# Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie.*)

Von

Anton Finzel in Charlottenburg.

## Inhaltsübersicht.



## Einleitung.

Nachdem vor kurzem Herr J. Hjelmslev die projektive Geometrie der Ebene ganz und gar in dieser selbst, ohne Benutzung der Stetigkeit und unabhängig von der Parallelenfrage (d. h. ohne eine besondere Voraussetzung über das Schneiden und Nichtschneiden der Geraden in der Ebene) begründet hatte,**) war zu erwarten, daß auch die Inhaltslehre in diesem Sinne entwickelt werden könne. Diese Aufgabe ist aber bisher unseres Wissens noch nicht gelöst.

---

*) Nachstehende Ausführungen bilden einen Auszug aus der unter dem gleichen Titel vor kurzem erschienenen Straßburger Inaugural-Dissertation des Verfassers.

**) Neue Begründung der ebenen Geometrie. Math. Ann. 64, S. 449 (1907).

Die früheren Darstellungen von Hilbert*) und M. Dehn**) sehen zwar ebenfalls von räumlichen sowohl wie von Stetigkeitspostulaten ab, gehen aber immer noch von bestimmten Voraussetzungen über das Schneiden der Geraden in der Ebene aus. Während nämlich Hilbert das gewöhnliche, euklidische Parallelenaxiom benutzt, beruhen die Dehnschen Entwicklungen wesentlich auf der Voraussetzung, daß je zwei Geraden der Ebene stets einen bez. zwei Punkte gemein haben.

In dieser Arbeit werden wir nun zeigen, daß auch solche Voraussetzungen bei einer axiomatischen Entwicklung der Inhaltslehre überflüssig sind, d. h. also:

*daß die Lehre vom Flächeninhalt mit alleiniger Hilfe ebener Postulate, ohne Benutzung der Stetigkeit und vollkommen unabhängig von der Parallelenfrage aufgebaut werden kann.*

Wir legen das von Peano und Schur in ihren Untersuchungen benutzte und auch in des Letzteren neuerdings erschienenem Buche über die Grundlagen der Geometrie***) veröffentlichte Postulatensystem zugrunde. Es sind dies in jenem Buche nach unserer obigen Verabredung ausschließlich die projektiven Postulate 1—6 und die der Bewegung 9—13, wobei das 11. Postulat jedoch nur für die eine Ebene, in der wir operieren, in Betracht kommt.

Zur Vereinfachung der Darstellung machen wir außerdem noch folgende Voraussetzungen:

Zunächst beschränken wir unsere Betrachtungen auf *einfache* Polygone, das sind solche, bei denen sämtliche Ecken voneinander verschieden sind, keine Ecke des Polygons in eine Seite fällt und endlich zwei nicht aneinander stoßende Seiten keinen Punkt miteinander gemein haben.

Ferner stellen wir uns auf den Standpunkt, daß unsere Konstruktionen auf einen gewissen Teil der Ebene beschränkt sind; im besonderen müssen wir dabei die Annahme machen, daß der Schnittpunkt irgend zweier Geraden, die auf einer dritten senkrecht stehen, falls er ein eigentlicher Punkt sein sollte, nicht zugleich mit der Geraden dem betrachteten Teil der Ebene angehört, weil er sonst auf zwei verschiedenen Seiten der Geraden liegen würde. Auf Grund dieser Voraussetzung gelten dann auch erst alle Kongruenzsätze für Dreiecke und Polygone, die wir im folgenden fortwährend anzuwenden haben.†)

*) Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., 1909, §§ 18—21.

**) Über den Inhalt sphärischer Dreiecke. Math. Ann. 60 (1905), S. 166.

***) F. Schur, Grundlagen der Geometrie. Leipzig (Teubner) 1909.

†) Vgl. Schur, Grundl. d. G. § 5, Nr. 33.

# I. Abschnitt.

# Geometrische Entwicklung der Inhaltslehre für polygonale Flächen.

## § 1.

## Zerlegungsgleichheit und Inhaltsgleichheit.

1. Definition: *Zwei Polygone heißen „zerlegungsgleich“ oder „flächengleich“, wenn sie in eine endliche Anzahl von Polygonen zerlegt werden können, die paarweise kongruent sind.*

2. Definition: *Zwei Polygone heißen „inhaltsgleich“ oder „von gleichem Inhalt“, wenn es möglich ist, zu ihnen zerlegungs- oder flächengleiche Polygone so hinzuzufügen, daß die beiden, durch solche Zusammensetzung erhaltenen Polygone zerlegungsgleich (flächengleich) sind.*

Aus diesen Erklärungen folgt sofort:

Durch Zusammenfügung von zerlegungsgleichen Polygonen entstehen wieder zerlegungsgleiche Polygone; wenn man von zerlegungsgleichen Polygonen zerlegungsgleiche Polygone wegnimmt, so sind die übrig bleibenden Polygone inhaltsgleich.

Es gelten weiter folgende Sätze:

1. Satz: *Sind zwei Polygone $P_1$ und $P_2$ mit einem dritten $P_3$ zerlegungsgleich, so sind sie auch untereinander zerlegungsgleich.*

2. Satz: *Sind zwei Polygone mit einem und demselben dritten inhaltsgleich, so sind sie untereinander inhaltsgleich.*

Zum Beweise von 1. bemerke man, daß nach der Voraussetzung sowohl in $P_1$ als auch in $P_2$ eine Zerlegung in eine endliche Anzahl von Polygonen angegeben werden kann, sodaß einer jeden dieser beiden Zerlegungen je eine Zerlegung von $P_3$ in entsprechend kongruente Polygone entspricht. Fassen wir nun diese beiden Zerlegungen von $P_3$ gleichzeitig ins Auge, so wird im allgemeinen jedes Teilpolygon der einen Zerlegung durch Strecken, die der anderen Zerlegung angehören, in weitere Polygone zerlegt. Betrachten wir jetzt wieder die Zerlegungen von $P_1$ und $P_2$ und zeichnen in jedes Teilpolygon die auf die eben beschriebene Weise entstandene weitere Zerlegung ein, dann haben wir offenbar die beiden Polygone $P_1$ und $P_2$ in eine endliche Anzahl von entsprechend kongruenten Teilen zerlegt. Die beiden gegebenen Polygone sind also zerlegungsgleich.

