Math. Ann. 256, 289–301 (1981)

Mathematische Annalen

Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflächen durch Polyeder

Rolf Schneider

Mathematisches Institut der Universität, Albertstraße 23b,
7800 Freiburg, Bundesrepublik Deutschland

Im folgenden ist F eine geschlossene konvexe Hyperfläche (Rand einer kompakten, konvexen Menge mit inneren Punkten) im n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 2$). F kann durch einbeschriebene Polyeder im Sinne der Hausdorffmetrik approximiert werden. Dabei ist die Hausdorffmetrik d erklärt durch

$$d(A,B) := \max\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\|, \sup_{x\in B}\inf_{y\in A}\|x-y\|\}$$

für kompakte Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Um die erreichbare Güte einer solchen Approximation beschreiben zu können, ist die folgende Definition zweckmäßig.

Definition. Zu $\varepsilon > 0$ sei $m(F,\varepsilon)$ die kleinste Zahl m derart, daß es ein der Fläche F einbeschriebenes konvexes Polytop P mit m Ecken gibt mit $d(F, \partial P) \leqq \varepsilon$.

Dabei bezeichnet ∂ den Rand. Ferner sei $\kappa_n = \pi^{n/2}/\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel und ϑ_n die Überdeckungsdichte der Kugel im n-dimensionalen Raum. Für eine Definition und für Abschätzungen dieser Zahl sehe man Rogers [4, S. 16–20]. Explizit bekannt ist nur $\vartheta_2 = 2\pi/\sqrt{27}$.

Gegenstand dieser Arbeit ist ein Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *If F eine Hyperfläche der Klasse C^3 mit positiven Hauptkrümmungen, so gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} m(F,\varepsilon)\,\varepsilon^{(n-1)/2} = 2^{(1-n)/2}\,\kappa_{n-1}^{-1}\,\vartheta_{n-1}\int_F \sqrt{K}\,dF,$$

wo K die Gauß-Kronecker-Krümmung von F (Produkt der Hauptkrümmungen) und dF das Oberflächenelement bezeichnet.

Verabredungsgemäß ist dabei F geschlossen, aber der Beweis läßt sich ohne wesentliche Änderungen auch durchführen, wenn F berandet und kompakt ist. In der Definition von $m(F,\varepsilon)$ wäre dann ∂P durch eine lokal konvexe polyedrische Hyperfläche zu ersetzen.

0025-5831/81/0256/0289/$02.60

Speziell im Fall $n=3$ besagt der Satz

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} m(F,\varepsilon)\,\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{27}}\int_F \sqrt{K}\,dF. \tag{1}$$

Bezeichnen wir für $m\in\mathbb{N}$ mit P_m ein der Fläche F einbeschriebenes Polytop mit m Ecken, für das unter dieser Bedingung der Abstand $d(F,\partial P_m)$ minimal ist, so ist leicht zu sehen, daß (1) äquivalent ist mit

$$\lim_{m\to\infty} m\,d(F,\partial P_m)=\frac{1}{\sqrt{27}}\int_F \sqrt{K}\,dF. \tag{2}$$

Diese Beziehung ist erstmals von Fejes Tóth [1], [2, S. 149] aufgestellt und plausibel gemacht worden. Dabei betont er allerdings, keinen Anspruch auf Strenge zu erheben. Möchte man dies doch tun, so bemerkt man, daß der für die Ungleichung

$$\liminf_{m\to\infty} m\,d(F,\partial P_m)\geqq\frac{1}{\sqrt{27}}\int_F \sqrt{K}\,dF$$

angedeutete Beweis ohne Schwierigkeiten präzisiert werden kann, jedoch offenbar keine Ausdehnung auf höhere Dimensionen gestattet. Den anderen Teil des heuristischen Arguments haben wir jedoch schon im dreidimensionalen Raum nicht sicher nachvollziehen können. Es wird daher im folgenden der n-dimensionale Fall nach einer anderen Methode behandelt. Die einfache Grundidee ist insofern wieder Fejes Tóth zuzuschreiben, als in [2] ein enger Zusammenhang dieser Art von Approximation mit Überdeckungsproblemen aufgezeigt wird. Entscheidend für das Folgende ist nun die naheliegende Bemerkung, daß zur optimalen Approximation einer konvexen Fläche durch einbeschriebene Polyeder in denjenigen Gegenden der Fläche, wo sie flacher ist, nur relativ wenige Eckpunkte der approximierenden Polyeder benötigt werden. Dem wird dadurch Rechnung getragen, daß wir die Fläche mit der durch die *zweite* Grundform gegebenen Riemannschen Metrik versehen und dann Überdeckungen von F durch geodätische Kugeln bezüglich dieser Metrik heranziehen.

Von nun an erfülle F die Voraussetzungen des Satzes. Insbesondere ist dann die zweite Grundform der Fläche (bei geeigneter Orientierung) positiv definit, sie definiert also in der Tat auf F eine Riemannsche Metrik. Begriffe, die sich hierauf beziehen, werden mit II gekennzeichnet. Zum Beispiel ist $L_{\mathrm{II}}(C)$ die Länge einer glatten Flächenkurve C auf F in dieser Metrik. Für $x,y\in F$ bezeichnet $\delta_{\mathrm{II}}(x,y)$ den Riemannschen Abstand von x und y, also das Infimum von $L_{\mathrm{II}}(C)$ über alle glatten Kurven C in F, die x und y verbinden. Schließlich ist $\{y\in F\colon\ \delta_{\mathrm{II}}(x,y)\leqq\rho\}$ für $x\in F$ und $\rho>0$ die II-geodätische Kugel um x mit Radius ρ und x ihr Mittelpunkt.

