manuscripta math. 7, 103 - 112 (1972)

ASSOZIATIVE TRIPELSYSTEME

Ottmar Loos

It is shown that every associative triple system M of the second kind (see below for the definition) may be imbedded into an associative algebra A with involution J in such a way that $\langle xyz\rangle = xJ(y)z$. We define the radical of M and study its relation with the radical of A . Finally we classify the finite-dimensional semisimple associative triple systems over a field.

1. DEFINITIONEN. Es sei K ein kommutativer Ring mit 1. Ein unitärer K-Modul M zusammen mit einer K-trilinearen Abbildung $M \times M \times M \longrightarrow M$, $(x,y,z) \mapsto \langle xyz\rangle$, heisst ein *assoziatives Tripelsystem 1. Art* (bzw. *2. Art*), wenn die Identitäten

(AT1) $$\langle uv\langle xyz\rangle\rangle = \langle u\langle vxy\rangle z\rangle = \langle\langle uvx\rangle yz\rangle$$

bzw.

(AT2) $$\langle uv\langle xyz\rangle\rangle = \langle u\langle yxv\rangle z\rangle = \langle\langle uvx\rangle yz\rangle$$

erfüllt sind. Assoziative Tripelsysteme 1. Art (ternäre Ringe) sind in [4] untersucht worden. Ansätze zu einer Theorie assoziativer Tripelsysteme 2. Art finden sich in [1] und [5].

Im folgenden bezeichnet M stets ein assoziatives Tripelsystem 2. Art (= AT2) . Wie üblich werden Homomorphismen, Isomorphismen und Untertripelsysteme definiert. Ein K-Untermodul I von M heisst ein

<u>Ideal</u>, falls $\langle IMM\rangle + \langle MIM\rangle + \langle MMI\rangle \subset I$. Wir nennen M <u>einfach</u>, falls 0 und M die einzigen Ideale von M sind und $\langle MMM\rangle \neq 0$ ist.

2. EINBETTUNG IN ASSOZIATIVE ALGEBREN. Ist A eine assoziative K-Algebra und $x \mapsto \bar{x}$ eine Involution (d.h., ein involutorischer Antiautomorphismus) von A , so wird A mit

$$(*) \qquad \langle xyz\rangle = x\bar{y}z$$

zu einem AT2. Allgemeiner ist jeder K-Untermodul von A , der unter (*) abgeschlossen ist, ein AT2. Wir wollen nun zeigen, dass sich jedes AT2 auf diese Weise erhalten lässt. Dazu sei $E = \mathrm{End}_K(M)$ die assoziative K-Algebra aller Endomorphismen von M , und für $x,y \in M$ seien $\ell(x,y)$ und $r(x,y)$ in E durch

$$\ell(x,y).z = \langle xyz\rangle = r(z,y).x$$

definiert. Sei E^{op} die zu E entgegengesetzte Algebra, und $(f,g) \mapsto (g,f) = \overline{(f,g)}$ die kanonische Involution von $E \oplus E^{op}$ und $E^{op} \oplus E$. Wir setzen

$$\lambda(x,y) = (\ell(x,y),\ell(y,x)) \in E \oplus E^{op}$$

$$\rho(x,y) = (r(y,x),r(x,y)) \in E^{op} \oplus E$$

und bezeichnen mit L_o (bzw. R_o) den von $\lambda(M,M)$ (bzw. $\rho(M,M)$) erzeugten K-Untermodul von $E \oplus E^{op}$ (bzw. $E^{op} \oplus E$). Schliesslich sei e_1 (bzw. e_2) das Einselement von $E \oplus E^{op}$ (bzw. $E^{op} \oplus E$).

<u>LEMMA 1.</u> $L = K.e_1 + L_o$ (bzw. $R = K.e_2 + R_o$) <u>ist eine unter der Involution stabile Unteralgebra von</u> $E \oplus E^{op}$ (bzw. $E^{op} \oplus E$), <u>und</u> L_o (bzw. R_o) <u>ist ein Ideal von</u> L (<u>bzw.</u> R).

