

Über elliptisch-konvexe Ovale.*)

Von

PAUL BÖHMER in Berlin.

Abschnitt I.

Formulierung des Theorems.

1. Es sei $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer analytischen Kurve (M), die ein konvexes Oval bildet, und es sei ferner φ der Winkel der äußeren Normale gegen die X -Achse. Es werde weiter mit ρ der durchweg positiv gerechnete Krümmungsradius von (M) im Punkte x, y bezeichnet; alsdann bestehen für die Punkte von (M) die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi, \\ \frac{dy}{d\varphi} = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

2. Spezialisieren wir die Lage des Koordinatensystems dahin, daß die X -Achse (M) im Punkte $x = 0$ berührt und daher $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ist, so hat der im Koordinatenursprunge (M) fünfpunktig berührende Kegelschnitt (den wir hier kurz den „oskulierenden“ Kegelschnitt nennen wollen) eine Gleichung von der Form

$$(2) \quad y = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).$$

Setzt man $\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho_1$ und $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \rho_2$, so lassen sich die Größen A, B und C durch die Werte ausdrücken, die ρ, ρ_1 und ρ_2 im Oskulationspunkte besitzen; denn differentiiert man (2) viermal nach φ und setzt dann in den vier so entstehenden Gleichungen für x, y und φ bezüglich $0, 0$ und $-\frac{\pi}{2}$

*) Vergl. die Göttinger Inaugural-Dissertation des Verfassers: Über geometrische Approximationen. Berlin 1904. (Gustav Schade).

ein, so verschwindet die erste der vier Gleichungen identisch und aus den drei übrig bleibenden erhält man

$$(2') \quad A = \frac{1}{\varrho}; \quad B = -\frac{\varrho_1}{3\varrho^2}; \quad C = \frac{9\varrho^2 + 5\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2}{9\varrho^3}.$$

3. Erteilt man C statt des vorstehenden Wertes eine stetige Folge von reellen Werten, so liefert die Gleichung (2) eine einfache Schar von Kegelschnitten, die mit (M) die Tangente und die Größen ϱ und ϱ_1 gemein haben, und daher (M) im Nullpunkte vierpunktig berühren; unter ihnen gibt es eine einzige Parabel, die durch das Verschwinden der Determinante $AC - B^2$ bestimmt ist, während $AC - B^2 > 0$ den Ellipsen, $AC - B^2 < 0$ den Hyperbeln der Schar zukommt. Bildet man den Ausdruck $AC - B^2$ für (M) , so erhält man

$$(3) \quad \frac{1}{9\varrho^3} (9\varrho^2 + 4\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2) = \frac{P}{9\varrho^3},$$

und es ist der positive oder negative Wert von P das Kriterium dafür, ob der oskulierende Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

4. Wir nennen nun eine Kurve (M) in einem Punkte M *elliptisch* oder *hyperbolisch* gekrümmt, jenachdem für den betreffenden Punkt die Ungleichung

$$P > 0 \quad \text{oder} \quad P < 0$$

gilt, und bezeichnen M als eine *elliptische* oder eine *hyperbolische* Stelle der Kurve.

Wir nennen ferner ein konvexes Oval, das in jedem seiner Punkte elliptisch gekrümmt ist, ein *elliptisch-konvexes Oval*. Dann besteht das Theorem:

Fünf beliebige Punkte eines elliptisch-konvexen Ovals liegen stets auf einer Ellipse.

Abschnitt II.

Das Krümmungsbild.

5. Das Mittel zum Beweise des vorstehenden Theorems liefert uns eine Betrachtung, die wir der persönlichen Mitteilung des Herrn Minkowski verdanken. Es sei wieder $f(x, y) = 0$ die Gleichung eines konvexen Ovals (M) , φ der Winkel der äußeren Normale gegen die X -Achse und

$$(4) \quad q = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

die Gleichung der Tangente an (M) im Punkte (xy) , mithin q der Abstand dieser Tangente vom Nullpunkte; dann ist q eine Funktion von φ und es gilt für den Berührungspunkt die Gleichung

$$\frac{dq}{d\varphi} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi + \frac{dx}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{dy}{d\varphi} \sin \varphi$$

oder gemäß (1)

$$\frac{dq}{d\varphi} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} = -x \cos \varphi - y \sin \varphi - \frac{dx}{d\varphi} \sin \varphi + \frac{dy}{d\varphi} \cos \varphi$$

oder gemäß (1)

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} = -x \cos \varphi - y \sin \varphi + \rho.$$

