

(Aus dem Inst. f. theoret. Physik der Deutschen Karls-Univ. und Techn. Hochsch. in Prag und dem Labor. f. Elektronenoptik Siemens & Halske A. G., Berlin-Siemensstadt.)

Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$.

Von **Walter Glaser** in Prag.

Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 4. Dezember 1940.)

Im folgenden sollen für ein Magnetfeld, welches den in der Praxis bei den hochauflösenden Elektronenmikroskopen verwendeten typischen Verlauf zeigt, die Abbildungsgleichung, die Vergrößerung, die Anzahl der Zwischenbilder, die Farbabweichung und der Öffnungsfehler ohne Vernachlässigungen als Funktion der Systemparameter explizit berechnet und diskutiert werden. Insbesondere sollen der hinsichtlich des Farb- und Öffnungsfehlers günstigste Dingort und Parameterwert bestimmt werden. Ferner soll der Einfluß einer Feldunsymmetrie auf die optischen Konstanten und insbesondere den Farb- und Öffnungsfehler untersucht werden.

I. Allgemeine Integration der Bahngleichung.

Die im Labor. f. Elektronenoptik der Siemens & Halske A. G. in den Objektiven des Übermikroskops empirisch ausgemessenen Magnetfelder ¹⁾ haben längs der Achse meist einen typisch glockenförmigen Verlauf nach Fig. 1 und können daher bei symmetrischem Feldverlauf durch einen Ausdruck der Gestalt

$$H(z) = \frac{H_0}{[1 + (z/a)^2]^\mu} \quad (1)$$

wiedergegeben werden. Der Exponent μ ist dabei so zu bestimmen, daß sich die Kurve (1) dem empirischen Feldverlauf möglichst gut anschließt. Die maximale Feldstärke H_0 in der Feldmitte und die durch die Halbwertsbreite d gemäß

$$d = a \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{2} - 1}} \quad (2)$$

bestimmte „Länge“ a ist so zu wählen, daß Feldmaximum H_0 und die Halbwertsbreite d von (1) mit den entsprechenden Größen des empirischen

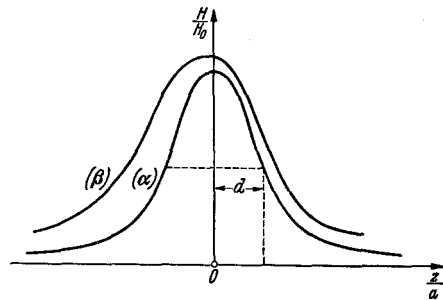


Fig. 1. Typischer Feldverlauf in den Objektiven des Übermikroskops (α) bei symmetrischer, (β) bei unsymmetrischer Polschuhordnung.

¹⁾ Vgl. J. Dosse, ZS. f. Phys., erscheint demnächst.

Feldes übereinstimmen. (Für einen ungekapselten Kreisstrom ist z. B. der Exponent $\mu = 3/2$ zu setzen.)

Die achsennahen Elektronenbahnen, welche allgemein der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{e}{8 m U} H^2(z) r \quad (3)$$

genügen, sind in unserem Falle durch

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{e H_0^2}{8 m U} \frac{r}{[1 + (z/a)^2]^{2\mu}} \quad (4)$$

bestimmt.

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{r}{a}, & x &= \frac{z}{a}, \\ k^2 &= \frac{e H_0^2 a^2}{8 m U} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

erhält sie folgende dimensionslose Gestalt:

$$y'' = -\frac{k^2 y}{(1+x^2)^{2\mu}}. \quad (6)$$

Um sie zu integrieren bzw. auf einen bekannten Typus von Differentialgleichungen zurückzuführen, setze man zunächst

$$x = \operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{somit} \quad dx = -\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \quad \text{und} \quad 1+x^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi};$$

damit erhält man

$$y''(\varphi) + 2 \operatorname{ctg} \varphi \cdot y'(\varphi) + k^2 \sin^{4(\mu-1)} \varphi \cdot y = 0.$$

Durch die weitere Substitution

$$y = e^{-\int \operatorname{ctg} \varphi d\varphi} v(\varphi) = \frac{v(\varphi)}{\sin \varphi} = \sqrt{1+x^2} v(\varphi) \quad (6a)$$

ergibt sich

$$y'' + 2 \operatorname{ctg} \varphi \cdot y' = \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \operatorname{ctg}^2 \varphi \right) e^{-\int \operatorname{ctg} \varphi d\varphi} v(\varphi) + e^{-\int \operatorname{ctg} \varphi d\varphi} v''(\varphi),$$

und wegen

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \operatorname{ctg}^2 \varphi = 1$$

geht somit die Gleichung für $v(\varphi)$ über in

$$v''(\varphi) + (1 + k^2 \sin^{4(\mu-1)} \varphi) v(\varphi) = 0. \quad (7)$$

Diese Gleichung hat die Gestalt

$$v''(\varphi) + J(\varphi) v(\varphi) = 0, \quad (8)$$

wobei $J(\varphi) = 1 + k^2 \sin^{4(\mu-1)} \varphi$ eine periodische Funktion von φ mit der Periode π ist. Damit haben wir die Differentialgleichung der Elektronen-

bahnen auf eine Hillsche Differentialgleichung zurückgeführt, deren Theorie weitgehend entwickelt ist und die in der Astronomie bei der Mondbewegung, in der Elektronentheorie der Metalle und in vielen anderen Gebieten eine wichtige Rolle spielt¹⁾.

Im Falle des Kreisstromes ist $2\mu = 3$, und $J(\varphi)$ kann in der Gestalt

$$J(\varphi) = 1 + \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} k^2 \cos 2\varphi$$

geschrieben werden. Mit den Abkürzungen

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2} k^2, \quad \frac{1}{2} k^2 = h^2 \tag{9}$$

lautet somit die umgeformte Differentialgleichung (7) der Elektronenbahnen

$$v''(\varphi) + (\lambda - h^2 \cos 2\varphi) v(\varphi) = 0. \tag{10}$$

Es hat sich also eine Mathieusche Differentialgleichung ergeben, die auch in anderen Gebieten der Physik auftritt und insbesondere für die Theorie der Schwingungen einer elliptischen Membran grundlegende Bedeutung hat²⁾.

Die allgemeine Anwendung der Theorie der Hillschen Differentialgleichung auf das hier vorliegende Problem wollen wir einer späteren Arbeit vorbehalten. Hier wollen wir uns nur mit einem Sonderfall befassen, welcher jedoch bereits alle typischen Eigenschaften der Abbildung zu erkennen und erstmalig streng zu berechnen gestattet.

II. Der Sonderfall $\mu = 1$.

1. Die Gaußsche Bahn. Besonders einfach wird nämlich die umgeformte Bahngleichung (7) für $\mu = 1$, also für den Feldtypus

$$H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}, \tag{11}$$

welcher in Fig. 2 und 7 dargestellt ist. In diesem Falle wird die Funktion $J(\varphi)$ überhaupt konstant und die Differentialgleichung (7) lautet:

$$v''(\varphi) = - (1 + k^2) v(\varphi). \tag{12}$$

Sie ist somit unmittelbar durch die beiden partikulären Integrale

$$v = \frac{\sin \sqrt{1 + k^2} \varphi}{\cos \sqrt{1 + k^2} \varphi} \tag{13}$$

¹⁾ Vgl. hierzu M. J. O. Strutt, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. (Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete.) Berlin 1932. — ²⁾ M. J. O. Strutt, a. a. O.

zu integrieren. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4) mit $\mu = 1$, also die Elektronenbahnen im Feld (11), lautet daher mit (5) und (6a)

$$y = \sqrt{1+x^2} (C_1 \sin \sqrt{1+k^2} \operatorname{arctg} x + C_2 \cos \sqrt{1+k^2} \operatorname{arctg} x), \quad (14)$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Integrationskonstanten darstellen. Unsere weiteren Betrachtungen wollen wir jedoch an die Gestalt

$$y = \frac{1}{\sin \varphi} (C_1 \sin \sqrt{1+k^2} \varphi + C_2 \cos \sqrt{1+k^2} \varphi) \quad (15)$$

anschließen, indem wir uns stets durch die Gleichung

$$x = \operatorname{ctg} \varphi \quad (16)$$

die Koordinate x auf den Winkel φ umgerechnet denken. Das hat den Vorteil, daß wir für die Variable φ bloß die endlichen Werte zwischen 0

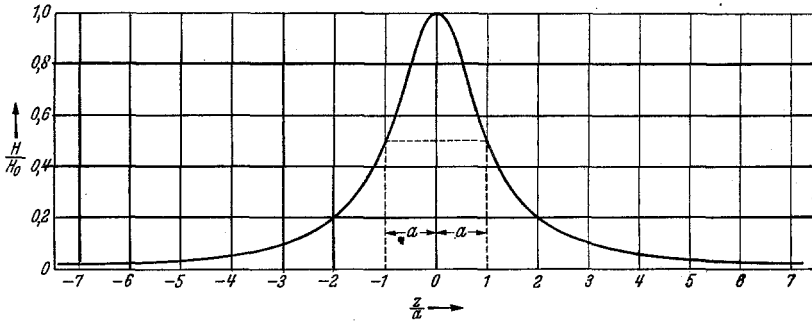


Fig. 2. Feldverlauf gemäß $H = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}$.

und π brauchen, um den ganzen Wertbereich von x zwischen $+\infty$ und $-\infty$ zu erfassen.