Im folgenden ist es notwendig, mit speziellen lokalen Parametrisierungen der Fläche F zu arbeiten. Sei $p\in F$ ein Punkt der Fläche, T_p die Tangentialhyperebene an F in p, H eine dazu parallele und F schneidende Hyperebene und H^+ der von H begrenzte abgeschlossene Halbraum, der p enthält. Bilden die äußeren Normalen an F in je zwei Punkten von $F\cap H^+$ stets einen Winkel $\leqq\alpha$

miteinander, wo $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ beliebig gewählt, aber im folgenden festgehalten ist, so wollen wir $F\cap H^+$ eine *Kappe* nennen. Der Abstand von H und T_p heiße die *Höhe* dieser Kappe und p ihr *Zentrum*. Offenbar gibt es ein $h_0>0$ derart, daß zu beliebigem $p\in F$ eine Kappe der Höhe h_0 mit Zentrum p existiert.

Mit Π_p bezeichnen wir die Orthogonalprojektion auf T_p. Für $y\in F$ sei

$$y^p := \Pi_p y \quad \text{und} \quad h(y,p) := \|y-y^p\|$$

gesetzt. Dabei ist $\|\cdot\|$ die Norm in $\mathbb{R}^n$.

Sei jetzt F_p eine Kappe mit Zentrum p, und sei $D := \Pi_p F_p$. D ist also eine kompakte konvexe Teilmenge von T_p. Sei e der zu T_p senkrechte Einheitsvektor, der ins Innere von F weist. Es gibt eine auf D definierte Funktion z der Klasse C^3 derart, daß $x+z(x)e\in F$ für $x\in D$ gilt. Wir nennen z die *Darstellungsfunktion* der Kappe F_p. In T_p wählen wir ein kartesisches (rechtwinkliges) Koordinatensystem mit Nullpunkt p und bezeichnen für $x\in T_p$ (und entsprechend für anders bezeichnete Punkte aus T_p) mit $x_1,\dots,x_{n-1}$ die zugehörigen Koordinaten von x. Wir schreiben

$$z_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad z_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad z_{ijk} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}.$$

Fassen wir T_p als Vektorraum mit Nullpunkt p auf, so können wir darin durch

$$\langle v,w\rangle_p := \sum z_{ij}(p)\, v_i w_j \tag{3}$$

ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ und damit eine euklidische Metrik erklären. Summationsindizes laufen hier und im folgenden, wenn nichts anderes gesagt ist, von 1 bis $n-1$. Wir setzen

$$\sqrt{\langle v,v\rangle_p} =: \|v\|_p$$

und bezeichnen $\|v-w\|_p$ auch als den *p-Abstand* der Punkte $v,w\in T_p$. Er hängt nicht von der Wahl der orthonormierten Basis in T_p ab.

Wir verwenden nun die Koordinaten $x_1,\dots,x_{n-1}$ des Punktes $x\in D$ als Parameter der Fläche F im Punkt $x+z(x)e$. Mit $b_{ij}(x)$ seien die Koeffizienten der zweiten Grundform (bezüglich des nach innen weisenden Normalenvektors der Fläche) von F in diesem Punkt bezüglich dieses Parametersystems bezeichnet. Es sei $\xi^p_{\min}(x)$ der kleinste und $\xi^p_{\max}(x)$ der größte relative Eigenwert der Matrix $(b_{ij}(x))$ bezüglich der (positiv definiten) Matrix $(z_{ij}(p))$. Auch diese Zahlen sind unabhängig von der Wahl der Basis in T_p.

Hilfssatz 1. *Zu jedem λ mit $0<\lambda<1$ existiert eine Konstante $0<h_\lambda\leqq h_0$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $p\in F$ und alle $x,y\in F$ mit $0<h(x,p)\leqq h_\lambda$ und $0<h(y,p)\leqq h_\lambda$ gilt*

$$\lambda \leqq \xi^p_{\min}(x) \leqq \xi^p_{\max}(x) \leqq \lambda^{-1}, \tag{4}$$

$$\sqrt{\lambda} \leqq \frac{\delta_{\mathrm{II}}(x,y)}{\|x^p-y^p\|_p} \leqq \sqrt{\lambda^{-1}}, \tag{5}$$

$$\lambda \leqq \frac{\delta_{\mathrm{II}}(y,p)}{\sqrt{2h(y,p)}} \leqq \lambda^{-1}. \tag{6}$$

Beweis. Zunächst müssen wir die Existenz einer Zahl c zeigen derart, daß mit den obigen Bezeichnungen

$$|z_i(x)| \leqq c, \quad |z_{ij}(x)| \leqq c, \quad |z_{ijk}(x)| \leqq c \tag{7}$$

für alle x aus dem (hinreichend klein gewählten) Definitionsbereich von z und alle i, j, k gilt, wobei c weder von dem betrachteten Punkt p noch von dem in T_p gewählten Koordinatensystem abhängt. Die einzige Schwierigkeit besteht darin, daß zu jedem Punkt p eine andere Darstellungsfunktion z gehört.

Aus Kompaktheitsgründen gibt es endlich viele Kappen F_{p_i} mit Zentren p_i $(i=1, \ldots, \nu)$ und eine Zahl $0 < h_1 \leqq h_0$ derart, daß jede Kappe der Höhe h_1 ganz in einer dieser Kappen enthalten ist. In jeder Tangentialhyperebene T_{p_i} wählen wir ein (im folgenden festzuhaltendes) kartesisches Koordinatensystem mit Nullpunkt p_i.