Berücksichtigt man (4), so erhält man

$$(5) \quad \frac{d^2q}{d\varphi^2} + q = \rho$$

6. Ist nun C_1 ein beliebiger Punkt der Ebene — wir wollen ihn als „Aufpunkt“ bezeichnen —, so trage man von C_1 aus in der Richtung φ die Größe $\rho^{-\frac{1}{3}}$ ab und errichte im Endpunkte ein Lot; dann umhüllt die Gesamtheit aller solcher Lote eine Kurve (M_0), die wir das *Krümmungsbild von (M)* nennen wollen, und von der wir behaupten, daß sie ein *konvexes, den Aufpunkt umschließendes Oval bildet, wenn (M) ein elliptisch-konvexes Oval ist.*

Da nämlich für (M_0)

$$q = \rho^{-\frac{1}{3}}$$

ist, ergibt sich aus (5) für den Krümmungsradius ρ_0 von (M_0) die Gleichung

$$\rho_0 = \rho^{-\frac{1}{3}} + \frac{d^2 \rho^{-\frac{1}{3}}}{d\varphi^2} = \frac{9\rho^2 + 4e_1^2 - 3\rho e_2}{9\rho^{\frac{7}{3}}} = \frac{P}{9\rho^{\frac{7}{3}}}.$$

Da nun ferner, wenn (M) ein elliptisch-konvexes Oval ist, P durchweg positiv ist, gilt dies auch für ρ_0 , d. h. (M_0) bildet ein konvexes Oval, das den Aufpunkt umschließt.

7. *Das Krümmungsbild einer Parabel ist ein Punkt.*

Die Parabel habe die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p},$$

dann ist

$$y' = \frac{x}{p},$$

oder auch, in Übereinstimmung mit den oben getroffenen Bestimmungen,

$$x = -p \operatorname{ctg} \varphi$$

und somit

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{p}{\sin^2 \varphi}.$$

Berücksichtigt man noch Gleichung (1), so folgt

$$\varrho = -\frac{p}{\sin^3 \varphi}.$$

Es wird also

$$q = -\sin \varphi \cdot p^{-\frac{1}{3}},$$

d. h. aber: alle Tangenten des Krümmungsbildes gehen durch einen festen Punkt P_0 , der in der Achsenrichtung vom Aufpunkte in der Entfernung $-p^{-\frac{1}{3}}$ liegt, unter p den Parameter der Parabel verstanden.

8. Hatten wir das Krümmungsbild (M_0) als Tangentengebilde eingeführt, so liefert der eben bewiesene Satz das Mittel, (M_0) als Punktgebilde zu definieren, nämlich als den Ort der Krümmungsbilder der Schmiegungsparabeln von (M) .

Das elliptisch-konvexe Oval (M) werde von der Schmiegungsparabel (P) im Koordinatenursprunge C_1 oskuliert, und es sei das Koordinatensystem so festgelegt, daß die Y -Achse mit der Parabelachse parallel ist. Es sei ferner C_1 als Aufpunkt für die Krümmungsbilder (M_0) von (M) und P_0 von (P) gewählt. Während nun in C_1 die Größen ϱ und ϱ_1 für (M) und (P) gleich sind, und somit der Parallelstrahl durch P_0 zur Tangente an (M) und (P) in C_1 (M_0) berührt, ist, wie sich aus Gleichung (3) ergibt, ϱ_2 von (P) größer als ϱ_2 von (M) , und es ist daher in der Umgebung von C_1 der Krümmungsradius von (P) größer als der (durch gleiches φ) entsprechende von (M) ; dann muß aber jeder Strahl durch P_0 die Kurve (M_0) schneiden, da ja für die Punkte der Umgebung von C_1 die Ungleichung

$$\varrho_P^{-\frac{1}{3}} < \varrho_M^{-\frac{1}{3}}$$

besteht. Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn P_0 auf (M_0) liegt.

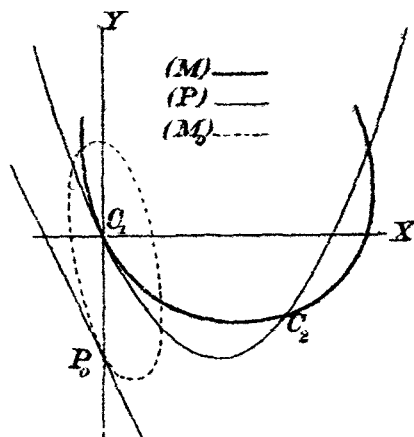


Fig. 1.