Mit zwei anderen Integrationskonstanten C_1, C_2 und der Abkürzung

$$\omega^2 = k^2 + 1 = \frac{e H_0^2 a^2}{8 m U} + 1 \quad (17)$$

können wir das allgemeine Integral in folgender Gestalt schreiben:

$$y = C_1 \frac{\sin \omega (\varphi + C_2)}{\sin \varphi}. \quad (18)$$

Es soll insbesondere ein von rechts einfallender Parallelstrahl betrachtet werden. Dem Werte $x = \infty$ entspricht nach (16) $\varphi = +0$. Damit y für $x = \infty$ ($\varphi = 0$) endlich bleibt, muß daher die Integrationskonstante C_2 Null sein. Damit wird

$$y = C_1 \frac{\sin \omega \varphi}{\sin \varphi} \quad (19)$$

Für die Brennweite f findet man nach Fig. 4 und Gleichung (20) und (22)

$$C_1 \omega = f \operatorname{tg} \alpha = f \left. \frac{dy}{dz} \right|_{\varphi = \varphi_f} = -\frac{f}{a} C_1 \omega \sin n \frac{\pi}{\omega} \cos n \pi,$$

also

$$\boxed{\frac{a}{f} = (-1)^{n-1} \sin n \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}} \quad (25)$$

Die erste Brennweite ist daher durch

$$\boxed{\frac{a}{f} = \sin \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}} \quad (26)$$

gegeben. Die Beziehung (26) zeigt, daß die kleinste Brennweite, die überhaupt erreicht werden kann, gleich der Halbwertsbreite a ist. Sie ergibt sich für den Parameterwert $k^2 = 3$, also für

$$\frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U} = 3. \quad (27)$$

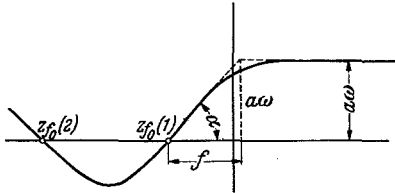


Fig. 4. Zur Bestimmung der Brennweite.

Die zugehörige Brennpunktslage ist nach (24) $z_{f_0} = 0$, d. h. die Feldmitte. Beschränkt man sich auf die Benutzung des ersten Brennpunktes ($n = 1$), so haben Brennweite f/a und Brennpunktslage z_f/a den in Fig. 5 dargestellten Verlauf, der durch die Darstellung der Bahnen in der gleichen Figur und in Fig. 7 noch veranschaulicht wird.

Im weiteren soll der allgemeine Zusammenhang zwischen Ding- und Bildort, also die „Abbildungsgleichung“ hergeleitet werden. Dabei werden sich die obigen Ausdrücke für die Brennpunkte als Sonderfälle ergeben, nämlich als die dem unendlich fernen Bildpunkt entsprechenden Dingpunkte.

Im Anhang wird gezeigt, wie man zur allgemeinen Abbildungsgleichung für krummlinige Elektronenstrahlen gelangt. Sind nämlich $\varrho(z)$ und $\sigma(z)$ zwei beliebige unabhängige Lösungen der Differentialgleichung für die achsennahen Strahlen eines rotationssymmetrischen elektromagnetischen Feldes, so ist der Zusammenhang zwischen Dingort z_0 und Bildort z_1 gegeben durch die Gleichung

$$\varrho(z_0) \sigma(z_1) - \varrho(z_1) \sigma(z_0) = 0. \quad (28)$$

In unserem Falle ist

$$\varrho = C_1 \frac{\sin \omega \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad \sigma = C_2 \frac{\cos \omega \varphi}{\sin \varphi}. \quad (29)$$

(28) erhält daher die Gestalt

$$\sin \omega (\varphi_1 - \varphi_0) = 0,$$

d. h.

$$\varphi_0 - \varphi_1 = n \frac{\pi}{\omega}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (30)$$

φ_1 bestimmt das n -te Bild ($n - 1$ Zwischenbilder). In Fig. 3 kann man sich wieder den Zusammenhang zwischen φ_0 und φ_1 gut veranschaulichen.

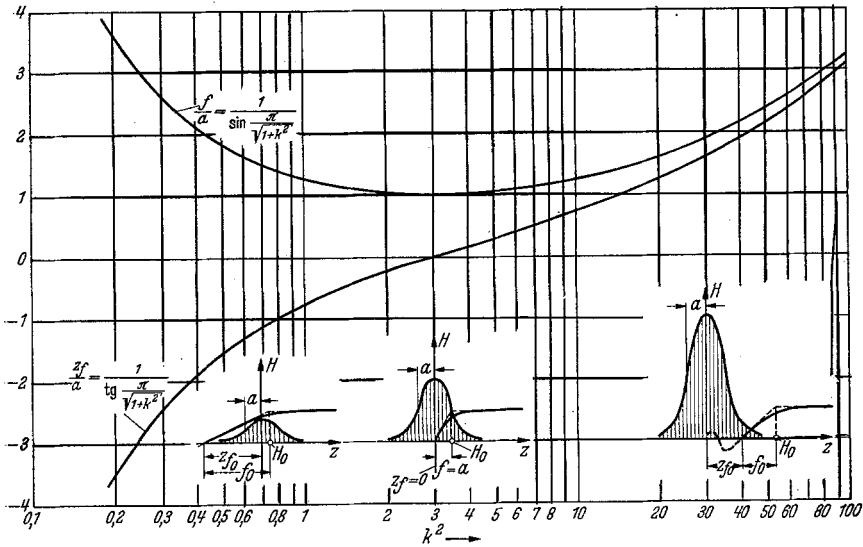


Fig. 5. Brennweite f und Brennpunktslage z_f als Funktion des Systemparameters

$$k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}.$$

Man hat einfach vom Bogen φ_0 den Bogen $\frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}$ n -mal abzutragen, um das n -te Bild zu erhalten. (In der Figur ist $n = 1$.) Führt man nach (21) z statt φ ein, so ergibt sich

$$z_0 = a \operatorname{ctg} \varphi_0 = a \operatorname{ctg} \left(\varphi_1 + n \frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{a \operatorname{ctg} \varphi_1 \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega} - a}{\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit a multipliziert, nach (21)

$$z_0 = \frac{z_1 a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega} - a^2}{z_1 + a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}}.$$

Dies kann man weiter umformen

$$z_0 - a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega} = -a^2 \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 n \frac{\pi}{\omega}}{z_1 + a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}},$$

oder

$$\left(z_0 - a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}\right) \left(z_1 + a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{a^2}{\sin^2 n \frac{\pi}{\omega}}.$$

Setzt man daher

$$\boxed{z_{f_0} = a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}, \quad z_{f_1} = -a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}, \quad f_0 = \frac{a}{\sin n \frac{\pi}{\omega}}, \quad f_1 = -\frac{a}{\sin n \frac{\pi}{\omega}}}, \quad (31)$$

und weiter

$$\boxed{Z_1 = z_1 - z_{f_1}, \quad Z_0 = z_0 - z_{f_0}}, \quad (32)$$

so gilt zwischen Z_0 und Z_1 , d. h. den auf die entsprechenden Brennpunkte bezogenen Ding- und Bildkoordinaten die Beziehung:

$$\boxed{Z_0 Z_1 = f_0 f_1}. \quad (33)$$

2. Die Vergrößerung. Wir kommen nun zur Bestimmung der Vergrößerung V . Wie im Anhang gezeigt wird, ist diese durch zwei beliebige Elektronenbahnen $\varrho(z)$ und $\sigma(z)$ auf folgende Art gegeben:

$$V = \frac{\sigma(z_1)}{\sigma(z_0)}. \quad (34)$$

In unserem Falle ist daher die Vergrößerung im n -ten Bildpunkt nach (29) durch

$$V_n = \frac{\cos \omega \varphi_1 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_1 \cos \omega \varphi_0} \quad (34 a)$$

bestimmt. Wenn man aus (30) einsetzt, erhält man

$$V_n = \frac{\cos(\omega \varphi_0 - n\pi) \sin \varphi_0}{\sin\left(\varphi_0 - n \frac{\pi}{\omega}\right) \cos \omega \varphi_0} = (-1)^n \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos n \frac{\pi}{\omega} - \cos \varphi_0 \sin n \frac{\pi}{\omega}}.$$

Wenn man weiter im Nenner $\sin n \frac{\pi}{\omega}$ heraushebt und aus (21) einsetzt:

$$V_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{z_0 - a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}} \cdot \frac{a}{\sin n \frac{\pi}{\omega}}.$$

Auf Grund von (31) und (32) ergibt sich somit

$$\boxed{V_n = (-1)^{n-1} \frac{f_0}{Z_0} = (-1)^{n-1} \frac{Z_1}{f_1}}. \quad (35)$$

Die Vergrößerung im ersten Bild ($n = 1$) ist also

$$V = \frac{f_0}{Z_0} = \frac{Z_1}{f_1}, \quad (36)$$

wobei die Größen Z_0, Z_1, f_0 und f_1 durch die Gleichungen (31), (32) und (21) bestimmt sind. Auf Grund von (24) und (26) gilt für alle k^2 -Werte $|f| > |z_f|$, d. h. die beiden Hauptebenen liegen überschlagen, wie übrigens in einer experimentellen Untersuchung von E. Ruska schon 1934 festgestellt worden ist¹⁾.

Es hat sich somit die überraschende Tatsache ergeben, daß auch in diesem allgemeinen Falle eines vollkommen krummlinigen Strahlenganges, wo also Ding- und Bildstrahl gar nicht voneinander unterschieden werden können und daher auch nicht so wie in der gewöhnlichen Optik eine Geradenzuordnung darstellen, trotzdem die Abbildungsgleichungen (33) und (36) der gewöhnlichen Optik gelten. Durch (36) sind auch die Hauptebenen als konjugierte Ebenen mit der Vergrößerung 1 bestimmt und es läßt sich damit auch die bekannte Listingsche Bildkonstruktion nach Fig. 6 A und B mittels der geradlinigen (fiktiven) Hauptstrahlen I und II übertragen, obwohl diese beiden geradlinigen Hauptstrahlen mit dem tatsächlichen krummlinigen Strahlengang (durch die gestrichelten Linien angedeutet) außer den Schnittpunkten gar nichts gemeinsam haben, und der gesamte Feldeinfluß kann so innerhalb des Bereiches der Gaußschen Dioptrik durch die beiden Hauptebenen und Brennpunkte ersetzt werden. Für die Koordinaten der Hauptpunkte ergibt sich aus (31), (32) und (36) ($V = 1$)

$$z_{H_0} = a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\sqrt{k^2 + 1}}, \quad z_{H_1} = -a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (36 a)$$

Die Werte z_{H_0}/a sind in Tabelle 1 angegeben und in Fig. 6 A in ihrer Abhängigkeit von k^2 kurvenmäßig dargestellt.