<u>Beweis</u>. Wegen (AT2) ist $\ell(u,v)\ell(x,y) = \ell(\langle uvx\rangle,y) = \ell(u,\langle yxv\rangle)$ und $r(u,v)r(x,y) = r(\langle xvu\rangle,y) = r(u,\langle vxy\rangle)$, und hieraus folgt $\lambda(u,v)\lambda(x,y) = \lambda(\langle uvx\rangle,y)$ und $\rho(u,v)\rho(x,y) = \rho(u,\langle vxy\rangle)$. Ferner gilt

offenbar $\overline{\lambda(x,y)} = \lambda(y,x)$ und $\overline{\rho(x,y)} = \rho(y,x)$. Daraus folgt das Lemma.

Es sei $a = (a_1,a_2) \in L$ und $b = (b_1,b_2) \in R$. Mit den Definitionen

$$ax = a_1(x) \ , \ xa = \bar{a}x = a_2(x)$$
$$xb = b_1(x) \ , \ bx = x\bar{b} = b_2(x)$$

$(x \in M)$ wird M zu einem Links- und Rechts-L-Modul und einem Links-und-Rechts-R-Modul. Nun sei $\overline{M}$ eine Kopie von M und

$$A = L \oplus M \oplus \overline{M} \oplus R \ .$$

Wir schreiben die Elemente von A in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix}, \quad a \in L \ , \ x \in M \ , \ y \in \overline{M} \ , \ b \in R \ ,$$

und identifizieren $a \in L$ mit $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x \in M$ mit $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, u.s.w..

SATZ 1. (a) Mit dem Produkt

$$\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \lambda(x,y'), & ax' + xb' \\ ya' + by' & , \rho(y,x') + bb' \end{pmatrix}$$

wird A eine assoziative K-Algebra mit Einselement $1 = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$, und $A_o = L_o \oplus M \oplus \overline{M} \oplus R_o$ ist ein Ideal von A .

(b) Die Abbildung $J : u = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & y \\ x & \bar{b} \end{pmatrix} = \bar{u}$ ist eine Involution von A , und für $x,y,z \in M$ gilt $\langle xyz \rangle = x\bar{y}z$.

(c) e_1 und e_2 sind orthogonale Idempotente von A mit $\bar{e}_i = e_i$ und den Peirce-Räumen $A_{11} = L$, $A_{12} = M$, $A_{21} = \overline{M}$, $A_{22} = R$.

(d) $L \oplus R$ enthält kein nichttriviales Ideal von A .

Wir nennen $A = A(M)$ die Standard-Einbettung von M .

Beweis. Unter Verwendung von (AT2) und den Definitionen verifiziert man leicht die folgenden Formeln:

$$(ax)b = a(xb) \ , \ (bx)a = b(xa) \ ,$$

$$a\lambda(x,y) = \lambda(ax,y) \ , \ \lambda(x,ya) = \lambda(x,y)a \ , \ \lambda(xb,y) = \lambda(x,by) \ ,$$

$$b\rho(x,y) = \rho(bx,y) \ , \ \rho(x,y)b = \rho(x,yb) \ , \ \rho(xa,y) = \rho(x,ay) \ ,$$

$$\lambda(x,y)z = x\rho(y,z) \ , \ \rho(x,y)z = x\lambda(y,z) \ ,$$

für $a \in L$, $b \in R$, $x,y,z \in M$. Hieraus und aus Lemma 1 folgt die Assoziativität von A durch direkte Rechnung. Ebenso rechnet man (b) nach, und (c) folgt unmittelbar aus den Definitionen. Ist $P \subset L \oplus R$ ein Ideal von A , so gilt für $p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in P$:

$$p.(M \oplus \bar{M}) + (M \oplus \bar{M}).p \subset P \cap (M \oplus \bar{M}) = 0 \ ,$$

also $aM = bM = Ma = Mb = 0$, und hieraus folgt nach Definitionen von L und R , dass $a = b = 0$.

KOROLLAR. Sei $T = M \oplus \bar{M} \subset A$. Dann gilt $T^3 \subset T$ und T ist mit dem Tripelprodukt $\langle uvw \rangle = uvw$ ein assoziatives Tripelsystem 1. Art. Ferner ist $T^2 = L_o \oplus R_o$, und $T^2 \oplus T = A_o$ ist die Standard-Einbettung von T im Sinne von [4].

