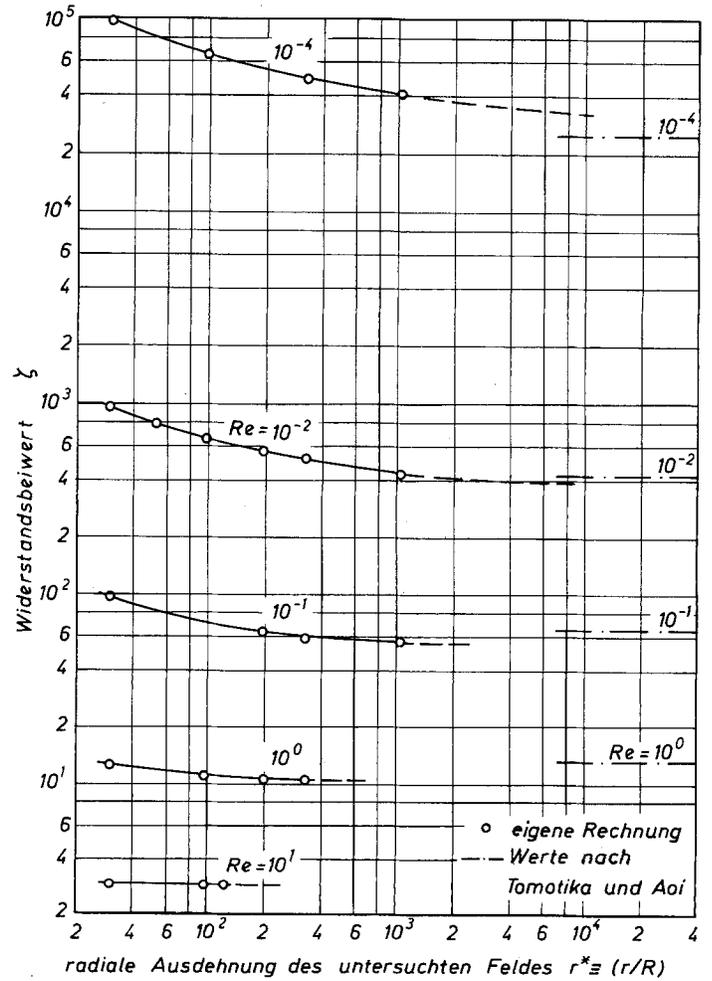


Bild 7. Widerstandsbeiwerte in Abhängigkeit von radialer Ausdehnung des numerisch untersuchten Feldes; Parameter ist die Reynolds-Zahl; -.-.- nach Gl. (30) berechnete Werte

her bekannten Meßwerte und Rechenwerte für l^* befriedigend wieder.

3.3. Widerstandsgesetz

In Bild 6 sind die berechneten Werte für den Reibungswiderstandsbeiwert und für den Druckwiderstandsbeiwert abhängig von der Reynolds-Zahl dargestellt; sie werden durch verschiedene Kurvenäste ausgeglichen. Im Bereich der Reynolds-Zahl $Re < 1$ sind beide Widerstandsanteile gleich groß. Mit zunehmenden Werten der Reynolds-Zahl im Bereich $Re > 1$ wächst das Verhältnis von Druckanteil zu Reibungsanteil. Dabei deutet der Verlauf des Kurvenastes für den Druckanteil auf eine asymptotische Annäherung an einen konstanten Endwert für ζ_D hin. Man darf daraus schließen, daß im Bereich höherer Werte der Reynolds-Zahl der gesamte Widerstandsbeiwert $\zeta = \zeta_R + \zeta_D$ überwiegend durch den Druckwiderstandsbeiwert bestimmt wird.