Hier erhebt sich sogleich folgende Frage: Ist das Feld (11) das einzige, für welches im ganzen Bereich die Linsengleichung und Vergrößerungsformel der gewöhnlichen Optik streng gilt, oder gibt es noch andere Felder mit dieser Eigenschaft? Mathematisch heißt dies: Für welche Felder $H(z)$ von (3) besteht zwischen den aufeinanderfolgenden Nullstellen der zugehörigen Bahnkurven ein projektiver Zusammenhang? Da eine derartige Abbildung durch drei Angaben, nämlich die Brennweite und die Lage der

¹⁾ E. Ruska, ZS. f. Phys. 89, 90 ff., 1934.

beiden Brennpunkte bestimmt ist, hat die durch ein derartiges Feld bestimmte Abbildung die physikalische Eigenschaft, daß man die ganze Abbildung für alle beliebigen Punkte kennt, wenn man sie für drei Punkte bestimmt hat. Die Aufgabe ist nun die, daß man der Gestalt des Feldes $H(z)$

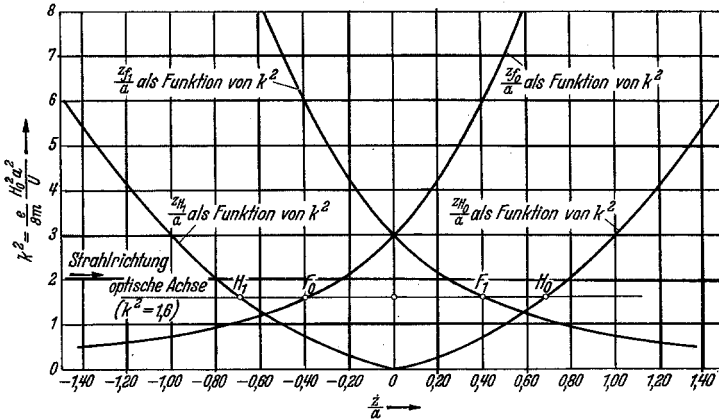


Fig. 6 A. Haupt- und Brennpunktlagen als Funktion des Systemparameters k^2 .

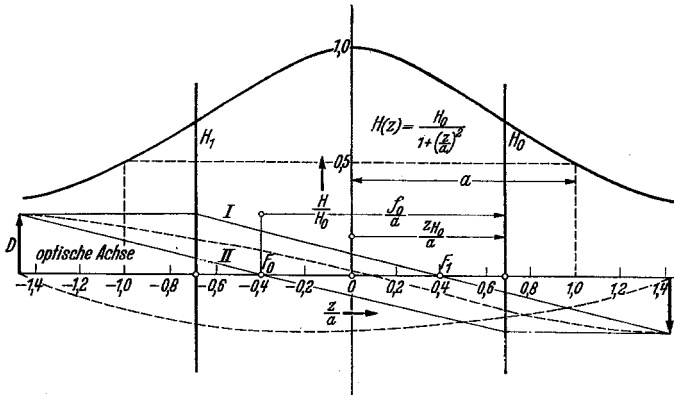


Fig. 6 B. Die Listingsche Bildkonstruktion mittels Brennpunkten und Hauptebenen für $k^2 = 1,6$.

unmittelbar ansehen kann, ob die durch sie vermittelte Abbildung diese Eigenschaft hat oder nicht. In einer demnächst erscheinenden Arbeit von Lammell und dem Verfasser sollen alle elektrischen und magnetischen Felder, für welche die gewöhnliche Abbildungs- und Vergrößerungsgleichung gilt, angegeben werden.

3. Die Zahl der Zwischenbilder. Wir wollen nun noch die Zahl der Zwischenbilder als Funktion des Parameters k^2 bestimmen. Wie aus dem obigen hervorgeht, kommt alles auf die Größe des Winkels

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}} = \pi \left(1 + \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U} \right)^{-1/2} \quad (37)$$

an. Nach Fig. 3 hat man den Winkel φ_0 , der dem Dingpunkt entspricht, immer um π/ω zu verkleinern oder zu vergrößern, um das entsprechende Bild zu erhalten. Man erkennt daraus: Führt die Verkleinerung (Vergrößerung) von φ_0 um den Winkel π/ω zu Null (π), so liegt das Bild im Unendlichen und φ_0 wäre der Brennpunkt. In diesem Falle ist π/ω in φ_0 ($\pi - \varphi_0$) einmal enthalten. Ist π/ω in φ_0 ($\pi - \varphi_0$) N -mal enthalten, oder genauer: ist $\frac{\varphi_0 \omega}{\pi} \left(\frac{\pi - \varphi_0}{\pi} \omega \right)$ größer als die ganze Zahl N und kleiner als die ganze Zahl $N + 1$, so erhält man N Bilder; ist $\frac{\varphi_0 \omega}{\pi} \left(\frac{\pi - \varphi_0}{\pi} \omega \right)$ gerade gleich N , so ergeben sich $N - 1$ Bilder im Endlichen (da das eine im Unendlichen liegt). Der unendlichferne Punkt ($\varphi_0 = 0$) hat somit N Bilder (Brennpunkte), wenn $N < \omega < N + 1$, oder

$$(N + 1)(N - 1) < \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U} < (N + 2)N. \quad (38)$$

Liegt daher $\omega = \sqrt{1 + k^2}$ zwischen 1 und 2, so treten nur einfache Bilder auf. Es ist also

$$0 < \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U} < 3 \quad (39)$$

die Bedingung dafür, daß nur einfache Bilder auftreten. Diese Bedingung (39) ist bis jetzt in der Praxis immer erfüllt.

4. Die Buschsche Näherungsformel für die Brennweite. Zur Veranschaulichung des Vorgetragenen sind in Fig. 7 einige Elektronenbahnen mit der Einfallshöhe 1 für die Parameterwerte $\omega = 1,1$; $\omega = 1,3$; $\omega = 1,6$; $\omega = 2$; $\omega = 2,5$; $\omega = 3$ und $\omega = 3,5$ nach der Formel

$$y = \frac{1}{\omega} \frac{\sin \omega \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = \text{ctg} \varphi \quad (40)$$

von Dosse gezeichnet worden. Zusammenfassend können wir nochmals feststellen: Um die gefundenen Beziehungen der Gaußschen Dioptrik für ein empirisch ausgemessenes Feld zu benutzen, müssen wir den Feldmessungen die Halbwertsbreite a und die maximale Feldstärke bzw. Induktion H_0 in der Feldmitte entnehmen. Mit der bekannten Beschleunigungs-

spannung U können wir also den Parameterwert k^2 nach (5) berechnen, welchen wir in die Formeln (23), (24), (26) und (31) einzusetzen haben. Die auf diese Weise bestimmten k^2 -Werte liegen derzeit bei den starken

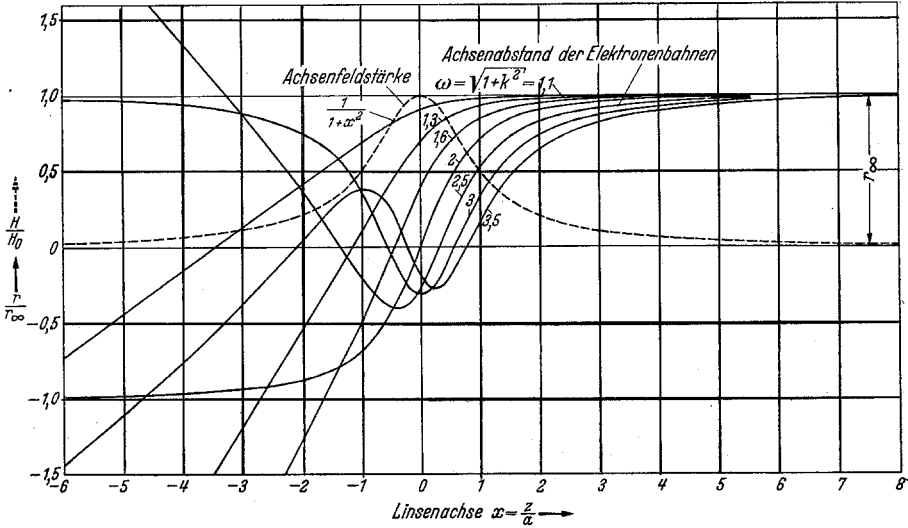


Fig. 7. In der Einfallshöhe 1 von rechts einfallende Elektronenbahnen für verschiedene Werte des Parameters $\omega = \sqrt{1+k^2}$ im Feld $H = \frac{H_0}{1 + (\frac{z}{a})^2}$.

Linsen des Übermikroskops zwischen 1 und 2. Die strengen, nach Formel (26) berechneten Werte der Brechkraft a/f sind in Fig. 8, Kurve I, dargestellt. Ist $k^2 \ll 1$, so kann man (26) nach k entwickeln und erhält so

$$\frac{a}{f} = \frac{\pi}{2} k^2. \tag{41}$$

Dieser Ausdruck für a/f ergibt sich auch durch Anwendung der zuerst von Busch¹⁾ angegebenen Näherungsformel für die Brennweite

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8mU} \int_{-\infty}^{+\infty} H^2 dz, \tag{42}$$

wenn man hierin für H^2 aus (11) einsetzt. Die Buschsche Formel entspricht also einer Näherung für unendlich kleine Werte des Parameters k^2 . In Fig. 8 haben wir neben der Darstellung der Brechkraft nach der strengen Formel (26) in Kurve I auch die auf Grund der Buschschen Formel (42)

¹⁾ H. Busch, Arch. f. Elektrotechn. 18, 553, 1927.

folgenden Werte (41) in II kurvenmäßig dargestellt. Man erkennt, daß für den noch verhältnismäßig kleinen Parameterwert $k^2 = 0,2$, welcher also noch fünf bis zehnmal kleiner ist als die in Praxis verwendeten, der Fehler der Formel (42) bereits 16% beträgt. Für das Gebiet der Übermikroskopie ($k^2 = 1 \dots 2$) führt sie zu ganz falschen Werten (Fehler bis 300%). Aus der Buschschen Formel (42) kann man daher keine Schlüsse

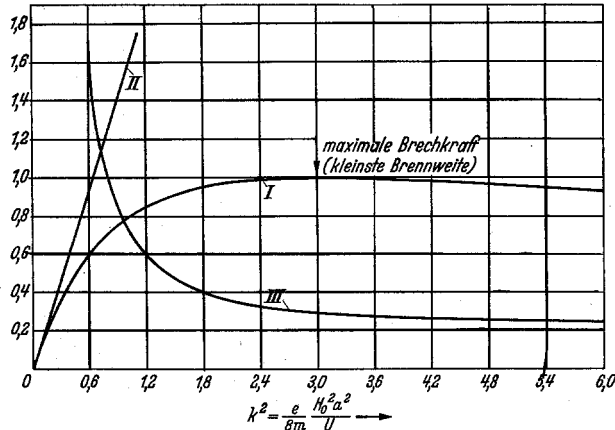


Fig. 8. I. Brechkraft a/f des Feldes $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$ streng berechnet. II. Brechkraft a/f des gleichen Feldes nach der Buschschen Näherungsformel berechnet. III. Die Öffnungsfehlerkonstante C_0/a für hohe Vergrößerung als Funktion von $k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}$.

für die Verhältnisse ziehen, wie sie beim Übermikroskop in der Regel vorliegen¹⁾. Dies gilt auch für die daraus hergeleiteten technischen Dimensionierungsformeln²⁾, wie bereits von E. Ruska³⁾ experimentell gezeigt worden ist.