3. DAS RADIKAL. Für jedes $y \in M$ wird M mit der Multiplikation $u.v = \langle uyv \rangle$ zu einer assoziativen Algebra $M^{(y)}$; denn wegen (AT2) ist $(u.v).w = \langle\langle uyv \rangle yw \rangle = \langle uy \langle vyw \rangle\rangle = u.(v.w)$. Ein Paar $(x,y) \in M \times M$ heisst quasi-invertierbar, falls x in $M^{(y)}$ quasi-invertierbar ist, d.h., wenn es ein $u \in M$ gibt, sodass

$$u - x = \langle xyu \rangle = \langle uyx \rangle \ .$$

Wir schreiben $u = x^y$ und nennen u das Quasi-Inverse von (x,y) .

LEMMA 2. (x,y) *ist genau dann quasi-invertierbar, wenn* $1 - x\bar{y}$ *in* $A(M)$ *invertierbar ist.*

Beweis. Sei $u = x^y$. Dann gilt $u - x = x\bar{y}u = u\bar{y}x$, und es folgt

$$(1 - x\bar{y})(1 + u\bar{y}) = 1 - x\bar{y} - x\bar{y}u\bar{y} + u\bar{y} = 1 \ ,$$

und ähnlich $(1 + u\bar{y})(1 - x\bar{y}) = 1$. Umgekehrt sei $1 + v = (1 - x\bar{y})^{-1}$, also $v - x\bar{y} = x\bar{y}v = vx\bar{y}$. Dies impliziert

$$vx - x\bar{y}x = x\bar{y}vx = vx\bar{y}x \ ,$$

und

$$(x + vx) - x = x\bar{y}(x + vx) = (x + vx)\bar{y}x \ ,$$

d.h., $x^y = x + vx = (1 + v)x = (1 - x\bar{y})^{-1}x$.

BEMERKUNG. Die Bezeichnung x^y wird durch das "Exponentialgesetz"

$$(x^y)^z = x^{y+z}$$

nahegelegt, das man mit Hilfe von Lemma 2 leicht nachrechnet.

DEFINITION. Das *Radikal* von M ist

$\mathrm{Rad}\, M = \{x \in M\colon (x,y)$ quasi-invertierbar, für alle $y \in M\}$.

M heisst *halbeinfach*, falls $\mathrm{Rad}\, M = 0$.

SATZ 2. (a) *Das Radikal der Standard-Einbettung* A *von* M *ist*

$$\mathrm{Rad}\, A = \mathrm{Rad}\, L \oplus \mathrm{Rad}\, M \oplus \overline{\mathrm{Rad}\, M} \oplus \mathrm{Rad}\, R \ .$$

(b) M *ist genau dann halbeinfach, wenn* A *halbeinfach ist.*

Beweis. Es ist $\mathrm{Rad}\, A = \sum A_{ij} \cap \mathrm{Rad}\, A$ und $\mathrm{Rad}\, A_{ii} = A_{ii} \cap \mathrm{Rad}\, A$ (vgl. [3]). Ferner gilt $\mathrm{Rad}\, A = \{v \in A : 1 - uvw$ invertierbar, für alle $u,w \in A\}$ (siehe [3]) und daher $M \cap \mathrm{Rad}\, A \subset \mathrm{Rad}\, M$ wegen Lemma 2. Umgekehrt sei $x \in \mathrm{Rad}\, M$ und $w = \sum w_{ij} \in A$. Dann ist

$xw = xw_{21} + xw_{22}$; denn $x \in A_{12}$, und $1 - xw_{21}$ ist invertierbar; denn x gehört zu Rad M . Es folgt

$$1 - xw = (1 - xw_{21})(1 - (1 - xw_{21})^{-1}xw_{22})$$

und $(1 - xw_{21})^{-1}xw_{22} = v \in A_{21}$. Daher ist $v^2 = 0$, $1 - v$ ist invertierbar, und somit ist $1 - xw$ für alle $w \in A$ invertierbar. Also ist xA ein quasireguläres Rechtsideal von A . Es folgt $xA \subset \mathrm{Rad}\, A$ (vgl. [3]) und insbesondere $x \in \mathrm{Rad}\, A$. Teil (b) folgt unmittelbar aus (a) und Satz 1 (d).

Als Konsequenz von Satz 2 erhält man, dass Rad M ein Ideal von M ist. Ferner zeigt man leicht:

$\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}\, M) = 0$, und $\mathrm{Rad}\, I = I \cap \mathrm{Rad}\, M$ für ein Ideal I von M .