Die zu den Gln. (14) und (15) gehörenden Randbedingungen gemäß Gln. (22) und (23) erfordern streng genommen einen unendlich großen Wert für z_∞ . Bei der numerischen Auswertung des Gleichungssystems wäre zur Erfüllung dieser Forderung eine unvertretbar große Rechnerkapazität notwendig. Daher wurde bei den iterativen Rechnungen zunächst angenommen, daß mit ausreichender Genauigkeit bereits in einer Entfernung von 29 Radien vom Zylinder Potentialströmung vorliegt. Kontrollrechnungen mit größerer Feldausdehnung haben jedoch gezeigt, daß diese Annahme nicht allgemein gültig ist. Daher wurde hierüber eine systematische Untersuchung vorgenommen. In Bild 7 ist der gesamte Widerstandsbeiwert $\zeta = \zeta_R + \zeta_D$ abhängig von der radialen Ausdehnung des numerisch untersuchten Feldes bei verschiedenen Werten der Reynolds-Zahl dargestellt. Die theoretisch-numerischen Daten, die durch Kreise wiedergegeben werden, sind durch ausgezogene Kurven ausgeglichen; die gestrichelten Kurvenäste sind extrapoliert. Mit zunehmender radialer Ausdehnung r^* nähern sich die Kurven asymptotisch einem konstanten Endwert für ζ . Bei sehr kleinen Reynolds-Zahlen stellt sich ein Endwert für ζ erst bei $r^* \rightarrow \infty$ ein. Mit zunehmender Reynolds-Zahl wird ein Endwert bereits bei kleineren Werten von r^* erreicht. Für $Re = 10$ erhält man schon bei einer Feldausdehnung von 29 Zylinderradien einen zuverlässigen Widerstandsbeiwert; für $Re = 10^{-2}$ ist jedoch ein Feld von 1000 Zylinderradien immer noch zu klein. Die strichpunktierten Geraden in Bild 7 geben Werte für den Widerstandsbeiwert wieder, die mit Hilfe der folgenden Gleichung berechnet wurden:

$$\zeta = \frac{9\pi}{Re(2,002 - \ln Re)} \quad (30)$$

Ihr praktisch sinnvoller Gültigkeitsbereich erstreckt sich von $Re = 0$ bis $Re = 10^{-4}$. Sie ergibt sich als Grenzwert für sehr kleine Werte der Reynolds-Zahl aus folgender Gleichung, die von Tomotika und Aoi [12] auf der Basis der Oseenschen Näherung mit Hilfe von Reihenentwicklungen hergeleitet wurde:

$$\zeta = \frac{9\pi}{Re A} \left[1 - \frac{1}{A} \left(A^2 - \frac{A}{2} + \frac{5}{16} \right) \frac{Re^2}{32} \right] \quad (31)$$

Hierin lautet die Abkürzung A :

$$A = 2,002 - \ln Re. \quad (32)$$

Die Abweichungen zwischen den nach Gln. (30) und (31) berechneten Werten betragen im Bereich der Reynolds-Zahl $Re \leq 10^{-1}$ höchstens 0,1%. In Bild 7 liegen die asymptotischen Endwerte der Kurven für $Re > 10^{-2}$ stets unterhalb der durch die strichpunktierten Geraden dargestellten theoretischen Werte. Dieses tritt um so deutlicher in Erscheinung, je größer der Wert der Reynolds-Zahl ist. Man darf daraus schließen, daß das Widerstandsgesetz gemäß Gl. (30) im Bereich $Re > 10^{-2}$ mit Sicherheit nicht mehr anwendbar ist.