Sei nun $p \in F$ ein beliebiger Punkt und $q \in \{p_1, \ldots, p_\nu\}$ ein Punkt, so daß die Kappe F_p der Höhe h_1 mit Zentrum p ganz in F_q liegt. Wir bezeichnen jetzt zur Unterscheidung den zu T_q senkrechten (ins Innere von F weisenden) Einheitsvektor mit e_q und die in $D_q = \Pi_q F_q$ erklärte Darstellungsfunktion von F_q mit z^q. Analog seien e_p, z^p und $D_p = \Pi_p F_p$ erklärt. Wir wählen in T_p ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem mit Nullpunkt p.

Da z^q dreimal stetig differenzierbar und D_q kompakt ist, gibt es eine Konstante c_0 mit

$$|z_i^q(x)| \leqq c_0, \quad |z_{ij}^q(x)| \leqq c_0, \quad |z_{ijk}^q(x)| \leqq c_0 \tag{8}$$

für alle $x \in D_q$. Diese Konstante kann einheitlich für die endlich vielen Kappen $F_{p_1}, \ldots, F_{p_\nu}$ gewählt werden.

Für $x \in D_p$ setzen wir

$$y := x + z^p(x)\, e_p \quad \text{und} \quad \varphi(x) = y' := \Pi_q y.$$

Dann ist φ eine injektive Abbildung von D_p in T_q. Sei ψ die Umkehrabbildung. Sie ist wegen

$$x = y - \langle e_p, y - p \rangle\, e_p$$

(wo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet) und

$$y = y' + z^q(y')\, e_q \tag{9}$$

explizit gegeben durch

$$\psi(y') = y' + z^q(y')\, e_q - \langle e_p, y' + z^q(y')\, e_q - p \rangle\, e_p$$

und somit von der Klasse C^3. Aus (8) folgt, daß die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen der Abbildung ψ bis zur dritten Ordnung dem Betrage nach abgeschätzt werden können durch eine Konstante, die nur von c_0 abhängt. Betrachtet man im Definitionsbereich von ψ eine meßbare Menge vom $(n-1)$-dimensionalen Maß μ, so sieht man leicht, daß ihre Bildmenge unter ψ ein Maß $\geqq \mu/\cos\alpha$ hat (vgl. Definition der Kappen). Die Funktionaldeterminante der Abbildung ψ (bezüglich der in T_q und T_p gegebenen kartesischen Koordinatensysteme) ist also dem Betrage nach $\geqq 1/\cos\alpha$. Jetzt folgt, daß die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen der Umkehrabbildung φ bis zur dritten Ordnung dem Betrage nach durch eine Konstante abgeschätzt werden können, die nur von c_0 und α abhängt.

Wegen

$$z^p(x) = \langle e_p, y - p\rangle$$

und (9) ist

$$z^p(x) = \langle e_p, \varphi(x) + z^q(\varphi(x))\, e_q - p\rangle.$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion z^p bis zur dritten Ordnung können also ebenfalls abgeschätzt werden durch eine Konstante c, die nur von c_0 und α abhängt. Im folgenden können wir also die Ungleichungen (7) benutzen, wenn nur z Darstellungsfunktion einer Kappe der Höhe $\leqq h_1$ ist.

Sei jetzt $0 < \lambda < 1$ vorgegeben. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $p \in F$ und dazu eine Kappe F_p der Höhe h_1. O.B.d.A. nehmen wir an, daß p der Nullpunkt 0 des $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $D = \Pi_p F_p$ und z die auf D definierte Darstellungsfunktion der Kappe F_p. Im übrigen wählen wir alle Bezeichnungen so wie vor der Formulierung des Hilfssatzes. Es ist

$$b_{ij}(x) = \frac{z_{ij}(x)}{\sqrt{1 + \sum z_k(x)^2}} \qquad \text{für } x \in D.$$

Definieren wir Funktionen h_{ij} durch

$$z_{ij}(x) = z_{ij}(0) + h_{ij}(x) \qquad \text{für } x \in D,$$

so gilt nach dem Mittelwertsatz

$$|h_{ij}(x)| \leqq c_1 \, \|x\| \qquad \text{für } x \in D$$

mit einer Konstanten c_1, die wegen (7) nur von c_0 abhängt. Ferner definieren wir Funktionen k_{ij} durch

$$b_{ij}(x) = z_{ij}(0) + k_{ij}(x) \qquad \text{für } x \in D.$$

Wegen $z_k(0) = 0$ ergibt sich dann für $x \in D$

$$\begin{aligned} |k_{ij}(x)| &= \left| z_{ij}(0) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sum z_k(x)^2}} - 1 \right) + \frac{h_{ij}(x)}{\sqrt{1 + \sum z_k(x)^2}} \right| \\ &\leqq |z_{ij}(0)| \sum z_k(x)^2 + c_1 \, \|x\| \\ &\leqq c_2 \, \|x\| \end{aligned}$$

mit einer Konstanten c_2, die abhängt von c_0, c_1 und z.B. dem Durchmesser von F.