4. ENDLICHDIMENSIONALE TRIPELSYSTEME. Es sei K ein Körper und M endlichdimensional über K . Nach Konstruktion von $A = A(M)$ ist klar, dass auch A endlichdimensional über K ist. Das Paar (A,J) heisse einfach, falls A keine nichttrivialen unter J stabilen Ideale besitzt und $A^2 \neq 0$ ist.

<u>SATZ 3.</u> (a) M <u>ist genau dann halbeinfach, wenn es direkte Summe einfacher Ideale ist.</u>

(b) M <u>ist genau dann einfach, wenn</u> (A,J) <u>einfach ist.</u>

<u>Beweis.</u> Ist I ein Ideal von M , so ist $P = AIA + A\bar{I}A$ ein unter J stabiles Ideal von A mit der Eigenschaft, dass $P \cap M = I$. Also folgt aus der Einfachheit von (A,J) die Einfachheit von M . Nun sei M und damit A halbeinfach. Dann ist A direkte Summe einfacher Ideale (vgl. [3]). Also gilt $A = P \oplus P'$, wobei P' ein unter J stabiles Ideal von A ist. Es folgt $M = I \oplus (M \cap P')$, und $M \cap P'$ ist ein Ideal von M . Also besitzt jedes Ideal von M ein Komplement,

und hieraus erhält man leicht, dass M direkte Summe einfacher Ideale ist.

Umgekehrt sei M einfach. Dann zeigen die obigen Überlegungen, dass für ein unter J stabiles Ideal P von A entweder $P \cap M = 0$ oder $P \cap M = M$ gilt. Im ersten Falle ist auch $P \cap \bar{M} = 0$, also $P \subset L + R$ und wegen Satz 1 (d) ist $P = 0$. Im zweiten Falle ist $M \oplus \bar{M} \subset P$ und daher $A_o \subset P$. Wäre A nicht halbeinfach, so hätte man $A_o \subset \operatorname{Rad} A$, und A_o wäre nilpotent (siehe [3]). Dann wäre aber A_o^2 ein echt in A_o enthaltenes unter J stabiles Ideal von A, was $A_o^2 = 0$ und damit $\langle MMM \rangle = 0$ nach sich zöge, im Widerspruch zur Einfachheit von M. Daher ist A und wegen Satz 2 auch M halbeinfach. Da A direkte Summe einfacher Ideale ist, gibt es ein zu A_o komplementäres Ideal. Dieses ist in $L \oplus R$ enthalten und somit Null, woraus die Einfachheit von (A,J) folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

5. KLASSIFIKATION. Zur Klassifikation der einfachen endlichdimensionalen AT2 haben wir auf Grund von Satz 3 die einfachen assoziativen Algebren mit Involution (A,J) zu bestimmen. Das Ergebnis ist wohlbekannt (siehe z.B. [2]): entweder ist $A = B \oplus B^{op}$, $B = \operatorname{End}_D(V)$ die Endomorphismenalgebra eines endlichdimensionalen Rechtsvektorraumes V über einer Divisionsalgebra D von endlicher Dimension über K, und J ist die Vertauschungsinvolution, oder es ist $A = \operatorname{End}_D(V)$, und für J bestehen folgende Möglichkeiten: entweder ist $D = F$ ein (kommutativer) Körper, $\dim_F V$ ist gerade, und J ist das Adjungierte bezüglich einer nichtausgearteten alternierenden Bilinearform f auf V, oder D hat eine Involution $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$, und J ist das Adjungierte bezüglich einer nichtausgearteten hermiteschen Sesquilinearform f auf V (d.h., $\overline{f(x,y)} = f(y,x) \in D$, $f(x\alpha,y) = \bar{\alpha}f(x,y)$, für $\alpha \in D$).