Der zweite Satz läßt sich leicht auf den ersten zurückführen. Sind nämlich zwei Polygone $P_1$ und $P_2$ gegeben, welche mit einem und demselben dritten $P$ inhaltsgleich sind, so kann man nach der 2. Definition sowohl $P$ und $P_1$ als auch $P$ und $P_2$ durch Hinzufügen entsprechend kongruenter Polygone $p_1', p_2', \cdots, (p_i'), \cdots, p$ bez. $p_1'', p_2'', \cdots, (p_k''), \cdots, p_n''$ in zwei Paare $P'$ und $P_1'$ bez. $P''$ und $P_2''$ von zerlegungsgleichen Polygonen verwandeln. Wir denken uns nun die bezeichneten Veränderungen an $P$ gleichzeitig ausgeführt — hierbei kann es vorkommen, daß gewisse Polygone $(p_i')$, $(p_k'')$ sich ganz oder teilweise überdecken — und betrachten das auf diese Weise entstehende Aggregat der $P$, $(p_i')$, $(p_k'')$, welches wir mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wollen. Dann leiten wir aus $P_1'$ durch Hinzufügung derjenigen Teile von $\mathfrak{P}$, welche $P'$ zu $\mathfrak{P}$ ergänzen ein Polygon $\mathfrak{P}_1$ ab und bilden weiter aus $P_2''$ ein drittes Polygon $\mathfrak{P}_2$, indem wir zu $P_2''$ diejenigen Teile von $\mathfrak{P}$ hinzufügen die $P''$ zu $\mathfrak{P}$ ergänzen. Es können nun einerseits die so konstruierten Polygone $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ beide mit dem Aggregat $\mathfrak{P}$ in paarweise kongruente Teile zerlegt werden; nach Satz 1 sind sie daher auch untereinander zerlegungsgleich. Andererseits ergibt sich leicht — falls bei der Konstruktion von $\mathfrak{P}$ sich gewisse Polygone $(p_i')$, $(p_k'')$ übereinanderlagern, durch nochmalige Anwendung des Satzes 1 —, daß unsere Figuren $\mathfrak{P}_1$ bez. $\mathfrak{P}_2$ durch Hinzufügen zerlegungsgleicher Polygone zu den gegebenen Polygonen $P_1$ bez. $P_2$ entstanden sind. Demnach sind $P_1$ und $P_2$ in der Tat von gleichem Inhalte (2. Def.).

## § 2.

## Begriff des Inhaltsmaßes.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, jedem *einfachen* Polygon eine bestimmte Größe zuzuordnen, die wir als das *„Inhaltsmaß des Polygons“* bezeichnen wollen, und die durch folgende Eigenschaften charakterisiert sei:

a) *Kongruente Polygone haben dasselbe Inhaltsmaß.*

b) *Ist das Polygon $P_2$ aus den Polygonen $P$ und $P_1$ zusammengesetzt, so ist das Inhaltsmaß von $P_2$ der Summe der Inhaltsmaße von $P$ und $P_1$ gleich.*

Um für die Lösung dieser Aufgabe eine einfache Grundlage zu gewinnen, erinnern wir an folgende Tatsachen:

Bekanntlich kann folgender Satz durch einfache Betrachtungen unmittelbar mit Hilfe unserer Voraussetzungen gewonnen werden:

3. Satz: a) *Wenn zwei Gerade zwei gemeinsame Lote besitzen, so ist jedes Lot der einen Geraden auch ein Lot der anderen; oder:*

b) *Gibt es ein Viereck mit vier rechten Winkeln, so muß in jedem Viereck mit drei rechten Winkeln der vierte Winkel auch ein rechter sein.*

Es ist nur eine andere Ausdrucksweise für diese Tatsache, wenn wir sagen:

3. Satz: c) *Ist in irgend einem Dreieck die Summe der Winkel gleich zwei Rechten, so gilt dasselbe für jedes andere Dreieck.**)

Man hat demnach zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Den ordinären Fall: *Es gibt kein Dreieck, in welchem die Summe der Winkel gleich zwei Rechten ist.*

In diesem Falle gilt dann bekanntlich der weitere Satz**)

4. Satz: *Je nachdem in irgend einem Dreiecke die Summe der Winkel kleiner oder größer als ein gestreckter Winkel ist, gilt dasselbe für jedes andere Dreieck.* (Saccheri)

2. Den singulären Fall: *Die Summe der Winkel in einem und folglich in jedem Dreieck ist gleich einem gestreckten Winkel.*

Bezeichnen wir nun

3. Definition: *als „Winkeldifferenz" $\varepsilon$ eines Dreiecks den Unterschied der Winkelsumme von $2R$,*

so ist diese Differenz für jedes Dreieck von Null verschieden (und zwar entweder für jedes größer, oder für jedes kleiner als Null) oder gleich Null, je nachdem wir die ordinäre oder die singuläre Annahme machen.

Sehen wir also zunächst von dem später zu behandelnden Falle $\varepsilon = 0$ ab, so können wir jedem Dreieck eine bestimmte, stets von Null verschiedene (positive oder negative) Größe, nämlich seine Winkeldifferenz zuordnen.

Von dieser Größe wollen wir nun zeigen, daß sie den oben unter a) und b) genannten Kriterien genügt, d. h. als *Inhaltsmaß des Dreiecks* betrachtet werden kann.

Zunächst ist nach der Definition sofort klar, daß kongruente Dreiecke die gleiche Winkeldifferenz besitzen müssen. Es ist also nur noch die Frage, ob bei beliebiger Zerlegung eines Dreiecks in Dreiecke die Winkeldifferenz des gegebenen Dreiecks gleich der Summe der Winkeldifferenzen der Teildreiecke ist.

Zum Beweise***) sei nun ein Dreieck $D$ irgendwie in Teildreiecke, deren Anzahl gleich $d$ sein möge, zerlegt. Die Winkel der Teildreiecke ergänzen sich an den Ecken des Hauptdreiecks zu den Winkeln desselben;

---

*) (Saccheri.) Vgl. hierzu u. zu dem folg. 4. Satze etwa Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien, Leipzig 1895, S. 31 ff. oder Bonola-Liebmann, Nicht-Euklidische Geometrie, Leipzig 1908, S. 24 ff.

**) Auch dieser Satz ist unmittelbar aus unseren Postulaten herzuleiten. Wir denken hier und bei dem vorigen Satze an den einfachen geometrischen, die Stetigkeit und eine Voraussetzung über das Schneiden der Geraden nicht benutzenden Beweis von Joh. Heinr. Lambert. Man findet diesen Beweis, von systematischen Fehlern gereinigt, ausführlich wiedergegeben bei Schur, Grundl. d. G., S. 103 ff.