Die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes von der Reynolds-Zahl ist in Bild 8 dargestellt. Die Doppelkreise geben die eigenen theoretisch-numerischen Daten wieder. Die eingezeichnete Kurve a wurde mit Hilfe folgender Approximationsgleichung berechnet:

$$\zeta = \frac{6,8}{Re^{0,89}} + \frac{1,96}{Re^{0,5}} - \frac{1}{4 \cdot 10^{-4} Re} + \frac{1}{1,1 \cdot 10^3 Re} + 1,18 \quad (33)$$

Dieses Widerstandsgesetz wird durch die eigenen Rechenergebnisse bis $Re = 50$ und für höhere Werte der Reynolds-Zahl durch zahlreiche Meßwerte gestützt. Der größte relative Wiedergabefehler für die theoretisch-numerischen Daten durch die Gl. (33) beträgt acht Prozent; die mittlere quadratische Abweichung gegenüber den Meßwerten im Bereich $Re \geq 50$ beträgt zwei Prozent. Der Gültigkeitsbereich der Gl. (33) erstreckt sich von $Re = 10^{-4}$ bis etwa $Re = 2 \cdot 10^5$. Die Kurve c stellt die analytische Näherungsgleichung (30) von Tomotika und Aoi [12] dar. Es zeigt sich, daß die Gl. (30) für höhere Reynolds-Zahlen als $Re = 7,4$ negative Werte liefert, die physikalisch sinnlos sind. Mit abnehmenden Werten der Reynolds-Zahl nähert sich die Kurve a der

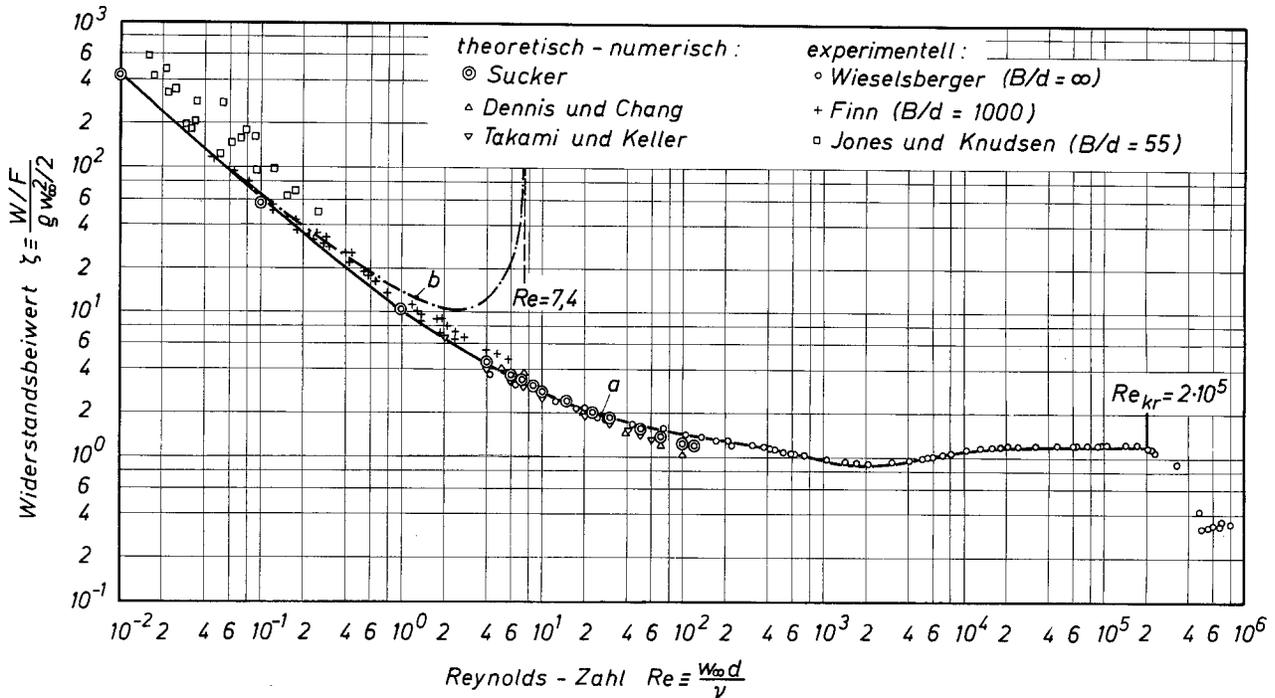


Bild 8. Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl; Kurve a: Widerstandsgesetz gemäß Gl. (33); Kurve b: Grenzesetz nach Gl. (34); Kurve c: Näherungslösung nach Gl. (30) von Tomotika und Aoi; Verhältnis B/d von Kanalbreite B zum Zylinderdurchmesser d