5. Die Bilddrehung. Im magnetischen Feld ist bekanntlich das Gaußsche Bild um den Winkel

$$\psi = \sqrt{\frac{e}{8mU}} \int_{z_0}^z H dz \tag{45}$$

¹⁾ Damit soll nicht behauptet werden, daß sie nicht für schwächere Linsen, wie sie z. B. bei Braunschen Röhren vielfach verwendet werden, gute Dienste leisten kann. — ²⁾ Z. B. E. Ruska u. M. Knoll, ZS. f. techn. Phys. **12**, 394, 1931; die dort gegebene Formel ist neuerdings durch v. Ardenne (Elektronen-Übermikroskopie, Berlin 1940, S. 15) auch für Übermikroskoplinsen in etwas abgeänderter Form herangezogen worden, liefert aber in dieser Form bis zu 35% zu kleine Werte für die Brennweite. — ³⁾ E. Ruska, ZS. f. Phys. **39**, 90, 1934, insbes. 121, Fig. 14.

gegenüber dem Ding gedreht. Die Integration ist dabei von Dingort z_0 zum Bildort z_1 zu erstrecken. Wenn wir für $H(z)$ nach (11) in (45) einsetzen und wieder den Hilfswinkel φ einführen, ergibt sich

$$\psi = k(\varphi_0 - \varphi_1). \quad (46)$$

(Damit hat sich zugleich eine einfache physikalische Deutung unseres Hilfswinkels φ ergeben.) Auf Grund der Abbildungsgleichung (30) erhält man also für die Bilddrehung

$$\psi = n \frac{\pi k}{\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (47)$$

Man könnte sich denken, daß die Messung des Bilddrehungswinkels (47) einmal eine direkte Methode zur Bestimmung von k ergibt, so daß man alle Formeln statt durch k durch den Bilddrehungswinkel ψ ausdrücken könnte.

6. *Die Farbabweichung (der chromatische Fehler)*. Unter der Farbabweichung versteht man bekanntlich den Einfluß einer Geschwindigkeits-Inhomogenität der abbildenden Elektronenstrahlen auf das Bild. Ist $\Delta U/U$ der relative Spielraum der Voltgeschwindigkeit der Elektronen und ist α die Strahlapertur, so ist der durch die Vergrößerung V dividierte Radius des chromatischen Zerstreuungsscheibchens durch

$$\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \int_{z_0}^{z_1} y'^2 dz \quad (48)$$

gegeben¹⁾, wobei $y(z)$ ein Strahl ist, welcher im Dingpunkt z_0 die Achse schneidet und hier außer $y(z_0) = 0$ der Bedingung $y'(z_0) = 1$ genügt. Die Integration ist vom Dingort z_0 zum Bildort z_1 zu erstrecken. Statt über z wollen wir lieber über φ integrieren. Wir setzen

$$\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \cdot C_F, \quad (49)$$

wobei also die Farbfehlerkonstante C_F durch

$$C_F = \int_{z_0}^{z_1} y'^2 dz \quad (50)$$

definiert ist. Die Elektronenbahn, welche im Punkte $z_0 = a \operatorname{ctg} \varphi_0$ verschwindet, ist nach (18) durch

$$y = C_1 \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = a \operatorname{ctg} \varphi$$

¹⁾ Vgl. W. Glaser, ZS. f. Phys. **116**, 56, 1940, Gleichung (21).

gegeben. Aus $y'(z_0) = 1$ bestimmt sich nach (20) C_1 , so daß die Bahn $y(z)$ die Gestalt hat

$$y(z) = \frac{a}{\omega \sin \varphi_0} \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = a \operatorname{ctg} \varphi. \quad (51)$$

Wenn man daher

$$y'(z) = \frac{1}{\sin \varphi_0} \left[\cos \omega (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi \right] \quad (52)$$

in (50) einführt, ergibt sich wegen $dz = -\frac{a d\varphi}{\sin^2 \varphi}$

$$C_F = \frac{a}{\sin^2 \varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega (\varphi - \varphi_0) - \cos^2 \omega (\varphi - \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega} \frac{\sin 2 \omega (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\sin^2 \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin^2 \varphi} \right] d\varphi,$$

oder

$$C_F/a = \frac{1}{\sin^2 \varphi_0} (J + K), \quad (52a)$$

wobei gesetzt worden ist

$$J = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega (\varphi - \varphi_0) - \cos^2 \omega (\varphi - \varphi_0) \right] d\varphi, \quad (53)$$

$$K = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{1}{\omega} \frac{\sin 2 \omega (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\sin^2 \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin^2 \varphi} \right] d\varphi. \quad (54)$$

Da wir später bei Behandlung des unsymmetrischen Feldes die entsprechenden Formeln brauchen, schreiben wir die Integrale J und K mit unbestimmter oberer Grenze an:

$$J(\varphi, \varphi_0) = \frac{k^2}{2(k^2 + 1)} (\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{4} \frac{k^2 + 2}{k^2 + 1} \sin 2\sqrt{k^2 + 1} (\varphi - \varphi_0), \quad (55)$$

und (partielle Integration)

$$K(\varphi, \varphi_0) = \frac{\sin^2 \sqrt{k^2 + 1} (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi}{k^2 + 1} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \quad (56)$$

Setzt man hierin $\varphi = \varphi_1$, so erhält man auf Grund der Abbildungsgleichung

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{für die Farbfehlerkonstante } C_F$$

$$C_F/a = \frac{\pi k^2}{2(k^2 + 1)^{3/2}} \frac{1}{\sin^2 \varphi_0}. \quad (57)$$

Statt $\sin^2 \varphi_0$ kann auf Grund von (21) noch der Dingort z_0 eingeführt werden. So ergibt sich

$$\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{a^2 + z_0^2}{a}. \quad (58)$$

Man sieht, daß für jeden k^2 -Wert δ_F für den Dingort $z_0 = 0$ ein Minimum hat. Die Farbabweichung ist also am kleinsten, wenn sich der Gegenstand in der Feldmitte befindet. Bei gegebenem Dingort z_0 (z. B. dem günstigsten $z_0 = 0$) hängt δ_F noch vom Parameter k^2 ab. Es wird Null für $k \rightarrow 0$ und

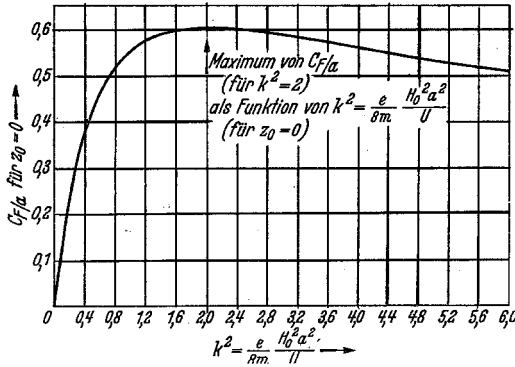


Fig. 9. Farbfehlerkonstante als Funktion von $k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}$ wenn sich das Ding in der Feldmitte befindet.

$k \rightarrow \infty$. Dazwischen erreicht δ_F für $k^2 = 2$ seinen größten Wert. Dieser Größtwert der Farbabweichung ist somit durch

$$\delta_{F \max} = 0,604 \alpha \frac{\Delta U}{U} \left(1 + \left(\frac{z_0}{a} \right)^2 \right). \quad (59)$$

gegeben. In Fig. 9 ist der Farbfehler C_F/a (für $z_0 = 0$) als Funktion von k^2 dargestellt.

Für sehr hohe Vergrößerungen, für welche man sich besonders beim Übermikroskop interessiert, kann man das Ding praktisch im Brennpunkt annehmen: $\varphi_0 = \varphi_f = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}$. So ergibt sich aus (57) der Ausdruck

$$C_F/a = \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}}. \quad (60)$$

In Tabelle 1 ist C_F/a als Funktion des Parameters k^2 und in Fig. 10 kurvenmäßig dargestellt. Man sieht, daß in diesem Falle von sehr hoher

Vergrößerung C_F/a in der Nähe des Parameterwertes $k^2 = 4$ ein Minimum besitzt. Der numerische Wert dieses Minimums ist $C_F/a = 0,577$.

Da wir die achsennahe Bahn unmittelbar als Funktion von U kennen, brauchten wir zur Berechnung der Farbabweichung (58) und (60) die

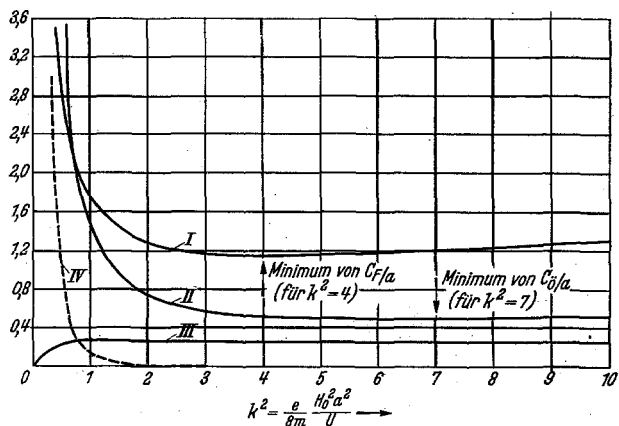


Fig. 10. I. Farbfehlerkonstante C_F/a für hohe Vergrößerung. *) II. Öffnungsfehlerkonstante C_{δ}/a für hohe Vergrößerung. *) III. Öffnungsfehlerkonstante C_{δ}/a bei günstigster Dtinglage. IV. Die Öffnungsfehlerkonstante nach der Näherungsformel für „schwache Linsen“ gerechnet, als Funktion von $k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}$ *).