***) Dieser Beweis nach Dehn, a. a. O., S. 166.

an gewissen anderen Punkten zu $4R$; sie sollen *Sternpunkte* heißen, und ihre Anzahl sei gleich $s$. Weiter gebe es Punkte, an denen sich die Winkel zu 2R ergänzen; wir nennen sie *Halbsternpunkte*; ihre Anzahl sei gleich $h$. Ist nun die Winkelsumme in den einzelnen Teildreiecken gleich $w_i$ $(i=1,2,3,\cdots,d)$ und die des großen Dreiecks gleich $w$, so ist:

$$\sum_1^d {}^i w_i = w + (2s+h)2R.$$

Bezeichnet man nun mit $\varepsilon$ die Winkeldifferenz des gegebenen Dreiecks und mit $\varepsilon_i$ die Winkeldifferenzen der Teildreiecke, so gilt auf Grund der 3. Definition:

$$\sum_1^d {}^i w_i - 2d\cdot R = \sum_1^d {}^i \varepsilon_i$$

und

$$w - 2R = \varepsilon.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen läßt sich die vorige Relation in folgender Form aussprechen:

$$\sum_1^d {}^i \varepsilon_i = \varepsilon + (2s+h+1-d)2\cdot R. \tag{1}$$

Zum Beweise unserer Behauptung genügt es nunmehr zu zeigen, daß die Zahl $2s+h+1-d$ stets gleich Null sein muß.

Der natürliche Weg der Lösung dieser Aufgabe der Analysis situs führt zur Benutzung der Eulerschen Polyederformel, die bekanntlich in dem besonderen Falle der Zerlegung eines Polygons in Polygone mit dem zu beweisenden Satze und überhaupt mit dem Inhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie in sehr enger Beziehung steht.*)

Fügt man nämlich zu den Teildreiecken und Teilecken unserer Zerlegung, die jetzt nur noch *Sternpunkte* enthalten möge, das Hauptdreieck und dessen Ecken hinzu, so bietet das Dreieck mit seiner Zerlegung im Sinne der Analysis situs das Äquivalent für ein konvexes Polyeder, dessen Begrenzung bloß aus Dreiecken besteht. Die Anzahl der (voneinander verschiedenen) Kanten dieses Polyeders sei gleich $k$. Dann ist, da bei unserer

*) Die Einsicht in diesen bemerkenswerten Zusammenhang, der sich schon bei Legendre (Géom. VII, 25) findet, ist neuerdings von M. Dehn ganz wesentlich erweitert und vertieft worden (Die Eulersche Polyederformel im Zusammenhange mit dem Inhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie, Math. Ann. 61, S. 561 ff.). Insbesondere hat Dehn in dieser Untersuchung gezeigt, daß eine der hier benutzten analoge Zerlegungsinvariante (Inhaltsgröße), die bekanntlich im Raum von drei Dimensionen nicht auftritt, in höheren Räumen von gerader Dimensionenzahl existiert und dort mit dem Inhalt der betrachteten polyedrischen Figur in enger Beziehung steht.

Voraussetzung die Anzahl der Ecken gleich $s+3$ und die der Begrenzungsflächen gleich $d+1$ ist, nach der Eulerschen Formel:

$$s+3+d+1=k+2. \tag{2}$$

Nimmt man nun auch Teilpunkte der zweiten Art *(Halbsternpunkte)* an, so vermehrt sich die Anzahl der Ecken um $h$. Die Anzahl der Kanten wird aber dadurch um dieselbe Zahl vergrößert, sodaß auch in diesem Falle die obige Gleichung ihre Geltung behält.

Es gilt schließlich in jedem unserer Fälle die leicht abzuleitende Relation:

$$3d+3=2k+h. \tag{3}$$

Aus den beiden letzten Beziehungen (2) und (3) folgt nun sofort die gesuchte Tatsache:

$$2s+h+1=d.$$

Wir haben demnach in der Tat den Satz:

5. Satz: *Ist ein Dreieck irgend wie in Teildreiecke zerlegt, so ist die Winkeldifferenz des gegebenen Dreiecks gleich der Summe der Winkeldifferenzen seiner Teile.*

Definieren wir nun

4. Definition: *als „Winkeldifferenz" eines Polygons von $n$ Ecken den Unterschied der Winkelsumme von $2(n-2)R$,*
so gilt der entsprechende Satz auch für Polygone.

Zum Beweise können dieselben Betrachtungen angewendet werden, die zum vorigen Satze (5. Satz) führten. Diese erfahren nämlich, wenn man ein Polygon mit $n$ Ecken hat, nur insofern eine Änderung als der Koeffizient von $2R$ in der ersten Gleichung die Form:

$$2s+h+n-2-d$$

annimmt und die linken Seiten von (2) und (3) beide um $n-3$ zu vermehren sind. Daraus ergibt sich dann aber wieder, daß:

$$2s+h+n-2=d,$$

also jener Koeffizient gleich Null sein muß.

Es gilt also auch der

6. Satz: *Die Winkeldifferenz eines Polygons ist gleich der Summe der Winkeldifferenzen der Dreiecke, in die es zerlegt werden kann.*

Aus diesem und dem 4. Satze folgt weiter die wichtige Tatsache:

7. Satz: *Bei der ordinären Annahme ist nicht nur die Winkeldifferenz eines jeden Dreiecks, sondern auch die jedes Polygons von Null verschieden, und zwar ist diese Differenz für jedes Polygon größer oder kleiner als Null, je nachdem dasselbe für die Winkeldifferenz eines und folglich jedes Dreiecks gilt* (4. Satz).

Auf Grund dieser Tatsachen kann nunmehr auch jedem Polygon seine Winkeldifferenz als *Inhaltsmaß* zugewiesen werden.

Was nun den ausgeschlossenen Fall, der durch die Annahme $\varepsilon = 0$ charakterisiert war, betrifft, so gelingt es uns hier erst mit Hilfe der auf dem Pascalschen Satze beruhenden Proportionslehre und Streckenrechnung ein Inhaltsmaß zu finden.

In diesem Falle kann daher unsere Aufgabe erst nach der Entwicklung der projektiven Geometrie ihre Erledigung erfahren.*)

Die demnach hier entstehende Frage nach der Möglichkeit, diese Geometrie mit Hilfe unserer sich auf die Ebene beschränkenden Voraussetzungen, ohne die Stetigkeit und unabhängig von der Parallelenfrage zu begründen, ist, wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, von Hjelmslev in bejahendem Sinne erledigt worden.**) Auf Grund dieser Untersuchung sind wir daher im Stande, auch bei der jetzigen Annahme unsere Aufgabe mit alleiniger Benutzung der verabredeten Postulate zu lösen.***) Im einzelnen gestaltet sich die Lösung folgendermaßen:

Bekanntlich liefert uns die Lehre von den Proportionen den Satz:

8. Satz: *Nennt man zwei Dreiecke ähnlich, wenn sie entsprechend gleiche Winkel besitzen, und sind $a$, $b$ und $a'$, $b'$ entsprechende Seiten in solchen Dreiecken, so gilt die Proportion*

$$a : b = a' : b'.$$

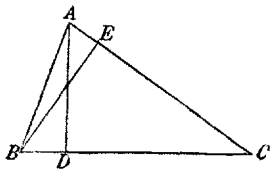

Fig. 1.