Grenzgeraden b, die mit Hilfe der folgenden Gleichung berechnet wurde:

$$\zeta = \frac{6,8}{Re^{0,89}} \quad (34)$$

Sie stellt die Tangente an die Kurve c bei $Re = 10^{-4}$ dar.

Die Auswertung der Gl. (30) von Tomotika und Aoi zeigt, daß der Exponent n der Reynolds-Zahl in einer Näherungsgleichung der Form

$$\zeta = \frac{\text{konst}}{Re^n} \quad (35)$$

mit abnehmenden Werten der Reynolds-Zahl stetig ansteigt und erst für $Re \rightarrow 0$ den Grenzwert $n = 1$ annimmt. Die Konstante in Gl. (35) läßt sich für diesen Grenzfall nicht bestimmen. Im Bereich hoher Werte der Reynolds-Zahl, etwa zwischen $Re = 2 \cdot 10^4$ und $2 \cdot 10^5$, ist der Widerstandsbeiwert nahezu konstant, $\zeta = 1,18$.

Oberhalb von $Re = 2 \cdot 10^5$ nimmt der Widerstandsbeiwert in einem begrenzten Bereich der Reynolds-Zahl nahezu sprunghaft ab. Dieses ist ein Kennzeichen dafür, daß die laminare Grenzschicht auf der Zylindervorderseite in den turbulenten Zustand übergegangen ist;

die kritische Reynolds-Zahl ist damit überschritten. Ihr Wert ist abhängig vom Turbulenzgrad der Strömung. Den Meßwerten von Wieselsberger liegt ein Turbulenzgrad von $Tu = 1\%$ zugrunde. Hierfür nimmt die kritische Reynolds-Zahl den Wert $Re_{kr} = 2 \cdot 10^5$ an.

Die starke Abweichung der als Quadrate dargestellten Meßwerte von Jones und Knudsen [13] gegenüber den mit Hilfe der Gl. (33) berechneten Werte ist auf ein zu kleines Verhältnis von Kanalbreite B der Meßstrecke zum Zylinderdurchmesser d zurückzuführen; es beträgt $B/d = 55$. Gemäß Bild 7 ist für Messungen in diesem Bereich der Reynolds-Zahl ein Wert von mindestens $B/d = r^* = 1000$ erforderlich. Die Messungen von Finn [14] wurden bei einem Wert $B/d = 1000$ durchgeführt, der in diesem Bereich der Reynolds-Zahl fast ausreichend ist. Wieselsberger [15] hat mit Hilfe eines Freistrahles ein nahezu unendlich großes Öffnungsverhältnis erreicht, $B/d \approx \infty$; diese Meßwerte gelten als die bisher zuverlässigsten.

Die bei der Reynolds-Zahl $Re = 50$ einsetzende periodische Schwingung des Doppelwirbels auf der Rückseite des Zylinders wird durch die stationären Rechnungen nicht erfaßt. Daher sind aus den theoretisch-numerischen Rechnungen für $Re > 50$ niedrigere Widerstandsbeiwerte zu erwarten als die mit Hilfe der Gl. (33) berechneten.