Abschnitt III.

Sätze über die Berührungen zwischen einem elliptisch-konvexen
Ovale und einer Parabel.

9. Wir treffen zunächst folgende Bestimmung über die Lage des Koordinatensystems: die Y -Achse möge stets parallel zur Achse der Parabel (P) angenommen werden und der Nullpunkt des Koordinatensystems sowie der Aufpunkt der Krümmungsbilder (M_0) und P_0 in denjenigen Punkt verlegt werden, der als C_1 eingeführt wird.

Satz I. Eine Parabel (P), die (M) in zwei getrennten Punkten C_1 und C_2 zweipunktig berührt, kann mit (M) keinen weiteren Punkt gemein haben.

Den Beweis führen wir in drei Schritten.

a) (P) kann (M) nicht zweimal von innen berühren. Denn nehmen wir das Gegenteil an, so wird sowohl in C_1 wie in C_2 $\varrho_P < \varrho_M$ sein und es müssen die beiden den Punkten C_1 und C_2 entsprechenden Strahlen

durch P_0 ganz außerhalb von (M_0) liegen, da ja $\varrho_P^{-\frac{1}{3}} > \varrho_M^{-\frac{1}{3}}$ ist. Hieraus folgt aber, daß auch für alle Punkte gleichen Winkels zwischen C_1 und C_2

$\varrho_P < \varrho_M$ sein muß. Nun drückt sich aber die Abszisse eines beliebigen Punktes der beiden Kurven (M) und (P) durch die bezüglichen Gleichungen aus:

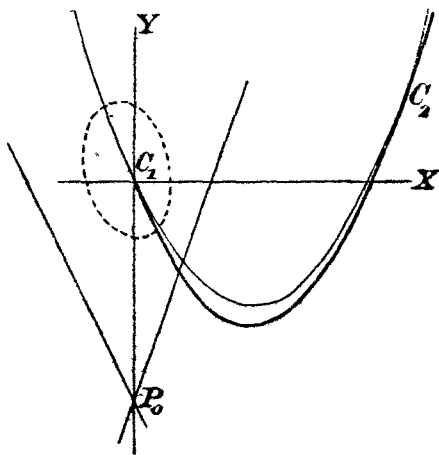


Fig. 2.

$$x_M = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_M} \varrho_M \sin \varphi \, d\varphi; \quad (6)$$

$$x_P = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_P} \varrho_P \sin \varphi \, d\varphi.$$

Da wegen der Wahl des Koordinatensystems $\sin \varphi$ für die Parabel stets negativ ist, können beide Integrale, wenn man φ_2 als

obere Grenze einführt, unmöglich gleich sein; vielmehr muß stets $x_M > x_P$ sein. — Im Falle, daß die Berührung in C_1 oder in C_1 und C_2 dreipunktig ist, gehen die Strahlen durch P_0 in Tangenten an (M_0) über; dann gilt zwar die Ungleichung zwischen den Krümmungsradien für C_1 (bzw. C_1 und C_2) nicht, wohl aber für alle Zwischenwerte und somit wird auch hier der zweite Integralwert kleiner ausfallen als der erste.

b) (P) kann nicht (M) einmal von außen und einmal von innen berühren.

Nehmen wir wieder das Gegenteil als vorliegend an, so haben wir, wenn (P) in C_1 das Oval von innen, in C_2 von außen berührt, noch mindestens *einen* dritten Inzidenzpunkt C_3 . Legen wir durch C_1 eine Parabel (P') , die dieselbe Achsenrichtung wie (P) und einen kleineren Parameter hat, daher also (P) und folglich auch (M) von innen berührt, so löst sich, wenn wir dem Parameter von (P') eine stetige Folge abnehmender Werte erteilen, C_2 in zwei Schnittpunkte auf, von denen der eine C_2' auf C_3 zuwandert, und es wandert gleichzeitig C_3 gegen C_2' hin; es existiert daher auch eine Parabel, die (M) zweimal von innen berührt, womit der Satz auf den voraufgehenden zurückgeführt ist.

c) (P) kann (M) nicht zweimal von außen berühren und außerdem noch treffen.

Wenden wir dasselbe Verfahren wie soeben an, so verursacht das Auftreten des inneren Berührungspunktes von (P) und (M) einen Widerspruch mit a) oder b). Damit ist aber Satz I erwiesen.