Die relativen Eigenwerte der Matrix $(b_{ij}(x))$ bezüglich der Matrix $(z_{ij}(0))$ sind die Nullstellen des Polynoms

$$\xi \mapsto \det((1 - \xi)\, z_{ij}(0) + k_{ij}(x)),$$

also die Lösungen einer Gleichung

$$(1 - \xi)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (1 - \xi)^k \frac{a_k(x)}{\det(z_{ij}(0))} = 0,$$

wobei jeder Summand der Summe $a_k(x)$ ein Produkt von k Koeffizienten der Matrix $(z_{ij}(0))$ und $n-1-k$ Koeffizienten der Matrix $(k_{ij}(x))$ ist. Es gilt daher eine Abschätzung

$$\left|\frac{a_k(x)}{\det(z_{ij}(0))}\right| \leqq c_3 \|x\| \qquad \text{für } x \in D$$

mit einer Konstanten c_3, abhängend von c_0, c_2 und einer von p unabhängigen positiven unteren Schranke für $\det(z_{ij}(0))$. Eine solche existiert, da $\det(z_{ij}(0))$ die Gauß-Kronecker-Krümmung von F in p ist und da diese Krümmung auf F positiv und stetig ist. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Nullstellen eines Polynoms von seinen Koeffizienten gibt es eine positive Konstante r_1 (abhängend von λ und c_3) derart, daß für alle $x \in D$ mit $\|x\| \leqq r_1$ die relativen Eigenwerte von $(b_{ij}(x))$ bezüglich $(z_{ij}(0))$ sämtlich $\geqq \lambda$ und $\leqq \lambda^{-1}$ sind. Für $\|x\| \leqq r_1$ ist also (4) erfüllt.

Insbesondere gilt für alle $x \in D$ mit $\|x\| \leqq r_1$

$$\lambda \sum z_{ij}(0)\, \alpha_i \alpha_j \leqq \sum b_{ij}(x)\, \alpha_i \alpha_j \leqq \lambda^{-1} \sum z_{ij}(0)\, \alpha_i \alpha_j \tag{10}$$

für beliebige $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Definieren wir eine Funktion ζ durch

$$z(x) = \tfrac{1}{2} \sum z_{ij}(0)\, x_i x_j + \zeta(x) \qquad \text{für } x \in D, \tag{11}$$

so gilt nach dem Taylorschen Satz

$$|\zeta(x)| \leqq c_4 \|x\|^3 \qquad \text{für } x \in D \tag{12}$$

mit einer positiven Konstanten c_4, die nur von c_0 abhängt. Wir bemerken nun, daß die Eigenwerte der Matrix $(z_{ij}(0))$ gerade die Hauptkrümmungen von F im Punkt p sind und daher zwischen zwei von p unabhängigen positiven Konstanten eingeschlossen werden können. Es ist also

$$c_5 \|x\|^2 \leqq \tfrac{1}{2} \sum z_{ij}(0)\, x_i x_j \leqq c_5^{-1} \|x\|^2 \qquad \text{für } x \in T_p \tag{13}$$

mit einer Konstanten c_5. Wir setzen

$$r_2 = \frac{c_5}{c_4}(1-\lambda). \tag{14}$$

Für $x \in D$ mit $0 < \|x\| \leqq r_2$ gilt dann wegen (13), (14), $\lambda < 1$ und (12)

$$\begin{aligned}(\lambda^{-1}-1)\tfrac{1}{2}\sum z_{ij}(0)\, x_i x_j &\geqq (\lambda^{-1}-1)\, c_5 \|x\|^2 \geqq c_4 \|x\|^3 \geqq \zeta(x) \\ &= z(x) - \tfrac{1}{2}\sum z_{ij}(0)\, x_i x_j\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\tfrac{1}{2}\sum z_{ij}(0)\, x_i x_j &\geqq (1-\lambda)\, c_5 \|x\|^2 \geqq c_4 \|x\|^3 \geqq -\zeta(x) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum z_{ij}(0)\, x_i x_j - z(x),\end{aligned}$$

also

$$2\lambda z(x) \leqq \sum z_{ij}(0)\, x_i x_j \leqq 2\lambda^{-1} z(x). \tag{15}$$

Wir können schließlich eine positive Konstante c_6 unabhängig von p wählen derart, daß jeder Punkt $x \in T_p$ mit $z(x) \leqq c_6$ der Ungleichung

$$\|x\| \leqq r := \operatorname{Min}\{r_1, r_2\}$$

genügt. Nun wählen wir die positive Konstante $h_\lambda < v_6$ so, daß der p-Abstand je zweier Punkte der Menge

$$M_\lambda := \{v \in T_p \colon z(v) \leqq h_\lambda\}$$

kleiner ist als der p-Abstand dieser Menge von der Menge

$$M_6 := \{v \in T_p \colon z(v) = c_6\}.$$

Daß h_λ unabhängig von p gewählt werden kann, leuchtet ein, wenn statt des p-Abstandes der gewöhnliche Abstand genommen wird; wegen der nach (13) gültigen Abschätzung

$$c_5 \|x-p\|^2 \leqq \tfrac{1}{2} \|x-p\|_p^2 \leqq c_5^{-1} \|x-p\|^2$$

ergibt es sich aber auch für den p-Abstand.

Seien nun $x, y \in F$ Punkte mit $h(x,p) \leqq h_\lambda$, $h(y,p) \leqq h_\lambda$. Sei C eine stetig differenzierbare Kurve auf F, die x und y verbindet. Wir nehmen zunächst an, für jeden Punkt q dieser Kurve gelte $h(q,p) \leqq c_6$. Dann gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung

$$u \colon [0,1] \to B_r \qquad \text{mit } B_r := \{x \in T_p \colon \|x\| \leqq r\}$$

mit $u(0) = x^p$ und $u(1) = y^p$ derart, daß die parametrisierte Kurve $t \mapsto u(t) + z(u(t))e$ eine Parametrisierung von C ist. Daher gilt nach (10)