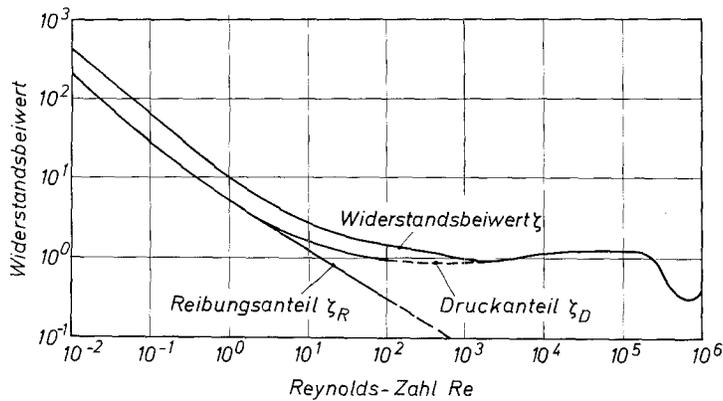


Bild 9. Vergleich zwischen den Widerstandsanteilen und dem gesamten Widerstandsbeiwert abhängig von der Reynolds-Zahl; Kurve a nach Gl. (33)

In Bild 9 werden abhängig von der Reynolds-Zahl die Widerstandsanteile ζ_R und ζ_D mit dem summierten Widerstandsbeiwert ζ , der mit Hilfe der Gl. (33) berechnet wurde, verglichen. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß der Reibungswiderstandsbeiwert und der Druckwiderstandsbeiwert für $Re < 1$ zahlenmäßig gleich sind. Daher ist in diesem Bereich der Reynolds-Zahl der gesamte Widerstandsbeiwert, dargestellt durch die Kurve a, doppelt so groß. Die gestrichelten Kurvenäste geben den extrapolierten Verlauf der Widerstandsanteile wieder. Bei $Re = 600$ beträgt hiernach der Reibungswiderstandsbeiwert nur noch etwa $1/10$ des Druckwiderstandsbeiwertes. Im Bereich höherer Werte der Reynolds-Zahl werden die Reibungskräfte gegenüber den Druckkräften vernachlässigbar klein. Demzufolge wird der Widerstand des Zylinders nur noch durch den Formwiderstand bestimmt.

Zur Berechnung des Strömungswiderstandes ist die Gl. (33) heranzuziehen, die das bisher umfassendste Widerstandsgesetz für Kreiszyylinder darstellt. Sein Gültigkeitsbereich ist durch $10^{-4} \leq Re < Re_{kr}$ gegeben. Im Bereich der Reynolds-Zahl $Re < 10^{-4}$ ist das Näherungsgesetz von Tomotika und Aoi [12] gemäß Gl. (30) zu verwenden.

Die kritische Reynolds-Zahl Re_{kr} ist eine Funktion des Turbulenzgrades Tu . Bei isotroper Turbulenz ist die

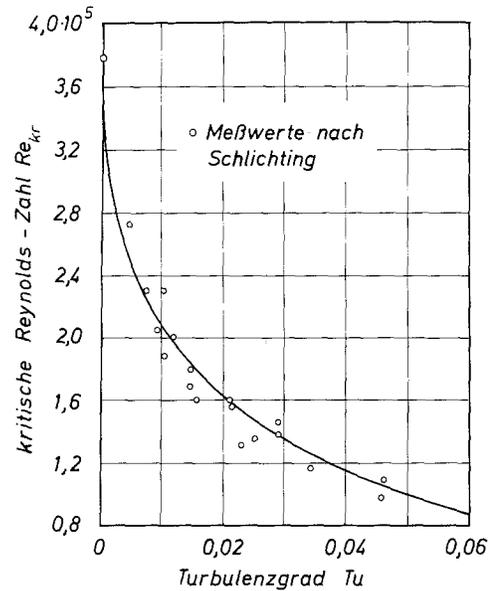


Bild 10. Kritische Reynolds-Zahl bei der Umströmung einer Kugel und eines Kreiszyinders in Abhängigkeit vom Turbulenzgrad; ausgezogene Kurve nach Gl. (37)

zeitliche Längsschwankung der Geschwindigkeit w' alleine maßgebend für den Turbulenzgrad, der dann wie folgt definiert ist:

$$Tu \cong \sqrt{\frac{\overline{w'^2}}{w_\infty^2}} \quad (36)$$

Meßergebnisse, die den Einfluß von Tu auf Re_{kr} zu erkennen geben, hat Schlichting [16] für den Fall der Kugelumströmung zusammengefaßt. Diese Meßdaten sind in Bild 10 wiedergegeben. Sie werden durch die eingezeichnete Kurve ausgeglichen, die mittels folgender Approximationsgleichung berechnet wurde:

$$Re_{kr} = \frac{3,78 \cdot 10^5}{e^{6 \cdot \sqrt{Tu}}} \quad (37)$$

Nach Kestin [17] liegen beim Kreiszyylinder zweifellos die gleichen Verhältnisse für die kritische Reynolds-Zahl vor. Demzufolge gibt die Gl. (37) den funktionalen Zusammenhang zwischen der kritischen Reynolds-Zahl und dem Turbulenzgrad sowohl für die Zylinderumströmung als auch für die Kugelumströmung mit ausreichender Genauigkeit wieder.

Literatur

1. Taneda, S.: Experimental investigation of the wakes behind circular cylinders and plates at low Reynolds-Numbers. *J. Phys. Soc. Japan* **11** (1956) 302/307
2. Homann, F.: Einfluß großer Zähigkeit bei Strömung am Zylinder. *Forsch. Geb. Ing. Wes.* **7** (1936) 1
3. Grove, A.S.; Shair, F.H.; Peterson, E.E.; Acrivos, A.: An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **19** (1964) 60/80
4. Thom, A.: The flow past circular cylinders at low speeds. *Proc. Roy. Soc. A.* **141** (1933) 651
5. Dennis, S.C.R.; Chang, Cham-Zu.: Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds Numbers up to 100. *J. Fluid Mech.* **42** (1970) 471/489
6. Takami, H.; Keller, H.B.: Steady two-dimensional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder. *Phys. Fluids Suppl. II* **12,4** (1969) 51/56
7. Kawaguti, M.; Jain, P.: Numerical study of a viscous fluid past a circular cylinder. *J. Phys. Soc. Japan* **21** (1966) 2055/2062
8. Hamilec, A.E.; Raal, J.D.: Numerical studies of viscous circular cylinder in slip flow. Th. D. Thesis, University of Minnesota 1969
9. Son, J.S.; Hanratty, T.J.: Numerical solution of the flow around a circular cylinder at Reynolds Numbers of 40, 200 and 500. *J. Fluid Mech.* **35** (1969) 369/386
10. Krall, K. M.: Local heat transfer around a transverse circular cylinder in slip flow. Th. D. Thesis, University of Minnesota 1969
11. Acrivos, A.; Leal, L.C.; Snowden, D.D.; Pan, F.: Further experiments on steady separated flows past bluff objects. *J. Fluid Mech.* **34** (1968) 25/48
12. Tomotika, S.; Aoi, T.: An expansion formula for the drag on a circular cylinder moving through a viscous fluid at small Reynolds Numbers. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 3 Pt. **4** (1951) 401/406
13. Jones, A.M.; Knudsen, J.G.: Drag coefficients at low Reynolds Numbers for flow past immersed bodies: AICHE, March (1961) 20/25
14. Finn, R.K.: Determination of the drag on a cylinder at low Reynolds Numbers. *J. Appl. Phys.* **24** (1953) 771/773
15. Wieselsberger, C.: Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen. **2** (1923)
16. Schlichting, H.: Grenzschichttheorie. 5. Auflage, Braun, Karlsruhe 1965
17. Kestin, J.: The effect of free stream turbulence on heat transfer rates. *Advances in Heat Transfer* **3** (1966) 1/32

Dr.-Ing. D. Sucker
 o. Professor Dr.-Ing. H. Brauer
 Institut für Chemieingenieurtechnik
 Technische Universität Berlin
 D-1 Berlin 10, Ernst-Reuter-Platz 7
 (Deutschland)

Eingegangen am 18.3.1975