Diese Tatsache führt unmittelbar zu dem gesuchten *Inhaltsmaß*. Konstruieren wir nämlich in einem Dreieck $ABC$ (Fig. 1) mit den Seiten $a, b, c$ die Höhen $h_a = AD$ und $h_b = BE$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $BCE$ und $ADC$ nach unserem Satze die Proportion:

$$a : h_b = b : h_a,$$

oder in der Schreibweise der Streckenrechnung:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$

*) Hier ist natürlich nicht eine vollständige Entwicklung der projektiven Geometrie bis zum Fundamentalsatze einschließlich gemeint, sondern nur die Ableitung der ihr bei *nicht-archimedischer* Entwicklung unmittelbar zugrunde liegenden Tatsachen (Pascalscher Satz). [Vgl. F. Schur, Math. Ann. 57, S. 205, und Grundlagen der Geometrie § 1—3, und G. Hessenberg, Math. Ann. 61, S. 162.] Es sei ferner hier nochmals darauf hingewiesen, daß wir bei der ordinären Annahme die in Rede stehenden Tatsachen nicht benutzt haben zur Lösung der im Texte behandelten Aufgabe. Es ist dies eine in systematischer Hinsicht immerhin beachtenswerte Tatsache.

**) Vgl. d. a. O. insbes. S. 460 und Schur, Grundl. d. G., § 7, insbes. S. 158 u. 159.

***) Vgl. a. Hilbert, Grundl. d. G., 3. Aufl., §§ 15, 16.

Mit Hilfe der transitiven Eigenschaft der Gleichheit von Verhältnissen schließen wir hieraus, daß das Produkt aus einer Grundlinie und der zu ihr gehörigen Höhe unabhängig von der Wahl der Grundlinie d. h. also eine für das Dreieck charakteristische Größe ist. Wir wollen sie kurz die *„Größe des Dreiecks“* nennen und mit $\mathfrak{J}(D)$ bezeichnen.

Daß nun diese *Größe*, die eine bestimmte nach den Regeln der Streckenrechnung einfach zu konstruierende Strecke darstellt, die von einem Inhaltsmaße geforderten Eigenschaften besitzt, läßt sich nach Hilbert*) in der folgenden Weise zeigen:

Zunächst folgt wiederum unmittelbar aus unserer Definition, daß kongruenten Dreiecken dieselbe *Größe (Strecke)* zugeordnet werden muß.

Zum Nachweis der anderen charakteristischen Eigenschaft haben wir nun die Streckenrechnung nötig. Versteht man nämlich unter der transversalen Zerlegung eines Dreiecks eine solche, die entsteht, wenn man eine Ecke $S$ mit der gegenüberliegenden Seite $g$ verbindet, so folgt, da die so entstandenen Teildreiecke dieselbe zu $g$ gehörige Höhe besitzen, aus dem distributiven Gesetz der Streckenrechnung unmittelbar, daß die *Größe* eines gegebenen Dreiecks der Summe der *Größen* zweier solcher Dreiecke gleich ist, die aus dem ersten durch transversale Zerlegung entstanden sind. Durch wiederholte Anwendung dieser Tatsache ergibt sich der

Hilfssatz: *Wenn ein Dreieck $D$ durch eine Reihe von transversalen Zerlegungen in Teildreiecke zerfällt ist, so ist die „Größe“ $\mathfrak{J}(D)$ von $D$ der Summe der „Größen“ der Teildreiecke gleich* (vgl. Fig. 2).

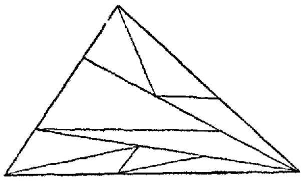

Fig. 2.

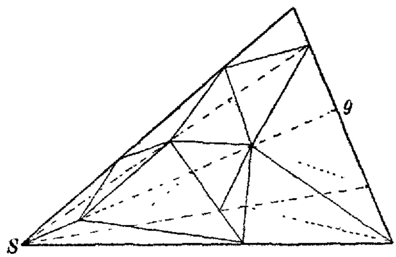


Fig. 3.

Ist nun ein Dreieck $D$ in beliebiger Weise in Teildreiecke $d$ zerlegt (Fig. 3), so verbinden wir eine Ecke $S$ des gegebenen Dreiecks mit jedem Teilpunkt der Zerlegung und verlängern diese Geraden bis zum Schnitt mit der gegenüberliegenden Seite $g$. Durch diese transversale Zerlegung werde das Dreieck $D$ in die Teildreiecke $t$ zerfällt. Nun erzeugt aber die erste Zerlegung in den Dreiecken $t$ eine weitere Zerlegung in gewisse Dreiecke und Vierecke. Wenn wir nun diese Vierecke noch durch dia-

*) Grundlagen d. G., 3. A., § 20.

gonale Zerlegung in Dreiecke zerfällen, so werden die Dreiecke $t$ in gewisse Dreiecke $s$ zerlegt. Wir behaupten nunmehr, daß diese Dreiecke $s$ sowohl aus den Dreiecken $t$ als auch aus den Dreiecken $d$ durch eine Reihe von transversalen Zerlegungen zu erhalten sind.

Daß unsere Behauptung für die Dreiecke $t$ zutrifft, ist leicht zu erkennen; denn bei jedem derselben bleibt das Innere und eine Seite, nämlich diejenige, die dem Punkte $S$ gegenüberliegt, von Teilpunkten frei. Daß aber eine solche Zerlegung eines Dreiecks in Dreiecke stets durch eine Reihe von transversalen Zerlegungen erreicht werden kann, ist ohne weiteres klar.

Betrachten wir nun ein beliebiges der Dreiecke $d$, so sind hier zwei Fälle zu beachten. Es kann entweder eine Seite des Dreiecks in eine der von $S$ ausgehenden Transversalen hineinfallen oder das Dreieck von einer solchen Transversalen in zwei Teildreiecke zerlegt werden. Bei der ersten Annahme bleibt nun aber die in der Transversalen liegende Seite von $d$ von Teilpunkten frei und bei der zweiten stellt die im Innern von $d$ liegende Strecke der Transversalen in den Teildreiecken von $d$ gewiß ebenfalls eine Seite der genannten Art dar. Da nun aber das Innere von $d$ keine Teilpunkte enthalten kann, so ist auf Grund der beim Beweise des ersten Teiles unserer Behauptung gemachten Bemerkung diese hiermit auch für die Dreiecke $d$ bewiesen.