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{II}}(C) &= \int_0^1 \sqrt{\sum b_{ij}(u)\, du_i\, du_j} \geqq \sqrt{\lambda} \int_0^1 \sqrt{\sum z_{ij}(0)\, du_i\, du_j} \\ &= \sqrt{\lambda}\, L_p(u), \end{aligned}$$

wo $L_p(u)$ die Länge der parametrisierten Kurve u in der durch (3) gegebenen Metrik ist. Diese Länge ist nicht kleiner als der p-Abstand von x^p und y^p, also ist

$$L_{\mathrm{II}}(C) \geqq \sqrt{\lambda}\, \|x^p - y^p\|_p. \tag{16}$$

Wenn wir nun zulassen, daß die Flächenkurve C den Bereich $\{q \in F \colon h(q,p) \leqq c_6\}$ verläßt, so gibt es eine Teilkurve C' mit einer Parametrisierung $t \mapsto u(t) + z(u(t))e$, wobei u innerhalb von B_r den Rand von M_λ mit dem Rand von M_6 verbindet. Nach der obigen Überlegung ist $\sqrt{\lambda^{-1}}\, L_{\mathrm{II}}(C')$ nicht kleiner als der p-Abstand der Endpunkte von u, und dieser ist nach der Wahl von h_λ größer als der p-Abstand von x^p und y^p. Die Ungleichung (16) gilt also auch in diesem Fall.

Da C eine beliebige glatte Kurve zwischen x und y war, folgt

$$\delta_{\mathrm{II}}(x,y) \geqq \sqrt{\lambda}\, \|x^p - y^p\|_p, \tag{17}$$

also die linke Ungleichung in (5).

Aus (17) ergibt sich insbesondere im Fall $x=p$

$$\delta_{\mathrm{II}}(y,p)\geqq\sqrt{\lambda}\,\|y^p\|_p=\sqrt{\lambda}\sqrt{\sum z_{ij}(0)\,y_i^p y_j^p}\geqq\lambda\sqrt{2z(y^p)}=\lambda\sqrt{2h(y,p)}$$

nach (15). Dies ist die linke Ungleichung in (6).

Andererseits gilt nach (10) und (15)

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{II}}(x,y)&\leqq\int_0^1\sqrt{\sum b_{ij}((1-t)\,x^p+t\,y^p)\,(y_i^p-x_i^p)\,(y_j^p-x_j^p)}\,dt\\&\leqq\sqrt{\lambda^{-1}}\int_0^1\sqrt{\sum z_{ij}(0)\,(y_i^p-x_i^p)(y_j^p-x_j^p)}\,dt\\&=\sqrt{\lambda^{-1}}\,\|y^p-x^p\|_p,\end{aligned}$$

also die rechte Ungleichung in (5).

Speziell im Fall $x=p$ ergibt sich nach (15)

$$\delta_{\mathrm{II}}(y,p)\leqq\sqrt{\lambda^{-1}}\sqrt{\sum z_{ij}(0)\,y_i^p y_j^p}\leqq\lambda^{-1}\sqrt{2z(y^p)}=\lambda^{-1}\sqrt{2h(y,p)},$$

also die rechte Ungleichung in (6). Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen. □

Wir stellen nun einen Zusammenhang des Approximationsproblems mit Überdeckungen von F durch II-geodätische Kugeln her.

Definition. Zu $\rho>0$ sei $k(F,\rho)$ die kleinste Zahl k derart, daß F durch k II-geodätische Kugeln vom Radius ρ überdeckt werden kann.

Hilfssatz 2. *Ist* $0<\lambda<1$ *und dazu* h_λ *gemäß Hilfssatz* 1 *gewählt, so gilt*

$$k(F,\lambda^{-1}\sqrt{2\varepsilon})\leqq m(F,\varepsilon)\leqq k(F,\lambda\sqrt{2\varepsilon}) \tag{18}$$

für $0<\varepsilon<h_\lambda$.

Beweis. Seien λ und h_λ wie angegeben, sei $0<\varepsilon<h_\lambda$. Es gibt ein der Fläche F einbeschriebenes Polytop P mit $m=m(F,\varepsilon)$ Ecken $x_1,\dots,x_m$, so daß $d(F,\partial P)\leqq\varepsilon$ ist. Sei $p\in F$. Da die zur Tangentialebene T an F in p parallele Hyperebene im Abstand ε, die F trifft, das Polytop P treffen muß, gibt es einen Index i mit $h(x_i,p)\leqq\varepsilon$. Nach Hilfssatz 1 ist

$$\delta_{\mathrm{II}}(x_i,p)\leqq\lambda^{-1}\sqrt{2h(x_i,p)}\leqq\lambda^{-1}\sqrt{2\varepsilon},$$

also ist p enthalten in der II-geodätischen Kugel um x_i mit Radius $\lambda^{-1}\sqrt{2\varepsilon}$. Da $p\in F$ beliebig war, bilden die II-geodätischen Kugeln um $x_1,\dots,x_m$ mit Radius $\lambda^{-1}\sqrt{2\varepsilon}$ eine Überdeckung von F. Dies beweist die linke Ungleichung in (18).