Es sei e_1 ein Idempotent von A mit $J(e_1) = e_1$, und es sei $e_2 = 1 - e_1$. Ist $A = B \oplus B^{op}$, $e_1 = (c,c)$, $c^2 = c \in B = \mathrm{End}_D(V)$, und wählen wir eine Basis von Bild c und Kern c, so können wir den Peirce-Raum B_{10} von c mit den $p \times q$ - Matrizen über D identifizieren, und $A_{12} = B_{10} \oplus B_{01}$ mit den $p \times q$ - Matrizen über $D \oplus D^{op}$. Für $x,y,z \in A_{12}$ ist dann $xJ(y)z = x({}^t\bar{y})z$, wobei ${}^t\bar{y}$ die zu y transponiert-konjugierte Matrix bezeichnet. Ist $A = \mathrm{End}_D(V)$ und J das Adjungierte bezüglich einer alternierenden oder hermiteschen Form f, so ist $J(e_1) = e_1$ mit $f(\text{Kern } e_1, \text{Bild } e_1) = 0$ gleichbedeutend. Sei f alternierend. Dann gibt es Basen von Kern e_1 und Bild e_1, sodass die Matrix von f die Form

$$S_{p+q} = \mathrm{diag}(\underbrace{S_1,\ldots,S_1}_{p+q}) \;, \; S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. A_{12} lässt sich mit den $2p \times 2q$ - Matrizen über F identifizieren, und für $x,y,z \in A_{12}$ ist $xJ(y)z = xS_q({}^ty)S_p^{-1}z$. Es besteht ferner ein Isomorphismus zwischen A_{12} und den $p \times q$ - Matrizen über der split-Quaternionenalgebra über F mit der Standardinvolution und dem Tripelprodukt $x({}^t\bar{y})z$.

Nun sei f hermitesch. Wählen wir Basen von Kern e_1 und Bild e_1, so läßt sich A_{12} mit den $p \times q$ - Matrizen über D identifizieren. Für $x,y,z \in A_{12}$ ist $xJ(y)z = xa({}^t\bar{y})bz$, wobei b^{-1} (bzw. a) die Matrix der Einschränkung von f auf Bild e_1 (bzw. Kern e_1) bezüglich der gewählten Basen ist.

In jedem der obigen Fälle verifiziert man leicht, dass das AT2 $M = A_{12}$ mit dem Tripelprodukt $\langle xyz \rangle = xJ(y)z$ einfach und die Standard-Einbettung von M isomorph zu A ist. Somit haben wir den folgenden

SATZ 4. *Ein einfaches endlich-dimensionales AT2 über einem Körper* K *ist isomorph zu einem der folgenden:*

(i) $p \times q$ - *Matrizen über* $D \oplus D^{op}$, D *eine endlichdimensionale Divisionsalgebra über* K, *mit dem Tripelprodukt* $\langle xyz \rangle = x({}^t\bar{y})z$;

(ii) $2p \times 2q$ - *Matrizen über einem endlichen Erweiterungskörper* F *von* K, *mit dem Tripelprodukt* $\langle xyz \rangle = xS_q({}^ty)S_p^{-1}z$;

(iii) $p \times q$ - *Matrizen über einer endlich-dimensionalen Divisionsalgebra* D *mit Involution über* K, *mit dem Tripelprodukt* $\langle xyz \rangle = xa({}^t\bar{y})bz$, *wobei* a (*bzw.* b) *eine nichtausgeartete hermitesche* $q \times q$ - (*bzw.* $p \times p$ -) *Matrix ist.*

Für Referenzzwecke formulieren wir noch

KOROLLAR. *Ein einfaches endlichdimensionales AT2 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper* K *der Charakteristik* $\neq 2$ *ist isomorph zu den* $p \times q$ - *Matrizen über einer assoziativen Kompositionsalgebra über* K *versehen mit der Standard-Involution, mit dem Tripelprodukt* $\langle xyz \rangle = x({}^t\bar{y})z$.

LITERATUR

[1] Hestenes, M.R.: A ternary algebra with applications to matrices and linear transformations. Arch. Rat. Mech. Anal. 11, 138-194 (1962).

[2] Jacobson, N.: Lectures in Abstract Algebra II. Van Norstrand, Princeton 1953.

[3] Jacobson, N.: Structure of Rings. Colloq. Publ. Vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1964.

[4] Lister, W.G.: Ternary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 154, 37-55 (1971).

[5] Smiley, M.F.: An introduction to Hestenes ternary rings. Amer. Math. Monthly 76, 245-248 (1969).

Ottmar Loos
Mathematisches Institut
der Universität Münster
44 Münster/Westf.
Roxeler Str. 64

(Eingegangen am 5. September 1971)