Nach unserem Hilfssatz erscheint nun die *Größe* von $D$ einerseits als die Summe der *Größen* sämtlicher Dreiecke $t$, also auch sämtlicher Dreiecke $s$. Auf der anderen Seite ist aber die Summe der *Größen* der $d$ ebenfalls der Summe der *Größen* der Dreiecke $s$ gleich. Wir haben demnach die Gleichung:

$$\mathfrak{J}(D) = \sum \mathfrak{J}(d)$$

in Worten:

9. Satz: *Wenn ein Dreieck in eine endliche Anzahl von Teildreiecken in beliebiger Weise zerlegt ist, so ist die „Größe" des gegebenen Dreiecks gleich der Summe der „Größen" der Teildreiecke.*

Wird nun ein Polygon $P$ auf zwei verschiedene Arten in Dreiecke $d$ und $d'$ zerlegt und führt man diese Zerlegungen gleichzeitig aus, so können die Teildreiecke beider Zerlegungen je aus denselben Dreiecken und Polygonen zusammengesetzt werden. Definieren wir jetzt die Größe $\mathfrak{J}(P)$ eines Polygons als die Summe der Größen der Dreiecke, in die es zerlegt werden kann, so erkennen wir mit Hilfe der eben gemachten Bemerkung und auf Grund des letzten Satzes, daß die *Größe* des Polygons von der Art der Zerlegung unabhängig ist, also durch das Polygon allein eindeutig bestimmt wird.

Hiermit haben wir in strenger Weise dargetan, daß auch die bei der

Annahme $\varepsilon = 0$ gefundene, für polygonale Figuren charakteristische Streckengröße die von einem Inhaltsmaße verlangten Eigenschaften besitzt, sodaß also die im Anfang dieses Paragraphen gestellte Aufgabe jetzt als vollständig gelöst zu betrachten ist.

## § 3.

## Inhaltsgleichheit und Inhaltsmaß.

Welche Beziehung besteht nun zwischen der Inhaltsgleichheit und dem Inhaltsmaß?

Zunächst folgt aus unseren Definitionen unmittelbar die Tatsache, daß zerlegungsgleiche Polygone dasselbe Inhaltsmaß besitzen. Es gilt daher (2. Def.) auch der Satz:

10. Satz: *Inhaltsgleiche Polygone haben gleiches Inhaltsmaß.*

Wir behaupten nunmehr, daß auch die Umkehrung dieses Satzes Gültigkeit besitzt, d. h. daß die Begriffe der Inhaltsgleichheit und der Gleichheit des Inhaltsmaßes sich decken.

Zum Beweise dieser Behauptung, deren Richtigkeit ohne Benutzung der Stetigkeit nicht ohne weiteres einzusehen ist, führen folgende geometrische Betrachtungen.

Zunächst liefern die unten stehenden Figuren (Fig. 4 und 5) auf Grund der 2. Definition unmittelbar den

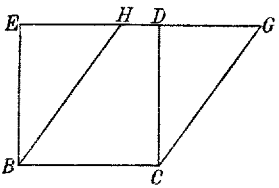


Fig. 4.

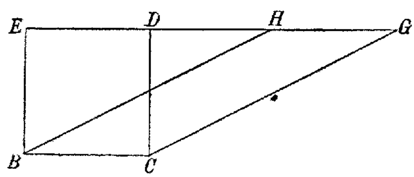


Fig. 5.

11. Satz: *Sind $B$ und $C$ zwei Punkte, die in einer und derselben der von einer gegebenen Geraden $g$ bestimmten Halbebenen liegen und von derselben den gleichen senkrechten Abstand $CD = BE$ haben, und verbindet man diese Punkte bez. mit zwei Punkten $H$ und $G$ der Geraden, deren Abstand $HG$ gleich $ED$ ist, so sind die Vierecke $BCDE$ und $BCGH$ inhaltsgleich.**)

Es gilt ferner die bekannte Tatsache:

12. Satz: *Jedes Dreieck ist mit einem Viereck der oben bezeichneten Art zerlegungsgleich (flächengleich).*

---

*) Die hierzu nötige Kongruenz der Dreiecke $EBH$ und $DCG$ ergibt sich unmittelbar aus der angegebenen Konstruktion der Vierecke.

Sind nämlich (Fig. 6) in dem Dreieck $ABC$ $H$ und $G$ die Mitten von bez. $AB$ und $AC$ und führt man durch eine (kollineare) Spiegelung an $G$ das Dreieck $GAH$ in $GCH_1$ über, so ist $BCH_1H$ in der Tat ein Viereck, das die im 12. Satze ausgesprochenen Eigenschaften besitzt; denn fällt man noch von $B$ und $C$ auf die Gerade durch $H$ und $H_1$ die Lote $BE$ und $CD$, so ergibt sich ohne weiteres die Kongruenz der Dreiecke $EBH$ und $DCH_1$, und hieraus folgen dann die Gleichungen $BE = CD$ und $ED = HH_1$ w. z. b. w.

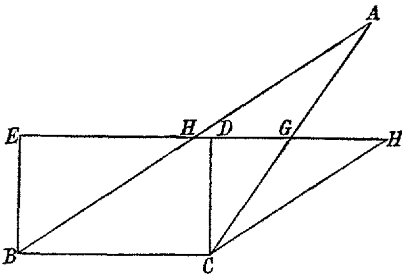

Fig. 6.

Aus den bisherigen Sätzen (11 und 12) folgt weiter:

13. Satz: *Haben zwei Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$ eine Seite $BC = B_1C_1$ gemein und stimmen sie überdies, wenn ihre Spitzen $A$ und $A_1$ auf derselben Seite der durch $B$ und $C$ gehenden Geraden liegen, in der Verbindungslinie der Mitten der nicht gemeinsamen Dreiecksseiten (im folgenden kurz als zu $BC$ gehörige Mittellinie bezeichnet) überein, so sind sie inhaltsgleich.*

Offenbar ist es für die Erledigung unserer Frage von Interesse zu untersuchen, ob dieser Satz umkehrbar ist.