Nun setzen wir $\rho=\lambda\sqrt{2\varepsilon}$ und überdecken F durch $k=k(F,\rho)$ II-geodätische Kugeln vom Radius ρ. Seien $x_1,\dots,x_k$ ihre Mittelpunkte, und sei P die konvexe Hülle dieser Punkte. Wir behaupten

$$d(F,\partial P)\leqq\varepsilon. \tag{19}$$

Angenommen, das wäre falsch. Sei $p \in F$ ein Punkt mit maximalem Abstand von P. Ist q der zu p nächste Punkt in P, so ist die zu $q-p$ orthogonale Hyperebene H durch q eine Stützebene an P (siehe McMullen-Shephard [3], S. 33). Da kein Punkt von F größeren Abstand von P hat als der Punkt p, ist die Tangentialebene T an F in p parallel zu H. Der Abstand von H und T ist größer als ε, also gilt $h(x_i, p) > \varepsilon$ für $i=1, \ldots, k$. Nach Wahl der Punkte $x_1, \ldots, x_k$ gibt es einen Index i mit $\delta_{\mathrm{II}}(x_i, p) \leqq \rho$. Da jede glatte Kurve auf F, die p mit x_i verbindet, wenigstens einen Punkt y mit $h(y,p)=\varepsilon$ enthält, gilt nach Hilfssatz 1

$$\rho \geqq \delta_{\mathrm{II}}(x_i, p) > \delta_{\mathrm{II}}(y, p) \geqq \lambda \sqrt{2h(y,p)} = \lambda \sqrt{2\varepsilon} = \rho.$$

Dieser Widerspruch zeigt die Richtigkeit von (19). Da $k(F, \lambda\sqrt{2\varepsilon})$ die Eckenzahl des Polytops P ist, folgt die rechte Ungleichung in (18). □

Der nächste Hilfssatz bezieht sich auf Überdeckungen von Teilmengen des euklidischen Raumes durch kleine Kugeln. Er dürfte allgemein bekannt sein. Da er jedoch anscheinend nirgends explizit ausgesprochen ist, geben wir einen Beweis.

Für eine beschränkte Menge M im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ und für $\rho > 0$ bezeichnen wir mit $K(M, \rho)$ die kleinste Zahl k derart, daß M durch k Kugeln vom Radius ρ überdeckt werden kann. V bezeichne das Volumen im $\mathbb{R}^n$.

Hilfssatz 3. *Für jede beschränkte quadrierbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lim_{\rho \to 0+} K(M, \rho)\, \kappa_n \rho^n = \vartheta_n V(M).$$

Beweis. Sei $0 < \lambda < 1$ vorgegeben. Wie man leicht sieht, gibt es eine Zahl $\gamma > 0$ derart, daß zu jedem $\beta \geqq \gamma$ im $\mathbb{R}^n$ ein Würfel W der Kantenlänge β existiert, der durch Einheitskugeln überdeckt werden kann, für deren Anzahl μ die Abschätzung

$$\mu \kappa_n \beta^{-n} < \lambda^{-1} \vartheta_n$$

gilt. Die quadrierbare Menge M läßt sich überdecken durch ν Würfel $W_1, \ldots, W_\nu$ einer Kantenlänge α mit

$$\nu \alpha^n < \lambda^{-1} V(M).$$

Sei nun $0 < \rho \leqq \alpha/\gamma$. Wir setzen $\beta := \alpha/\rho$ und bestimmen dazu W und μ wie oben. Jeder Würfel W_i kann überdeckt werden durch μ Kugeln vom Radius $\alpha/\beta = \rho$, also kann M überdeckt werden durch $\nu\mu$ solche Kugeln. Es folgt $K(M, \rho) \leqq \nu\mu$, also

$$K(M, \rho)\, \kappa_n \rho^n < \lambda^{-2} \vartheta_n V(M) \tag{20}$$

für $\rho \leqq \alpha/\gamma$.

Andererseits können wir in die Menge M Würfel $W_1, \ldots, W_\kappa$ einlagern derart, daß sie paarweise einen euklidischen Abstand $> 4\delta$ mit einem positiven δ haben und daß

$$\sum_{i=1}^{\kappa} V(W_i) > \lambda V(M)$$

ist. Sei $0<\rho<\delta$ und M überdeckt durch $K(M,\rho)$ Kugeln vom Radius ρ. Sei μ_i die Anzahl dieser Kugeln, die Punkte mit W_i gemeinsam haben. Verschiedene Würfel werden wegen $\rho\leqq\delta$ nicht von derselben Kugel getroffen, daher ist

$$K(M,\rho)\geqq\sum_{i=1}^{\kappa}\mu_i.$$

Ferner gilt

$$\mu_i\kappa_n\rho^n\geqq\vartheta_n V(W_i),$$

denn mit einem Würfel W_i, der dies nicht erfüllt, und seinen überdeckenden Kugeln könnte man eine Kugelüberdeckung des Raumes $\mathbb{R}^n$ einer Dichte $<\vartheta_n$ konstruieren. Es folgt

$$K(M,\rho)\,\kappa_n\rho^n>\lambda\vartheta_n V(M) \tag{21}$$

für $\rho\leqq\delta$.

Aus (20) und (21) ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda\vartheta_n V(M)&\leqq\liminf_{\rho\to 0+}K(M,\rho)\,\kappa_n\rho^n\\&\leqq\limsup_{\rho\to 0+}K(M,\rho)\,\kappa_n\rho^n\leqq\lambda^{-2}\,\vartheta_n V(M).\end{aligned}$$

Da $\lambda<1$ hier beliebig war, folgt die Behauptung von Hilfssatz 3. □

Wir kehren nun wieder zur Fläche F zurück und bezeichnen für eine offene Teilmenge $M\subset F$ mit $A_{\mathrm{II}}(M)$ ihr $(n-1)$-dimensionales Volumen bezüglich der durch die zweite Grundform gegebenen Riemannschen Metrik. Zur Abkürzung sei $A_{\mathrm{II}}(F)=A_{\mathrm{II}}$ gesetzt.

Hilfssatz 4. $\lim_{\rho\to 0+} k(F,\rho)\,\kappa_{n-1}\rho^{n-1}=\vartheta_{n-1}A_{\mathrm{II}}.$

Beweis. (Eine entsprechende Aussage dürfte allgemein für kompakte Riemannsche Räume gelten; es ist jedoch bequem, die im vorliegenden Spezialfall gegebenen Vereinfachungen auszunutzen.)