10. Satz II. (P) kann nicht (M) oskulieren und außerdem noch schneiden oder berühren.

Wie wir oben (vergl. Nr. 8 und Fig. 1) sahen, liegt P_0 auf (M_0) , und es ist für alle von φ_1 verschiedenen Werte von $\varphi: \varrho_P > \varrho_M$. Angenommen nun, (P) schneide oder berühre noch einmal (M) und zwar im Punkte C_2 , dann wäre $\varphi_2(P) \geq \varphi_2(M)$. Nun gelten für die Abszissen der Punkte von (P) und (M) wieder die Gleichungen (6); führen wir als obere Grenzen die Winkel des Schnittpunktes C_2 ein, zerlegen das erste Integral in zwei positive Bestandteile:

$$x_P = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2(M)} \varrho_P \sin \varphi d\varphi - \int_{\varphi_2(M)}^{\varphi_2(P)} \varrho_P \sin \varphi d\varphi; \quad x_M = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2(M)} \varrho_M \sin \varphi d\varphi$$

und berücksichtigen ferner, daß hierin für jedes beliebige φ mit Ausnahme von φ_1 die Ungleichung $\varrho_P > \varrho_M$ besteht, so erkennen wir, daß schon der erste Bestandteil von x_P größer als x_M ist.

11. Satz III. Eine Parabel (P) , die (M) in C_1 dreipunktig berührt, kann mit (M) nicht mehr als einen weiteren Schnittpunkt gemein haben.

Angenommen, (P) träte, in positivem Sinne durchlaufen, bei C_1 aus (M) heraus und hätte auf dem austretenden Aste einen Schnittpunkt C_2 mit (M) , wo sie wieder in (M) eintritt, dann muß der Parallelstrahl durch P_0 zur Tangente an (M) in C_1 die Kurve (M_0) berühren und zwar so, daß alle Strahlen durch P_0 mit größerem φ (M_0) schneiden. Daraus folgt aber in analoger Weise wie bei Satz II die Integralungleichung und die Unmöglichkeit eines Schnittpunktes C_2 .

Daß ferner (P) auf dem eintretenden Aste nicht mehr als einen Schnittpunkt mit (M) haben kann, läßt sich aus der Betrachtung einer

Schar von Parabeln ableiten, die so, wie es in Nr. 9, c) angegeben ist, durch C_1 gelegt werden. Die Annahme von (mindestens) drei weiteren Schnittpunkten ergäbe dann die Existenz einer Parabel, die (M) zweimal berührt und außerdem schneidet, was gegen Satz I verstößt.

Abschnitt IV.

Beweis des Theorems.

12. Wir führen den Beweis des in Nr. 4 angekündigten Theorems mit Hilfe folgender Überlegung: Angenommen, man könnte fünf Punkte von (M) so auswählen, daß sie auf einer Hyperbel liegen, so lassen sich auch stets fünf Punkte bestimmen, die auf einer Parabel liegen, da man ja bei hinreichend nahem Zusammenrücken irgend welcher fünf Punkte von (M) zu Ellipsen gelangt. *Das Theorem wird also bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben, daß fünf Punkte von (M) nie auf einer Parabel liegen können, oder daß eine Parabel mit einem elliptisch-konvexen Oval nicht mehr als vier Punkte gemein haben kann.*

13. Aus den drei Sätzen des vorigen Abschnitts ergibt sich, daß mehr als vier Inzidenzpunkte von (M) und (P) nur dann auftreten können, entweder wenn (P) einmal (M) 2-punktig berührt (in C_1) und noch vier (oder mehr) getrennte Schnittpunkte mit (M) hat, oder wenn (P) das Oval (M) in sechs (oder mehr) getrennten Punkten schneidet. Für beide Fälle läßt sich durch Betrachtung der Parabelschar analog Nr. 9, c) der Unmöglichkeitbeweis führen; denn im ersten Falle muß es unter den Parabeln der durch C_1 gelegten Schar eine geben, die bei gleicher Gesamtzahl von Inzidenzen (M) berührt, was dem Satze I widerspricht; und im zweiten Falle wird es, wenn man einen ganz beliebigen Punkt von (P) zum gemeinsamen Punkte der Schar wählt, stets eine Parabel geben, die bei gleicher Gesamtzahl von Inzidenzen (M) berührt, was dem eben Bewiesenen widerspricht.

Damit ist aber die Unmöglichkeit von sechs Inzidenzpunkten zwischen (P) und (M) und folglich auch das angekündigte Theorem bewiesen.

Berlin, im Juni 1904.