Betrachten wir zu diesem Zweck zunächst in einem Dreieck $ABC$ (Fig. 7) die Senkrechten $CD$, $BE$ und $AF$ auf die Verbindungslinie der Mitten $G$ und $H$ der Seiten $AC$ und $AB$, so ist leicht zu sehen, daß diese Strecken alle einander gleich sind. Ist daher die Gerade $JK$ die Mittelsenkrechte von $DE$ und $K$ ihr Schnittpunkt mit $BC$, so vertauscht die Umwendung um $JK$ die Strecken $BE$ und $CD$, also auch $KB$ und $KC$; $JK$ ist folglich auch Mittelsenkrechte von $BC$. Nun ist aber die Summe der beiden einander gleichen Winkel $BCD$ und $CBE$ gleich der Summe der Winkel des Dreiecks. Je nachdem also diese letzte Summe gleich einem gestreckten Winkel (singuläre Annahme), oder von einem solchen Winkel verschieden ist (ordinäre Annahme), wird jeder der genannten Winkel gleich einem Rechten oder von einem Rechten verschieden sein.

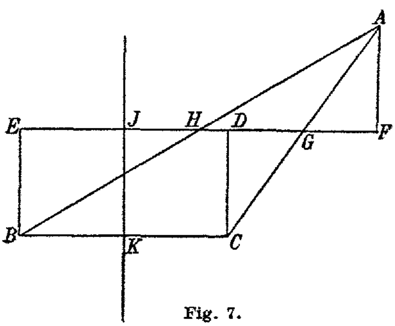

Fig. 7.

Mit Hilfe dieser Bemerkung und auf Grund der Entwicklungen des vorigen Paragraphen ist unsere Frage nunmehr leicht zu entscheiden:

Angenommen die Umkehrung unseres Satzes gelte nicht; es gebe also in der Tat zwei inhaltsgleiche Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$, die eine Seite $BC = B_1C_1$ gemein haben und bei der oben bezeichneten gegenseitigen Lage nicht in den zu dieser Seite gehörigen Mittellinien übereinstimmen. (Fig. 8.) Fällen wir dann von den Ecken $B$ und $C$ auf diese Linien die Lote $CD$ und $BE$ bez. $CD_1$ und $BE_1$, so folgt aus der angenommenen Inhaltsgleichheit unserer Dreiecke auch die der Vierecke $BCDE$ und $BCD_1E_1$. Auf Grund des 10. Satzes haben nun aber diese Vierecke auch das gleiche Inhaltsmaß.

Machen wir daher zunächst die Annahme, daß $\varepsilon$ von Null verschieden sei, so müssen die genannten Polygone dieselbe Winkeldifferenz besitzen (§ 2). Hieraus folgt aber mit Hilfe unserer Vorbemerkung, daß die Winkel $BCD$ und $BCD_1$ bez. $CBE$ und $CBE_1$ einander gleich sind; es fallen demnach die von $B$ und $C$ auf die Mittellinien unserer Dreiecke gefällten Lote zu je zweien in eine und dieselbe Gerade. (Siehe die Fig. 8.)

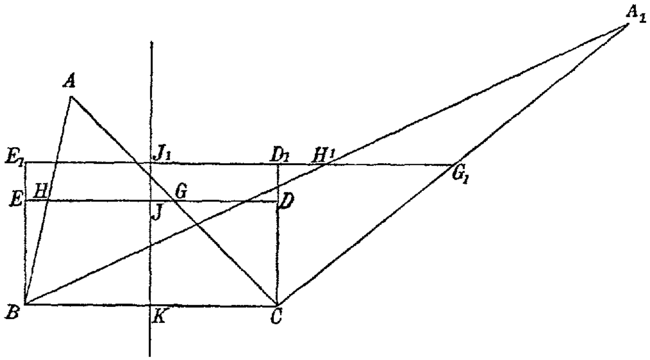

Fig. 8.

Wenn nun die Mittellinien nicht zusammenfielen, so müßte hiernach ein Viereck $EDD_1E_1$ mit vier rechten Winkeln d. h. also mit der Winkeldifferenz Null existieren. Dies ist aber bei unserer Annahme $\varepsilon \neq 0$ nicht möglich.

Im Falle $\varepsilon = 0$, in dem also die beiden Dreiecke die Winkeldifferenz Null besitzen, müssen nach unserer Hilfsbetrachtung die Winkel $BCD$, $BCD_1$, $CBE$ und $CBE_1$ alle gleich einem Rechten sein. Auch hier fallen demnach die Lote $BE$ und $BE_1$ bez. $CD$ und $CD_1$ zusammen. Hätten nun bei der jetzigen Annahme unsere Dreiecke die in Rede stehenden Mittellinien nicht gemein, so müßte es ein Viereck $EDD_1E_1$ geben, dem das Inhaltsmaß Null zukäme. Dies widerspricht aber ebenfalls den Ergebnissen des vorigen Paragraphen; denn aus den dort angestellten Betrachtungen geht hervor, daß das Inhaltsmaß einer polygonalen Figur im Falle $\varepsilon = 0$ stets eine bestimmte (von Null verschiedene) Strecke sein muß.

Es gilt demnach in der Tat der Satz:

14. Satz (Umkehrung von 13): *Inhaltsgleiche Dreiecke, die eine Seite gemein haben, und deren Spitzen in derselben der von dieser Seite bestimmten Halbebenen liegen, besitzen die Eigenschaft, daß die Mitten der nicht gemeinsamen Dreiecksseiten auf einer und derselben Geraden liegen.**)

Diese Tatsache führt uns nun auf einfachem Wege zur vollständigen Erledigung der im Anfange dieses Paragraphen gestellten Frage:

Mit Hilfe des 13. Satzes können wir nämlich zunächst jedes Dreieck mit Erhaltung des Inhaltsmaßes in ein anderes überführen, das eine gegebene Seite besitzt, die größer ist als mindestens eine der Seiten des gegebenen Dreiecks.

Um diese Umformung auszuführen (siehe Fig. 9), trage man, wenn $ABC$ das vorgelegte Dreieck ist, die gegebene Seite $a_1$, die z. B. größer sei als $BC = a$, von $B$ aus auf $\overrightarrow{BC}$ gleich $BC_1$ ab und verbinde die Mitte $J$ von $CC_1$ mit der Mitte $G$ von $AC$. Diese Gerade durch $J$ und $G$ schneidet dann die durch $A$ und $B$ gehende Gerade stets in einem eigentlichen Punkte $K$, welcher der Strecke $AB$ angehört.**) Konstruieren wir nun $A_1$ auf $AB$, sodaß

$$KA_1 = KA$$

wird und verbinden $A_1$ mit $C_1$, so ist $A_1BC_1$ das gesuchte Dreieck.