Formel (48) überhaupt nicht verwenden. Ist nämlich $y(z)$ die Bahn (51), so gilt definitionsgemäß für den Radius Δy des Zerstreungsscheibchens in der Bildebene

$$\Delta y = \alpha \left(\frac{\partial y}{\partial U} \right)_{z=z_1} \cdot \Delta U. \tag{61}$$

Dividiert man durch die Vergrößerung $V = \frac{1}{y'(z_1)}$, so erhält man also die Formel

$$\delta_F = \frac{\Delta y}{V} = \alpha y'(z_1) \left(\frac{\partial y}{\partial U} \right)_{z=z_1} \Delta U. \tag{62}$$

Nun ist $\frac{\partial y}{\partial U} = \frac{\partial y}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial U}$, und aus (51) folgt daher

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{a (\varphi - \varphi_0) \cos \omega (\varphi - \varphi_0)}{\omega \sin \varphi_0 \sin \varphi} = \frac{a}{\omega^2 \sin \varphi_0} \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi}.$$

Wegen (30) ist dies

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = - \frac{a \pi}{k^2 + 1} \frac{1}{\sin \varphi_0 \sin \varphi_1}.$$

Ferner ist wegen (17)

$$\frac{\partial \omega}{\partial U} = - \frac{k^2}{2 \sqrt{k^2 + 1}} \frac{\Delta U}{U},$$

*) Infolge eines Versehens sind die Ordinaten der Kurven I, II und IV um den Faktor 2 zu groß dargestellt.

Tabelle 1.

k^2	z_{f_0}/a	a/f	z_{H_0}/a	C_F/a	C_{δ}/a	k^2	z_{f_0}/a	a/f	z_{H_0}/a	C_F/a	C_{δ}/a
0,2	- 3,563	0,270	0,138	3,251	15,024	3,2	0,038	0,999	1,039	0,584	0,287
0,4	- 1,890	0,467	0,249	1,734	3,308	3,4	0,073	0,997	1,075	0,581	0,286
0,6	- 1,292	0,612	0,341	1,246	1,571	3,6	0,106	0,994	1,113	0,579	0,275
0,8	- 0,970	0,718	0,422	1,012	0,999	3,8	0,137	0,990	1,147	0,578	0,271
1,0	- 0,760	0,796	0,495	0,876	0,735	4,0	0,167	0,986	1,182	0,577	0,267
1,2	- 0,609	0,854	0,562	0,792	0,591	4,2	0,195	0,981	1,214	0,577	0,264
1,4	- 0,492	0,897	0,625	0,734	0,502	4,4	0,222	0,976	1,247	0,578	0,262
1,6	- 0,396	0,929	0,679	0,694	0,442	4,6	0,249	0,970	1,278	0,579	0,260
1,8	- 0,316	0,953	0,732	0,664	0,401	4,8	0,273	0,964	1,309	0,580	0,258
2,0	- 0,248	0,970	0,782	0,641	0,370	5,0	0,297	0,958	1,340	0,581	0,257
2,2	- 0,187	0,982	0,830	0,625	0,347	6	0,404	0,927	1,481	0,592	0,253
2,4	- 0,134	0,991	0,875	0,612	0,329	7	0,495	0,896	1,613	0,605	0,252
2,6	- 0,085	0,996	0,918	0,602	0,312	8	0,577	0,866	1,734	0,621	0,255
2,8	- 0,041	0,999	0,959	0,598	0,305	9	0,652	0,837	1,843	0,637	0,257
3,0	0,000	1,000	1,000	0,589	0,294	10	0,719	0,811	1,954	0,653	0,261

Es bedeutet:

$$\frac{z_{f_0}}{a} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{die Brennpunktslage,} \quad \frac{z_{H_0}}{a} = a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{die Hauptpunktslage,}$$

$$\frac{a}{f} = \sin \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad f \text{ Brennweite,}$$

$$\delta_F = \alpha a \frac{\Delta U}{2(k^2 + 1)^{3/2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}},$$

$$\delta_{\delta} = \alpha^3 \alpha \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2 + 1)^{3/2}} - \frac{1}{8} \frac{4k^2 - 3}{4k^2 + 3} \frac{\sin \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}}{\sin^4 \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}} \right], \quad \delta_{\delta} = \alpha^3 C_{\delta} \text{ Öffnungsfehler}$$

$$\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \cdot C_F \quad \text{die Farbabweichung,}$$

bei hoher Vergrößerung.

und mit dem Ausdruck (34a) für die Vergrößerung

$$V = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1} = \frac{1}{y'(z_1)}$$

erhält man so

$$\delta_F = \alpha a \frac{\Delta U}{U} \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{1}{\sin^2 \varphi_0}.$$

Für den Brennpunkt ergibt sich die Farbabweichung δ_F unmittelbar aus (24) nach der Beziehung

$$\delta_F = \alpha \Delta z_f. \quad (63)$$

Die Farbabweichung hat auch noch Einfluß auf die Vergrößerung, indem Strahlen verschiedener Energie verschiedene Vergrößerungen ergeben. Dies bedingt eine radialgerichtete Verzeichnung. Aus (36) folgt nämlich für die Veränderung der Vergrößerung V

$$\Delta V = \frac{\Delta f_0}{Z_0} - \frac{f_0 \Delta Z_0}{Z_0^2}.$$

Wegen (26) erhält man für Δf_0

$$\begin{aligned} \Delta f_0 &= \frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}} \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U} \\ &= -\frac{1}{a} f_0 z_{f_0} \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \end{aligned} \quad (64)$$

Aus Gleichungen (32) und (24) folgt für

$$\Delta Z_0 = \frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}} \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U} = \frac{1}{a} f_0^2 \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \quad (65)$$

So ergibt sich

$$\Delta V = -\frac{1}{a} \frac{f_0}{Z_0} \left(z_{f_0} + \frac{f_0^2}{Z_0} \right) \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \quad (66)$$

Die Änderung der Vergrößerung können wir durch die radiale Verlagerung des Bildpunktes Δy_1 ausdrücken. Wegen $V = \frac{y_1}{y_0}$ wird so $\Delta y_1 = y_0 \Delta V$. Durch Division mit der Vergrößerung $V = \frac{f_0}{Z_0}$ wollen wir diesen „Verwischungsstrich“ wieder auf die Dingebene beziehen und mit

$$\delta_{F_y} = \frac{\Delta y_1}{V} = y_0 \frac{\Delta V}{V}$$

bezeichnen. So ergibt sich endgültig

$$\delta_{F_y} = -y_0 \frac{1}{a} (z_{f_0} + V f_0) \frac{\pi k^2}{2 (k^2 + 1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \quad (67)$$

Für hohe Vergrößerungen $Vf_0 \gg z_{f_0}$ kann man hierfür schreiben

$$\delta_{F_y} = -y_0 V \frac{\Delta U}{U} \frac{\pi k^2}{2(k^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}, \quad (68)$$

wobei f/a durch (26) ausgedrückt worden ist. Man sieht, daß diese Art der chromatischen Verzeichnung der Vergrößerung proportional ist. Für $k^2 = 3$ erhält man so für die relative Länge der Verwischung

$$\frac{\delta_{F_y}}{y_0} = -0,59 V \frac{\Delta U}{U}. \quad (69)$$

Bei einer Spannung U von 60 kV und einem Schwankungsbereich ΔU der Voltgeschwindigkeit von 10 Volt beträgt somit bei einer hundertfachen Vergrößerung die Größe der Objektverwischung ungefähr ein $1/100$.

Ein weiterer Verzeichnungsfehler¹⁾ infolge einer Geschwindigkeitsinhomogenität ist durch die Abhängigkeit der Bilddrehung von der Elektronenenergie nach (47) bedingt. So ergibt sich zunächst für den Spielraum des Drehwinkels $\Delta \psi$ als Funktion des Geschwindigkeitsspielraumes ΔU der Ausdruck

$$\Delta \psi = -\frac{\pi k}{2(k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \quad (70)$$

Dies bedingt eine tangentialgerichtete Verwischung, also einen Zerdrehungsfehler, welcher — wieder auf die Dingebene bezogen — wegen $\Delta x_1 = y_1 \Delta \psi$ durch

$$\delta_{F_x} = -y_0 \frac{\pi k}{2(k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U} \quad (71)$$

gegeben ist. Für $k^2 = 3$ erhält man so $\delta_{F_x}/y_0 = 0,340 \Delta U/U$.

7. *Der Öffnungsfehler (sphärische Aberration)*. Eine stigmatische Abbildung ergibt sich bekanntlich nur bei sehr starker Ablendung, so daß sich an der Abbildung allein die flachen und achsennahen Elektronenbahnen beteiligen können. Bei einer größeren Strahlapertur entspricht dem punktförmigen Gegenstand als Bild ein Scheibchen vom Radius Δr , welcher der dritten Potenz der Strahlapertur α proportional ist. Diese Erscheinung nennt man den Öffnungsfehler. Wir wollen ihn durch die Größe $\delta_{\bar{O}} = \frac{\Delta r}{V}$ kennzeichnen, wobei V die Vergrößerung bedeutet. Unsere Aufgabe ist nun, den Öffnungsfehler $\delta_{\bar{O}}$ in seiner Abhängigkeit vom Parameter k^2 und

¹⁾ Vgl. hierzu auch G. Wendt, ZS. f. Phys. **116**, 436, 1940.

vom Dingort z_0 zu berechnen. Allgemein gilt für diesen auf die Dingebene bezogenen Radius des Zerstreuungsscheibchens die Formel¹⁾

$$\delta_{\dot{0}} = \frac{\Delta r}{V} = \alpha^3 \frac{e}{96 m U} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{2e}{mU} H^4 + 5 H'^2 - H H'' \right) y^4 dz. \quad (72)$$

Hier bedeutet $y(z)$ wieder jene Elektronenbahn, welche im Dingpunkt $z = z_0$ verschwindet und hier die Ableitung 1 ($y'(z_0) = 1$) hat. Sie ist also durch (51) gegeben. Analog zu C_F wollen wir auch hier die Öffnungsfehlerkonstante $C_{\dot{0}}$ durch

$$\delta_{\dot{0}} = \alpha^3 C_{\dot{0}} \quad (73)$$

eingeführen. Auf Grund von (21) und (11) erhält man nun folgende Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} H(z) &= H_0 \sin^2 \varphi, \quad H^4 = H_0^4 \sin^8 \varphi, \\ H'(z) &= -\frac{2H_0}{a} \sin^3 \varphi \cos \varphi, \quad H''(z) = \frac{6H_0}{a^2} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{2H_0}{a^2} \sin^6 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Für den Klammerausdruck im Integranden von (72) ergibt sich damit

$$\frac{2e}{mU} H^4 + 5 H'^2 - H H'' = \frac{2H_0^3}{a^2} [2(4k^2 - 3) \sin^2 \varphi + 7] \sin^6 \varphi.$$