Sei $0<\lambda<1$ gegeben. Dazu sei die Konstante h_λ gemäß Hilfssatz 1 bestimmt. Sei jetzt zunächst $p\in F$ ein fester Punkt. Sei F_p die Kappe der Höhe $h_\lambda/2$ mit Zentrum p und $D:=\Pi_p F_p$; z sei die auf D definierte Darstellungsfunktion von F_p. Auch die weiteren Bezeichnungen seien wie früher gewählt. Ferner nehmen wir o.B.d.A. an, daß p der Nullpunkt des $\mathbb{R}^n$ ist. In dem Unterraum T_p führen wir die durch das Skalarprodukt (3) gegebene euklidische Metrik ein. Für $M'\subset D$ bezeichne $A_p(M')$ das $(n-1)$-dimensionale Volumen von M' bezüglich dieser Metrik.

Sei nun $\emptyset\neq M\subset F_p$ eine offene Teilmenge und $M'=\Pi_p M$ quadrierbar bezüglich T_p. Wir behaupten, daß

$$\lambda^{(n-1)/2}\leqq\frac{A_{\mathrm{II}}(M)}{A_p(M')}\leqq\lambda^{(1-n)/2} \tag{22}$$

ist. Für die relativen Eigenwerte $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$ der Matrix $(b_{ij}(x))$ mit $x\in D$ gilt nach Hilfssatz 1

$$\lambda\leqq\xi_i\leqq\lambda^{-1}\qquad\text{für } i=1,\dots,n-1.$$

Aus

$$\frac{\det(b_{ij}(x))}{\det(z_{ij}(0))} = \xi_1 \dots \xi_{n-1},$$

$$A_{\mathrm{II}}(M) = \int\limits_{M'} \sqrt{\det(b_{ij}(x))}\, dx_1 \dots dx_{n-1},$$

$$A_p(M') = \int\limits_{M'} \sqrt{\det(z_{ij}(0))}\, dx_1 \dots dx_{n-1}$$

folgt die Behauptung (22).

Nach Hilfssatz 3 gibt es eine Zahl $c_7 > 0$ (abhängend von M') mit

$$\lambda < \frac{K(M',\rho)\,\kappa_{n-1}\,\rho^{n-1}}{\vartheta_{n-1} A_p(M')} < \lambda^{-1} \tag{23}$$

für $0 < \rho \leqq c_7$. Hierbei bezieht sich $K(M',\rho)$ auf die durch (3) in T_p gegebene Metrik!

Sei $0 < \rho \leqq c_7$, und sei $K(M',\rho) = \mu$ gesetzt. Wir überdecken M' durch Kugeln (bezüglich (3)) $B'_1, \dots, B'_\mu$ vom Radius ρ. Sei x'^s der Mittelpunkt der Kugel B'_s, sei $x^s := x'^s + z(x'^s)e$ und B_s in F die II-geodätische Kugel um x^s mit Radius $\sqrt{\lambda^{-1}}\,\rho$. Sei $y \in M$ ein beliebiger Punkt und $y' = \Pi_p y$. Es gibt eine Kugel B'_s mit $y' \in B'_s$. Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\delta_{\mathrm{II}}(y, x^s) \leqq \sqrt{\lambda^{-1}}\, \|y' - x'^s\|_p \leqq \sqrt{\lambda^{-1}}\, \rho,$$

also $y \in B_s$. Somit bilden die Kugeln $B_1, \dots, B_\mu$ eine Überdeckung von M.

Umgekehrt seien (immer noch für $\rho \leqq c_7$) $B_1, \dots, B_\nu$ II-geodätische Kugeln vom Radius $\sqrt{\lambda}\,\rho$ in F, die M überdecken. O.B.d.A. (notfalls verkleinere man c_7) liegen diese Kugeln in der Kappe der Höhe h_λ mit Zentrum p, so daß die Abschätzungen aus Hilfssatz 1 herangezogen werden können. Sei x'^s das Bild unter Π_p des Mittelpunktes x^s von B_s. Sei $y' \in M'$ ein beliebiger Punkt und $y := y' + z(y')e$. Es gibt ein s mit $y \in B_s$. Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\sqrt{\lambda}\,\rho \geqq \delta_{\mathrm{II}}(y, x^s) \geqq \sqrt{\lambda}\, \|y' - x'^s\|_p.$$

Der Punkt y' ist also enthalten in der Kugel B'_s (bezüglich der durch (3) gegebenen Metrik) mit Mittelpunkt x'^s und Radius ρ. Somit bilden die Kugeln $B_1, \dots, B_\nu$ eine Überdeckung von M'. Es ist also

$$\nu \geqq K(M',\rho). \tag{24}$$

Wir können nun in F endlich viele Punkte $p_1, \dots, p_m$ und offene Mengen $M_1, \dots, M_m$ finden, so daß folgendes gilt: $p_i \in M_i$, für $y \in M_i$ gilt $h(y, p_i) \leqq h_\lambda/2$ ($i = 1, \dots, m$), die Mengen $M_1, \dots, M_m$ sind paarweise disjunkt, ihre abgeschlossenen Hüllen überdecken F, insbesondere ist

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\mathrm{II}}(M_i) = A_{\mathrm{II}}, \tag{25}$$

und jede Menge $\Pi_{p_i} M_i$ is quadrierbar bezüglich T_p.