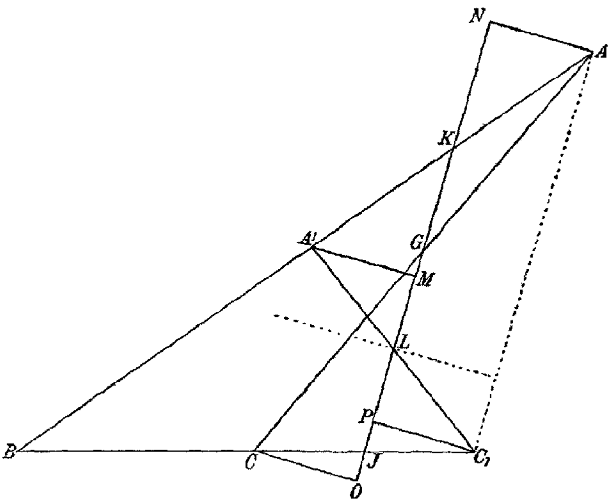

Fig. 9.

Zum Beweise bemerke man zunächst, daß durch die Aufeinanderfolge von drei (kollinearen) Spiegelungen an den Punkten $K$, $G$ und $J$ auf Grund der angegebenen Konstruktion der Punkt $A_1$ nacheinander in die Punkte $A$, $C$ und $C_1$ übergeführt werden kann. Fällt man nun von den ge-

*) Dieser Satz, der nach unseren Ausführungen in der allgemeinen Geometrie uneingeschränkte Gültigkeit besitzt, ist zuerst von Lexell (Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum. Acta Petropol. 1781) auf analytischem und später von Euler (Variae speculationes super areas triangulorum sphaericorum. Acta Petropol. 1797) auch auf geometrischem Wege für die Geometrie auf der Kugel bewiesen worden. Der Verfasser hat in der Dissertation auch einen allgemeinen analytischen Beweis dieses Satzes gegeben.

**) Vg. Schur, Grundl. d. G., § 1, S. 7 (insbes. das 6. Postulat).

nannten Punkten $A_1$, $A$, $C$ und $C_1$ auf die durch $K$, $G$ und $J$ gehende Gerade die Lote $A_1M$, $AN$, $CO$ und $C_1P$, so ist leicht zu sehen, daß diese Strecken alle einander gleich sein müssen. Demnach wird auch die Strecke $A_1C_1$ von der Geraden durch $K$, $G$ und $J$ in ihrer Mitte $L$ getroffen. (Denn verbindet man mit der Umwendung um die genannte Gerade diejenige um die in $L$ auf ihr senkrechte gerade Linie, so vertauscht diese Bewegung sowohl die Punkte $P$ und $M$ als auch die Punkte $A_1$ und $C_1$; die bezeichnete Bewegung ist aber, da bei ihr der Punkt $L$ und dessen absolute Polare fest bleiben, eine [koll.] Spiegelung an diesem Punkte w. z. b. w.) Die Dreiecke $A_1C_1A$ und $CC_1A$ haben daher die gleiche Grundlinie $C_1A$ und dieselbe zu dieser Seite gehörige Mittellinie (die Gerade durch $K$, $G$, $L$, $J$); sie sind also nach Satz 13 inhaltsgleich.

Sind nun zwei beliebige Dreiecke mit demselben Inhaltsmaße vorgelegt, so können wir sie mit Hilfe der beschriebenen Umformung mit Erhaltung des Inhaltsmaßes gewiß in solche mit einer gemeinsamen Seite verwandeln, welche größer ist als alle Seiten der gegebenen Dreiecke. Die so entstandenen Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite und dem gleichen Inhaltsmaße besitzen nun aber, wie bereits in dem Beweise von Satz 14 ausgeführt wurde (vgl. S. 273—275), bei der dort bezeichneten gegenseitigen Lage auch die gleiche zur gemeinsamen Seite gehörige Mittellinie; sie sind daher nach Satz 13 inhaltsgleich.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich also zunächst der Satz:

15. Satz: *Dreiecke von demselben Inhaltsmaß sind auch inhaltsgleich.*

Um nun die entsprechende Tatsache für Polygone zu beweisen, bemerke man Folgendes:

Nach dem Vorhergehenden kann man zwei beliebige Dreiecke in solche mit einer gemeinsamen Seite verwandeln. Führen wir diese Dreiecke in gleichschenklige über, so zwar, daß die gemeinsame Seite ungeändert bleibt, so bilden diese bei der in Figur 10 angedeuteten Zusammenfügung ein Viereck, das in zwei kongruente Dreiecke zerlegt werden kann. Zwei beliebige Dreiecke können demnach in zwei untereinander kongruente Dreiecke verwandelt werden. Drei beliebige Dreiecke $d_1$, $d_2$, $d_3$ können nun zunächst in zwei untereinander kongruente Dreiecke $d$ und ein gleichschenkliges übergeführt werden. Da nun aber das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente Dreiecke $d'$ zerlegt werden kann, können wir schreiben:

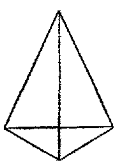

Fig. 10.

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2(d + d'),$$

oder, wenn man unter $d''$ ein neues Dreieck versteht, das nach dem oben gekennzeichneten Verfahren aus $d$ und $d'$ gewonnen werden kann:

$$d_1 + d_2 + d_3 = 4d''.$$

Durch Induktion ergibt sich hieraus der Satz:

16. Satz: *Das Aggregat von n beliebigen Dreiecken kann in* $2^{n-2}$ *untereinander kongruente Dreiecke verwandelt werden.*

Zwei Polygone mit gleichem Inhaltsmaß können demnach in gleichviele untereinander kongruente Dreiecke verwandelt werden. Da nun alle diese Dreiecke dasselbe Inhaltsmaß besitzen müssen, sind sie und folglich auch die Polygone inhaltsgleich.

Wir haben daher endlich auch das allgemeine Ergebnis:

17. Satz: *Polygone mit dem gleichen Inhaltsmaß sind auch inhaltsgleich. w. z. b. w.**)

## II. Abschnitt.

## Notwendige und hinreichende Kriterien zur Vergleichung polygonaler Flächen.

### § 1.

### Die Euklidischen Kriterien.

Wir geben im Anschlusse an vorstehende Darstellung der Inhaltslehre von unserem allgemeinen, von einem Parallelenaxiome unabhängigen Standpunkte aus noch eine kurze kritische Besprechung unserer zur Flächenvergleichung benutzten Kriterien.

Auf Grund der im § 1 gewählten Definitionen konnten wir im vorigen Abschnitt die Lehre vom Flächeninhalt ohne Benutzung eines Stetigkeitsaxioms und unabhängig von einer Voraussetzung über das Schneiden und Nichtschneiden der Geraden entwickeln. Verzichtet man auf den ersten dieser systematischen Vorteile, setzt also die Stetigkeit voraus, so kann die Inhaltslehre auch mit Hilfe anderer Definitionen aufgebaut werden. Diese hat bereits Euklid gekannt und benutzt.