So erhält man für $C_{\dot{0}}$

$$C_{\dot{0}} = \frac{e H_0^3 a^3}{48 m U \omega^4} \frac{1}{\sin^4 \varphi_0} \int_{z_0}^{z_1} [2(4k^2 - 3) \sin^2 \varphi + 7] \sin^4 \omega (\varphi - \varphi_0) d\varphi,$$

oder

$$\frac{C_{\dot{0}}}{a} = \frac{k^2}{6(k^2 + 1)^2} \frac{1}{\sin^4 \varphi_0} K, \quad (75)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$K = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [2(4k^2 - 3) \sin^2 \varphi + 7] \sin^4 \omega (\varphi - \varphi_0) d\varphi. \quad (76)$$

Da wir das gleiche Integral später mit anderen Grenzen brauchen, wollen wir die obere Grenze zunächst willkürlich lassen und mit φ bezeichnen. Die Ausrechnung ergibt

$$\begin{aligned} K(\varphi, \varphi_0) &= \frac{3}{2} (k^2 + 1) (\varphi - \varphi_0) - \sqrt{k^2 + 1} \sin 2\omega (\varphi - \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{8} \sqrt{k^2 + 1} \sin 4\omega (\varphi - \varphi_0) - \frac{3(4k^2 - 3)}{16} \sin 2\varphi + \\ &+ \frac{3}{4} \frac{(k^2 + 1)^2}{k^2} \frac{4k^2 - 3}{4k^2 + 3} \sin 2\varphi_0 + \frac{(4k^2 - 3)\sqrt{k^2 + 1}}{4k^2} \sin 2\omega (\varphi - \varphi_0) \cos 2\varphi - \\ &- \frac{4k^2 - 3}{4k^2} \cos 2\omega (\varphi - \varphi_0) \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \frac{4k^2 - 3}{4k^2 + 3} \sqrt{k^2 + 1} \sin 2\omega (\varphi - \varphi_0) \cos 2\varphi + \\ &+ \frac{1}{16} \frac{4k^2 - 3}{4k^2 + 3} \cos 4\omega (\varphi - \varphi_0) \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (77)$$

¹⁾ Vgl. W. Glaser, ZS. f. Phys. **116**, 19, 1940, (Gleichung (1)).

Setzt man hierin $\varphi = \varphi_1$ und berücksichtigt die Abbildungsgleichung (30) ($n = 1$), so sieht man, daß einige Glieder wegfallen und für C_{δ}/a ergibt sich

$$\frac{C_{\delta}}{a} = \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{8} \frac{4k^2-3}{4k^2+3} (\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_1) \right] \frac{1}{\sin^4 \varphi_0}, \quad (78)$$

oder auf Grund von (30)

$$\frac{C_{\delta}}{a} = \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{4} \frac{4k^2-3}{4k^2+3} \cos \left(2\varphi_0 - \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}} \right) \sin \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}} \right] \frac{1}{\sin^4 \varphi_0}, \quad (79)$$

wobei φ_0 mit dem Dingort z_0 durch $z_0 = a \operatorname{ctg} \varphi_0$ zusammenhängt. Wenn man gemäß

$$z_0 = a \operatorname{ctg} \varphi_0 \quad \text{und} \quad z_f = a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}$$

Ding- und Brennpunkt einführt, kann man hierfür auch schreiben:

$$\frac{C_{\delta}}{a} = \frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} \frac{(a^2+z_0^2)^2}{a^4} - \frac{1}{4} \frac{4k^2-3}{4k^2+3} \frac{a^2+z_0^2}{a^2+z_f^2} \frac{z_0^2 z_f + a^2(2z_0-z_f)}{a^3}. \quad (80)$$

Für sehr hohe Vergrößerungen kann das Ding praktisch im Brennpunkt angenommen werden. Es ist dann

$$\varphi_0 = \varphi_f = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \varphi_1 = 0, \quad z_0 = z_f \quad (81)$$

zu setzen und die Formeln (79) bzw. (80) erhalten die Gestalt

$$\frac{C_{\delta}}{a} = \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{8} \frac{4k^2-3}{4k^2+3} \sin \frac{2\pi}{\sqrt{k^2+1}} \right] \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}, \quad (82)$$

$$\frac{C_{\delta}}{a} = \frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} \frac{(a^2+z_f^2)^2}{a^4} - \frac{1}{4} \frac{4k^2-3}{4k^2+3} \frac{(a^2+z_f^2) z_f}{a^5}. \quad (83)$$

In Tabelle 1 ist die Öffnungsfehlerkonstante C_{δ}/a für hohe Vergrößerungen, wie sie Formel (82) entspricht, als Funktion von k^2 wiedergegeben und in Fig. 10 durch die Kurve II und Fig. 8 durch Kurve III bildmäßig dargestellt. Der Verlauf von C_{δ}/a in Abhängigkeit von k^2 zeigt dabei folgende wesentliche Merkmale: solange k^2 klein ist, sinkt C_{δ}/a sehr rasch mit wachsendem k^2 . Aus (82) folgt für kleine k^2 , d. h. $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}k^2$ die Näherungsformel

$$\frac{C_{\delta}}{a} = \frac{2}{\pi^3 k^6}. \quad (84)$$

Für große k^2 steigt C_{δ}/a wieder an, jedoch nur langsam, und es wird für große k^2

$$C_{\delta}/a = 0,057 k. \quad (85)$$

In der Umgebung von $k^2 \approx 7$ durchläuft C_{δ}/a ein flaches Minimum. Hier ist $C_{\delta}/a = 0,252$. Für die kleinste Brennweite $f = a$ ($k^2 = 3$) ist $C_{\delta}/a = 0,294$ (Fig. 10). Der Ausdruck (84) ergibt sich gleichfalls, wenn man den Öffnungsfehler auf Grund der von verschiedenen Autoren benutzten Näherungsformeln für den Öffnungsfehler der „kurzen und schwachen“ Linse berechnet. Wir sind nun in der Lage, mittels unserer strengen Berechnung die Berechtigung der im Begriff der „kurzen und schwachen“ Linsen liegenden Näherungsannahmen zu prüfen. Wir haben dazu in Fig. 10 in Kurve IV den Verlauf des nach (84) für die kurze und schwache Linse berechneten Öffnungsfehler neben dem streng berechneten Verlauf nach (82) eingetragen. Man sieht, daß die so gefundenen Werte vollkommen daneben gehen und insbesondere für den noch kleinen Parameterwert von $k^2 = 0,4$ bereits einen Fehler von 69% ergeben. Für den praktisch verwendeten Wert von k^2 um 1,6 ist der Fehler sogar 96%. Man sieht also, daß alle die zahlreichen Arbeiten¹⁾, welche mit der Näherung einer „kurzen und schwachen“ Linse rechnen, für die Praxis der hochauflösenden Elektronenmikroskope nicht ausreichend sind, wie übrigens für den Fall der sogenannten „sphärisch bestkorrigierten Linse“ von Scherzer²⁾ in einer späteren Arbeit selbst festgestellt wird.

Die Gleichung (80) kann benutzt werden, um jenen Dingort zu bestimmen, für welchen die Öffnungsfehlerkonstante C_{δ}/a ihren kleinsten Wert annimmt. Die Bedingung für $z_0 = a x_0$, welches einen Extremwert von (80) ergibt, lautet

$$\frac{2\pi k^2}{(k^2+1)^{3/2}} \frac{4k^2+3}{4k^2-3} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}} = \frac{1+3x_0^2+2x_0^3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}{x_0(1+x_0^2)}. \quad (86)$$

Der durch diese Gleichung gegebene Zusammenhang zwischen der günstigsten Dinglage x_0 und dem Parameter k^2 ist, wie er sich aus einer von Dosse graphisch durchgeführten Auflösung dieser Gleichung (86) ergibt, in Fig. 11 wiedergegeben. Auf Grund der Formel (79) kann man dann für jeden Parameterwert k^2 für diesen günstigsten Dingort die Öffnungsfehlerkonstante

¹⁾ O. Scherzer, ZS. f. Phys. **101**, 23, 1936; O. Scherzer, Beiträge zur Elektronenoptik, herausgegeben von H. Busch u. E. Brüche, Leipzig 1936, S. 17; R. Rebsch u. W. Schneider, ZS. f. Phys. **107**, 138, 1937; H. Riedl, ebenda S. 210; J. Gratsiatos, ebenda S. 382; E. Brüche, TFT Bd. 29, H. 1, 1940; auch E. Brüche u. O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, Berlin 1934. — ²⁾ In Beiträge zur Elektronenoptik, a. a. O., S. 17.

C_{δ}/a bestimmen. Die diesbezüglichen Werte sind als Kurve III in Fig. 10 eingetragen. Man sieht, daß der Einfluß der Dinglage auf C_{δ} im praktisch wichtigen k^2 -Bereich gering ist.

Aus (82) und (26) kann man das Verhältnis C_{δ}/f für hohe Vergrößerungen bestimmen. Es ergibt sich

$$\frac{C_{\delta}}{f} = \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{8} \frac{4k^2-3}{4k^2+3} \sin \frac{2\pi}{\sqrt{k^2+1}} \right] \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}. \quad (87)$$

Von Rebsch¹⁾ und Scherzer¹⁾ ist nun behauptet worden, daß C_{δ}/f auch für die besten errechenbaren Linsen stets größer als 0,25 ist. Wir

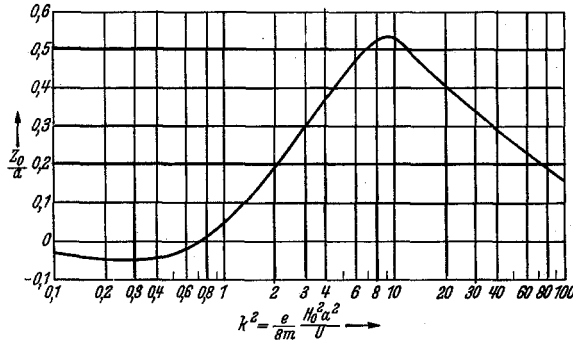


Fig. 11. Dingort mit kleinster Öffnungsfehlerkonstanten C_{δ}/a als Funktion von

$$k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}.$$

wollen das Minimum des Ausdruckes (87) nicht erst berechnen, sondern bloß feststellen, daß C_{δ}/f für gewisse k^2 -Werte merklich kleiner als 0,25 wird. Setzt man z. B. $k^2 = 35$, so erhält man

$$C_{\delta}/f = 0,18, \quad (88)$$

womit gezeigt ist, daß die Behauptung von Rebsch und die daraus von Scherzer gezogenen Folgerungen nicht mehr als allgemeingültig anzusehen sind, wie hier in Ergänzung zu einer früheren Diskussion abschließend festgestellt werden möge²⁾.