Wir können die oben gewählte Zahl c_7 so wählen, daß sie für alle Mengen $M_1, \ldots, M_m$ dasselbe leistet wie für M. Sei jetzt $0<\rho \leqq c_7$. Die (erste) obige Konstruktion ergibt dann für jede Menge M_i eine Überdeckung durch μ_i II-geodätische Kugeln vom Radius $\sqrt{\lambda^{-1}}\,\rho$. Nach (23) (wo $M' = \Pi_p M_i$ und $K(M',\rho)=\mu_i$ zu setzen ist) und (22) gilt

$$\mu_i \kappa_{n-1} \rho^{n-1} < \lambda^{-(n+1)/2} \vartheta_{n-1} \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(M_i).$$

Insgesamt überdecken diese Kugeln ganz F. Daher ist

$$k(F, \sqrt{\lambda^{-1}}\,\rho)\,\kappa_{n-1}\,\rho^{n-1} \leqq \sum_{i=1}^{m} \mu_i \kappa_{n-1}\,\rho^{n-1} \leqq \lambda^{-(n+1)/2}\,\vartheta_{n-1} A_{\mathrm{II}} \tag{26}$$

für $\rho \leqq c_7$, wobei zuletzt (25) benutzt wurde.

Wir ändern nun die oben getroffene Wahl der Mengen $M_1, \ldots, M_m$ dahingehend ab, daß je zwei der Mengen einen II-geodätischen Abstand $\geqq 4\delta$ mit einem $\delta > 0$ haben sollen und daß

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\mathrm{II}}(M_i) > \lambda^{-1} A_{\mathrm{II}} \tag{27}$$

sein soll, während die übrigen noch sinnvollen Forderungen bestehen bleiben. Wir können die oben gewählte Zahl c_7 auch für diese Mengen gemeinsam wählen.

Nun sei $0<\rho \leqq c_8 := \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{Min}\,\{c_7, \delta\}$. Es gibt eine Überdeckung von F durch $k(F, \sqrt{\lambda}\,\rho)$ II-geodätische Kugeln vom Radius $\sqrt{\lambda}\,\rho$. Seien $B_1^i, \ldots, B_{\nu_i}^i$ diejenigen unter diesen Kugeln, die Punkte mit M_i gemeinsam haben. Sie überdecken M_i, also gilt nach (23), (24) und (22)

$$\nu_i \kappa_{n-1}\,\rho^{n-1} > \lambda^{(n+1)/2}\,\vartheta_{n-1} A_{\mathrm{II}}(M_i).$$

Andererseits ist $B_r^i \cap B_s^j = \emptyset$ für $i \neq j$ wegen $\sqrt{\lambda}\,\rho < \delta$ und daher

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i \leqq k(F, \sqrt{\lambda}\,\rho),$$

also

$$k(F, \sqrt{\lambda}\,\rho)\,\kappa_{n-1}\,\rho^{n-1} > \lambda^{(n-1)/2}\,\vartheta_{n-1} A_{\mathrm{II}} \tag{28}$$

für $\rho \leqq c_8$, wobei zuletzt (27) benutzt wurde.

Aus (26) und (28) folgt nun

$$\begin{aligned} \lambda^{n-1}\,\vartheta_{n-1} A_{\mathrm{II}} &\leqq \liminf_{\rho\to 0+} k(F,\rho)\,\kappa_{n-1}\,\rho^{n-1} \\ &\leqq \limsup_{\rho\to 0+} k(F,\rho)\,\kappa_{n-1}\,\rho^{n-1} \leqq \lambda^{-n}\,\vartheta_{n-1} A_{\mathrm{II}}. \end{aligned}$$

Mit $\lambda \to 1$ folgt die Behauptung von Hilfssatz 4. $\square$

Nun können wir den Beweis des Satzes zu Ende führen. Aus den Hilfssätzen 2 und 4 folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
&\lambda^{n-1} 2^{(1-n)/2} \kappa_{n-1}^{-1} \vartheta_{n-1} A_{\mathrm{II}} \\
&\quad = \lambda^{n-1} 2^{(1-n)/2} \lim_{\rho \to 0+} k(F,\rho)\, \rho^{n-1} \\
&\quad \leqq \liminf_{\varepsilon \to 0+} m(F,\varepsilon)\, \varepsilon^{(n-1)/2} \\
&\quad \leqq \limsup_{\varepsilon \to 0+} m(F,\varepsilon)\, \varepsilon^{(n-1)/2} \\
&\quad \leqq \lambda^{1-n} 2^{(1-n)/2} \lim_{\rho \to 0+} k(F,\rho)\, \rho^{n-1} \\
&\quad = \lambda^{1-n} 2^{(1-n)/2} \kappa_{n-1}^{-1} \vartheta_{n-1} A_{\mathrm{II}}
\end{aligned}$$

für jedes positive $\lambda < 1$. Mit $\lambda \to 1$ folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} m(F,\varepsilon)\, \varepsilon^{(n-1)/2} = 2^{(1-n)/2} \kappa_{n-1}^{-1} \vartheta_{n-1} A_{\mathrm{II}}.$$

Bezeichnet (g_{ij}) die erste Grundform der Hyperfläche F, so ist

$$\frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = K,$$

also

$$\sqrt{\det(b_{ij})}\, dx_1 \ldots dx_{n-1} = \sqrt{K} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

und somit

$$A_{\mathrm{II}} = \int \sqrt{K}\, dF.$$

Damit ist alles bewiesen.

Literatur

1. Fejes Tóth, L.: Approximation by polygons and polyhedra. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 431–438 (1948)
2. Fejes Tóth, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953
3. McMullen, P., Shephard, G.C.: Convex polytopes and the upper bound conjecture. Cambridge: University Press 1971
4. Rogers, C.A.: Packing and Covering. Cambridge: University Press 1964

Eingegangen am 11. April 1980