Für große k^2 ($\gg 1$) geht C_{δ}/a in $C_{\delta}/f = 0,057 k$ über, während die Brennweite sich wie

$$f = a \frac{k}{\pi} \quad (89)$$

verhält. Man sieht also, daß für große k^2 $C_{\delta} = 0,17 f$ ist.

¹⁾ R. Rebsch, Ann. d. Phys. [5] **31**, 551, 1938; O. Scherzer, ZS. f. Phys. **114**, 427, 1939. — ²⁾ R. Rebsch, ZS. f. Phys. **116**, 729, 1940; W. Glaser, ebenda S. 734.

Dabei möge man bedenken, daß das vorliegende Feld gar nicht nach dem Gesichtspunkt eines möglichst kleinen Wertes von C_0/f ausgesucht worden ist, sondern lediglich in der Absicht, die tatsächlich in den Objektiven des Übermikroskops verwendeten Felder gut wiederzugeben.

III. Elektronenoptik eines unsymmetrischen Glockenfeldes.

1. *Gaußsche Bahn und Abbildungsgleichung.* In den hochauflösenden Objektiven¹⁾ sind vorderer und hinterer Polschuh etwas von einander verschieden, so daß das längs der Achse entstehende Feld unsymmetrisch ist.

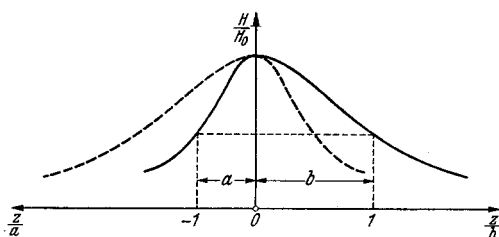


Fig. 12. Unsymmetrischer Feldverlauf, der sich aus zwei Glockenfeldern der Gestalt $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$ mit den beiden Halbwertsbreiten $d_1 = a$ und $d_2 = b$ zusammensetzt.

Um auch diesen Fall zu erfassen, können wir das Feld aus zwei Feldhälften der besprochenen Art zusammensetzen, wobei jedoch rechte und linke Feldhälfte verschiedene Halbwertsbreiten besitzen. Die linke Halbwertsbreite des Feldes werde mit a , die rechte mit b bezeichnet und das Feld nach Art der Fig. 12 durch den ausgezogenen Kurvenzug dargestellt. Es hat also folgende Gleichung:

$$H(z) = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2} \quad \text{für } z \leq 0, \quad H(z) = \frac{H_0}{1 + (z/b)^2} \quad \text{für } z \geq 0. \quad (90)$$

Die Elektronenbahn links von 0 (also $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$) werde mit $y_1(z)$, diejenige rechts von 0 mit $y_2(z)$ bezeichnet. Wir setzen wieder

$$z = a \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{für } z \leq 0 \quad \text{und} \quad z = b \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{für } z \geq 0. \quad (91)$$

Weiter werde eingeführt

$$\omega_1 = \sqrt{k_1^2 + 1} = \left(1 + \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2^2 + 1} = \left(1 + \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 b^2}{U}\right)^{1/2}. \quad (92)$$

Die Bahn für $z \leq 0$, welche in $z = z_0$ ($\varphi = \varphi_0$) verschwindet, lautet

$$y_1(z) = C \frac{\sin \omega_1 (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = a \operatorname{ctg} \varphi. \quad (93)$$

¹⁾ B. v. Borries u. E. Ruska. DRP. 680284, angem. 17. 3. 1932.

Das rechte Bahnstück ($z \geq 0$), welches durch den Bildpunkt z_1 ($\varphi = \varphi_1$) hindurchgehen soll, muß die Gleichung haben:

$$y_2(z) = C_1 \frac{\sin \omega_2 (\varphi - \varphi_1)}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = b \operatorname{ctg} \varphi. \quad (94)$$

Die Bahn $y_1(z)$, welche in $z = z_0$ ($\varphi = \varphi_0$) der Bedingung $y_1'(z_0) = 1$ genügt, ergibt sich analog zu (51)

$$y_1(z) = -\frac{a}{\omega_1} \frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\sin \omega_1 (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi}. \quad (95)$$

$y_2(z)$ haben wir nun im Punkte $z = 0$ (d. h. $\varphi = \frac{\pi}{2}$) stetig und mit stetiger Tangente anzuschließen. Aus

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (96)$$

erhält man so die beiden Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sin \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) &= \frac{a}{\omega_1} \frac{1}{\sin \varphi_0} \sin \omega_1 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \\ C_1 \cos \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) &= -\frac{b}{\omega_2} \frac{1}{\sin \varphi_0} \cos \omega_1 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

zur Bestimmung von C_1 und φ_1 . Durch Quadrieren und Addieren erhält man C_1

$$C_1 = -\frac{1}{\sin \varphi_0} \left[\frac{a^2}{\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{b^2}{\omega_2^2} \cos^2 \omega_1 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \right]^{1/2}, \quad (98)$$

durch Dividieren die Größe

$$\operatorname{tg} \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \frac{a}{b} \frac{\omega_2}{\omega_1} \operatorname{tg} \omega_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right). \quad (99)$$

Die Gleichung (99) stellt den Zusammenhang zwischen Ding- und Bildpunkt dar, ist also als die „Abbildungsgleichung“ zu betrachten. Für $a = b$, also $\omega_1 = \omega_2$, geht sie in

$$\operatorname{tg} \omega \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \operatorname{tg} \omega \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right),$$

oder aufgelöst in unsere frühere Gleichung (30)

$$\omega (\varphi_0 - \varphi_1) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

über. Aus (99) kann man zu jedem vorgegebenen φ_0 die zugehörige Größe φ_1 berechnen. Graphisch kann man so vorgehen, daß man nach Fig. 13 in dem Dreieck mit der Basis $a\omega_2$ bei A den gegebenen Winkel $\chi_0 = \omega_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$ abträgt, den Schenkel AC mit OH zum Schnitt bringt; diesen Schnittpunkt mit B ($AB = b\omega_1$) verbindet und auf diese Weise den Winkel $\chi_1 = \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)$ bei B erhält. Hieraus bestimmt man φ_1 und nach (21) den Bildpunkt z_1 .

2. Die Vergrößerung. Die Vergrößerung ist nach Anhang das Verhältnis der Werte, die ein beliebiges partikuläres Integral im Bild- und Ding-

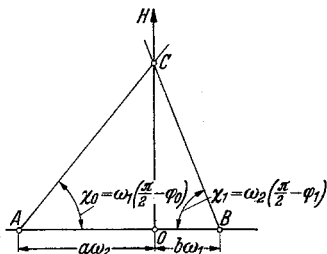


Fig. 13. Graphische Konstruktion des zu einem bestimmten Dingort gehörigen Bildortes im unsymmetrischen Feld.

punkt annimmt, vorausgesetzt natürlich, daß hier das Integral nicht verschwindet. Wir wählen auf der linken Seite das Integral

$$y_1 = \frac{\sin \omega_1 \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \varphi}, \tag{100}$$

welches also im Punkte $z = 0$ verschwindet. Die Fortsetzung $y_2(z)$ von (100) auf der rechten Seite ist dadurch bestimmt, daß sich hier die Lösung

$$y_2 = C_1 \frac{\sin \omega_2 (\varphi - C_2)}{\sin \varphi} \tag{101}$$

der Differentialgleichung stetig und mit stetiger Tangente anschließt. So ergibt sich

$$C_1 = \frac{\omega_1 b}{\omega_2 a} = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 + 1}{k_2^2 + 1}}, \quad C_2 = \frac{\pi}{2} \tag{102}$$

und $y_2(z)$ lautet

$$y_2(z) = \frac{\omega_1 b}{\omega_2 a} \frac{\sin \omega_2 \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \varphi}. \tag{103}$$

Die Vergrößerung V wird damit

$$V = \frac{y_2(\varphi_1)}{y_1(\varphi_0)} = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 + 1}{k_2^2 + 1}} \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_0} \frac{\sin \sqrt{k_2^2 + 1} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \sqrt{k_1^2 + 1} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right)}, \tag{104}$$

wobei φ_1 mit φ_0 nach (99) zusammenhängt.

Die beiden Brennpunkte als die unendlich fernen Punkten zugeordneten Punkte ergeben sich aus (99) für $\varphi_1 = 0$ (d. h. $z_1 = \infty$) bzw. $\varphi_0 = \pi$ (d. h. $z_0 = -\infty$) zu

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{k_2^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{f_1} \right) &= - \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{k_2^2 + 1}{k_1^2 + 1}} \operatorname{tg} \sqrt{k_1^2 + 1} \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} \sqrt{k_1^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{f_0} \right) &= + \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 + 1}{k_2^2 + 1}} \operatorname{tg} \sqrt{k_2^2 + 1} \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \tag{105}$$

Der Begriff der Brennweite hat für diesen Fall keinen Sinn, es sei denn, daß man darunter die Entfernung des Hauptpunktes vom entsprechenden Brennpunkt versteht und die Hauptpunkte als konjugierte Punkte mit der Vergrößerung 1 definiert. [Also durch die simultanen Gleichungen (99) und (104) mit $V = 1$].

3. *Einfluß einer Feldunsymmetrie auf die Farbabweichung.* Der Farbfehler ist nach (48) durch

$$\delta_F = \alpha \frac{AU}{U} \left\{ \int_{z_0}^0 y'^2 dz + \int_0^{z_1} y'^2 dz \right\} \quad (106)$$

gegeben. Wir haben dabei den Beitrag jeder Feldhälfte getrennt angeschrieben. Im ersten Integral haben wir das Bahnstück (95), im zweiten Integral das Bahnstück (94) einzusetzen, wobei C_1 durch Gleichung (98) und φ_1 durch Gleichung (99) definiert sind. Indem man aus (95) und (94) einsetzt, ergibt sich

$$\delta_F = \alpha \frac{AU}{U} \left\{ \frac{a}{\sin^2 \varphi_0} \left[J \left(\frac{\pi}{2}, \varphi_0 \right) + K \left(\frac{\pi}{2}, \varphi_0 \right) \right] - \frac{C_1^2 \omega_2^2}{b} \left[J \left(\frac{\pi}{2}, \varphi_1 \right) + K \left(\frac{\pi}{2}, \varphi_1 \right) \right] \right\}, \quad (107)$$

wobei die Integrale durch (55) und (56) definiert sind. Mit der Abkürzung

$$B(k, \varphi) = \frac{k^2}{k^2 + 1} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{k^2 + 2}{(k^2 + 1)^{3/2}} \sin 2 \sqrt{k^2 + 1} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \quad (108)$$

erhält man für die Farbabweichung des unsymmetrischen Feldes folgenden Ausdruck:

$$C_F/a = \frac{1}{2} \left\{ B(k_1, \varphi_0) - \frac{k_2}{k_1} \left[1 + \frac{1}{k_2^2} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + 1} \sin^2 \sqrt{k_1^2 + 1} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right] B(k_2, \varphi_1) \right\} \frac{1}{\sin^2 \varphi_0}. \quad (109)$$

Für $k_1 = k_2$ ergibt sich natürlich daraus wieder (57). Der Winkel φ_1 ist dabei durch die Abbildungsgleichung (99) als Funktion von φ_0 , k_1 und k_2 bestimmt. Auf Grund von Formel (109) kann man wieder den für die Farbabweichung günstigsten Dingort und das günstigste Verhältnis der Halbwertsbreiten $\frac{a}{b} = \frac{k_1}{k_2}$ der beiden Feldhälften, sowie den günstigsten Parameterwert k_1^2 bestimmen. Für hohe Vergrößerungen kann man in (109) $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_0 = \varphi_f$ nach Gleichung (105) setzen.

1. Der Öffnungsfehler des unsymmetrischen Feldes. Die Formel (72) für den Radius des Zerstreungsscheibchens können wir wieder schreiben:

$$\delta_{\bar{O}} = \frac{\Delta r}{V} = \alpha^3 \frac{e}{96 m U} \left\{ \int_{z_0}^0 \left(\frac{2e}{m U} H^4 + 5 H'^2 - H H'' \right) y^4 dz + \int_0^{z_1} \left(\frac{2e}{m U} H^4 + 5 H'^2 - H H'' \right) y^4 dz \right\}. \quad (110)$$

Im ersten Integral ist dabei nach (95) der Bahnverlauf durch

$$y_1(z) = -\frac{a}{\omega_1} \frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\sin \omega_1 (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad \text{für } z = a \operatorname{ctg} \varphi, \quad (111)$$

im zweiten mit (98) und (99) durch

$$y_2(z) = C_1 \frac{\sin \omega_2 (\varphi - \varphi_1)}{\sin \varphi} \quad \text{für } z = b \operatorname{ctg} \varphi \quad (112)$$

gegeben. Indem man aus (111), (112) und (74) einsetzt, erhält man

$$C_{\bar{O}} = \frac{e H_0^2}{48 m U} \left\{ \frac{a^3}{\omega_1^4 \sin^4 \varphi_0} K \left(\frac{\pi}{2}, \varphi_0 \right) - \frac{C_1^4}{b} K \left(\frac{\pi}{2}, \varphi_1 \right) \right\}, \quad (113)$$

wobei $K(\pi/2, \varphi)$ durch (77) und C_1 durch (98) gegeben sind. Wenn man nun die folgende Abkürzung

$$\begin{aligned} A(k, \varphi) = & \frac{1}{4} \frac{k^2}{k^2 + 1} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{8} \frac{4k^2 - 3}{4k^2 + 3} \sin 2\varphi - \\ & - \frac{8k^3 - 3}{24(k^3 + 1)^{3/2}} \sin 2\sqrt{k^2 + 1} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \\ & + \frac{k^4}{6(4k^2 + 3)(k^2 + 1)^{3/2}} \sin 4\sqrt{k^2 + 1} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (114)$$

einführt, so kann man den Öffnungsfehler des unsymmetrischen Feldes in folgender Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{C_{\bar{O}}}{a} = & \left\{ A(k_1, \varphi_0) - \frac{k_2}{k_1} \left[1 + \frac{1}{k_2^2} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + 1} \sin^2 \sqrt{k_1^2 + 1} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 \times \right. \\ & \left. \times A(k_2, \varphi_1) \right\} \frac{1}{\sin^4 \varphi_0}. \end{aligned} \quad (115)$$

Im Falle hoher Vergrößerung hat man $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_0 = \varphi_f$ zu setzen. Mit Hilfe der Abbildungsgleichung

$$\operatorname{tg} \sqrt{k_1^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_f \right) = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 + 1}{k_2^2 + 1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{k_2^2 + 1} \quad (116)$$

kann man aus dem mittleren Glied in der eckigen Klammer φ_f durch die gegebenen Größen ausdrücken und erhält so

$$\frac{C_{\bar{O}}}{a} = \left\{ A(k_1, \varphi_f) - \left[1 + \frac{1}{k_1^2} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_2^2 + 1} \sin^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{k_2^2 + 1} \right]^{-2} A(k_2, 0) \right\} \frac{1}{\sin^4 \varphi_f}, \quad (117)$$

wobei die Größe φ_r aus (116) zu bestimmen ist. Damit hat man alle Formeln beisammen, um den günstigsten Dingort, das günstigste Verhältnis der Halbwertsbreiten und den günstigsten Parameterwert k_1^2 zu bestimmen. Die numerische und kurvenmäßige Auswertung der Formeln für das unsymmetrische Feld wird in der nachfolgenden Arbeit von J. Dosse gebracht (S. 316).

In der gleichen Weise wie hier der Farb- und Öffnungsfehler des obigen Glockenfeldes bestimmt und für den symmetrischen Fall diskutiert worden ist, können nun auch unsere anderen allgemeinen Formeln für die weiteren sieben Bildfehler ausgewertet werden und insbesondere der Einfluß der Blendenlage untersucht werden. Dies soll in einer weiteren Arbeit von Lammel und dem Verfasser geschehen.

Für wertvolle Hilfe bei der Abfassung dieser Arbeit danke ich den Herren B. v. Borries, J. Dosse, E. Lammel und E. Ruska. Ferner danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Überlassung einer vollautomatischen Rechenmaschine.

Anhang.

Herleitung der allgemeinen „Abbildungsgleichung“ der Elektronenoptik.

Die Differentialgleichungen der achsennaher Elektronenbahnen

$$r'' + \frac{\Phi'}{2\Phi} r + \frac{1}{4\Phi} \left(\Phi'' + \frac{e}{2m} H^2 \right) r = 0, \quad (1)$$

sind lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sie besitzen daher immer zwei unabhängige partikuläre Integrale, welche wir mit

$$\varrho(z) \text{ und } \sigma(z) \quad (2)$$

bezeichnen wollen. Das allgemeine Integral setzt sich daraus mit zwei beliebigen Integrationskonstanten c_1 und c_2 linear zusammen

$$r = c_1 \varrho(z) + c_2 \sigma(z). \quad (3)$$

Es sei (3) jene Bahnkurve, welche den Punkt P_0 mit $\overline{P_1}$ verbinde. Der Punkt P_0 habe die Koordinaten z_0 und y_0 , der Punkt $\overline{P_1}$ die Koordinaten $\overline{z_1}$, $\overline{y_1}$. Es müssen daher die beiden Gleichungen gelten:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= c_1 \varrho(z_0) + c_2 \sigma(z_0), \\ \overline{y_1} &= c_1 \varrho(\overline{z_1}) + c_2 \sigma(\overline{z_1}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Durch z_0 , y_0 und $\overline{z_1}$, $\overline{y_1}$ sind hierbei im allgemeinen die beiden Konstanten c_1 und c_2 bestimmt. Wenn man (4) nach ihnen auflöst und in (3) einsetzt, erhält man somit den P_0 mit $\overline{P_1}$ verbindenden Strahl und man sieht,

daß es bei beliebigem Punkt $\overline{P_1}$ im allgemeinen nur *einen* derartigen Strahl gibt. Eliminiert man z. B. c_2 aus den beiden Gleichungen (4), so ergibt sich

$$\overline{y_1} = c_1 \left[\varrho(\overline{z_1}) - \frac{\sigma(\overline{z_1})}{\sigma(z_0)} \varrho(z_0) \right] + \frac{\sigma(\overline{z_1})}{\sigma(z_0)} y_0. \quad (5)$$

Man sieht, daß jeder Wert von c_1 einen anderen Wert von $\overline{y_1}$ ergibt. Nur wenn der Koeffizient von c_1 verschwindet, gehen alle Strahlen von P_0 auch durch $\overline{P_1}$. Man hat dann eine ganze Schar von Bahnkurven, die P_0 mit $\overline{P_1}$ verbinden. In diesem Falle ist also $\overline{P_1}$ das *Bild* P_1 von P_0 . Als Bedingung, daß $\overline{z_1} = z_1$ das Bild von z_0 ist, hat man daher

$$\varrho(\overline{z_1}) - \frac{\sigma(\overline{z_1})}{\sigma(z_0)} \varrho(z_0) = 0 \quad \text{oder} \quad \varrho(z_1) \sigma(z_0) - \varrho(z_0) \sigma(z_1) = 0 \quad (6)$$

für das Verhältnis $\frac{\overline{y_1}}{y_0} \equiv \frac{y_1}{y_0}$, also die Vergrößerung $V = \frac{y_1}{y_0}$ ergibt sich dann aus (5)

$$V = \frac{y_1}{y_0} = \frac{\sigma(z_1)}{\sigma(z_0)}, \quad (7)$$

womit auch diese Größe als das Verhältnis der Werte eines partikulären Integrals in Bild und Dingpunkt bestimmt ist. Man kann zeigen, daß die Gleichungen (6) und (7) ungeändert bleiben, wenn man zwei andere partikuläre Integrale statt ϱ und σ wählt.