Bekanntlich hat er (Elemente, Buch 1) zur Erkennung der Gleichheit von polygonalen Flächen folgende Kriterien aufgestellt:

1. *Was demselben (dritten) gleich ist, ist einander gleich.*

---

*) Zur völligen Klarstellung der Ergebnisse vorstehender Erörterungen sei noch bemerkt, daß bei unserem Standpunkte des beschränkten Bereichs (vgl. S. 263) die Einfachheit unserer Konstruktionen auf der Kugel wegen der dort möglichen Schwierigkeiten der besonderen Lagenverhältnisse durchaus keine Einbuße erleidet. Unter der genannten Voraussetzung verlaufen unsere Konstruktionen (d. h. die vorstehend ausgeführten) stets im Innern eines Quadrantendreiecks, wodurch die fraglichen Schwierigkeiten tatsächlich ausgeschaltet sind. Man macht sich dies sehr einfach in der der Kugelgeometrie entsprechenden Geometrie des Bündels klar.

2. *Und wenn zu Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, so sind die Summen gleich.*
3. *Und wenn von Gleichem Gleiches hinweggenommen wird, so sind die Reste gleich.*
4. *Und was sich zur Deckung bringen läßt, ist einander gleich.*
5. *Und das Ganze ist größer als sein Teil.*

In den ersten vier dieser Kriterien sind zwei wesentlich verschiedene Gesichtspunkte (Definitionen) enthalten, um die Inhaltsgleichheit ebener polygonaler Figuren zu erkennen. Die Sätze 1, 2 und 4 definieren die Inhaltsgleichheit als Zerlegbarkeit in entsprechend kongruente Teile (*Gleichheit durch Summation*); 3 und 4 dagegen behaupten die Möglichkeit, zwei inhaltsgleiche Figuren als Differenzen kongruenter Figuren aufzufassen (*Gleichheit durch Subtraktion*). Das allgemeine Größenaxiom 5 endlich postuliert die Existenz eines Inhaltsmaßes, d. h. also den *Größencharakter* des Flächeninhaltes.

Das Euklidische Kriteriensystem hat nun zu mehreren wichtigen Untersuchungen Anlaß gegeben, aus deren Ergebnissen folgende Tatsachen hervorzuheben sind:

18. Satz: *Von jenen beiden in den Axiomen 1—4 enthaltenen Gesichtspunkten, die Euklid in seiner Lehre abwechselnd zur Anwendung bringt, kann jeder für sich zu einer einwandfreien Entwicklung der Inhaltslehre benutzt werden, und bei einer solchen Entwicklung ist das fünfte Axiom vollkommen überflüssig.**)

## § 2.

## Zerlegungsgleichheit inhaltsgleicher Figuren.

Was zunächst die erste dieser beiden Tatsachen betrifft, so ist sie durch die Entwicklungen des ersten Abschnitts bereits teilweise bewiesen; denn dort konnten wir die Inhaltslehre allein auf Grund der Euklidischen Definitionen der zweiten Art in einwandsfreier Weise aufbauen. Demnach haben wir jetzt zur vollständigen Rechtfertigung unserer Behauptung noch die Identität jener beiden Arten der Definition der Inhaltsgleicheit nach-

---

*) Die Tatsache, daß das von Euklid gewählte Kriteriensystem etwas Überflüssiges enthält, scheint zuerst P. Gervien bemerkt zu haben (J. f. Math. 10, 1833). Weitere Entwicklungen hierüber rühren von W. Bolyai, C. Duhamel und A. Faifofer her (vgl. den Enzykl.-Artikel von Enriques, Prinzipien d. Geometrie, III 10, S. 47 ff.). Von den genannten Autoren werden jedoch die hierher gehörigen elementaren Fragen in recht umständlicher Weise behandelt und überdies nicht vollkommen, d. h. im Sinne unserer allgemeinen, von einem bestimmten Parallelenaxiom unabhängigen Voraussetzungen erledigt. Wir geben daher hier eine neue, vereinfachte und unserem allgemeinen Standpunkte entsprechende Darstellung der bezeichneten Tatsachen.

zuweisen, d. h. also zu zeigen, daß die von uns als inhaltsgleich bezeichneten Figuren auch stets durch *Summation gleich* (*zerlegungsgleich*) sind.

Wir beweisen die fragliche Tatsache zuerst für Dreiecke und zeigen zu diesem Zweck zunächst Folgendes:

19. Satz: *Fällt man von den Ecken $B$ und $C$ eines Dreiecks $ABC$ auf die Verbindungslinie der Mitten $G$ und $H$ von $AC$ und $AB$ die Lote $BE$ bez. $CD$, so ist das so entstandene Viereck $BCDE$ mit dem ihm inhaltsgleichen Dreieck $ABC$ zerlegungsgleich.*

Beim Beweise haben wir folgende Fälle zu beachten:

a) Gehören die beiden Punkte $G$ und $H$ der Strecke $DE$ an (Fig. 11), so führen wir das Dreieck $GDC$ durch Spiegelung an $G$ in $GFA$ über; dann sind auch die Dreiecke $HEB$ und $HFA$ einander kongruent w. z. b. w.

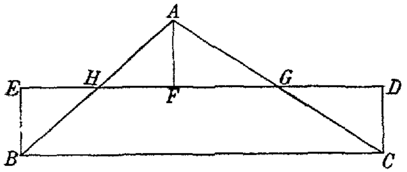


Fig. 11.

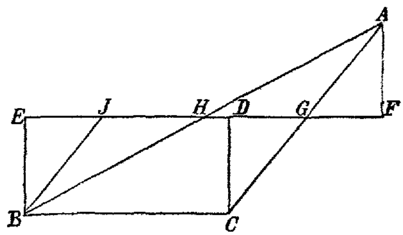


Fig. 12.

b) Liegt nur einer der Punkte $G$ und $H$, etwa $H$ (Fig. 12), auf der Strecke $DE$, so verwandeln wir wieder das Dreieck $GDC$ durch Spiegelung an $G$ in $GFA$ und das Dreieck $HGA$ durch Spiegelung an $H$ in $HJB$. Nun ergibt sich leicht die Kongruenz der Dreiecke $GDC$ und $JEB$, womit unser Satz auch für diesen Fall bewiesen ist.

c) Wenn keiner der Punkte $G$, $H$ der Strecke $DE$ angehört (Fig. 13), so führen wir durch Spiegelung an $H$ das Dreieck $HGA$ in $HG_1B$ und das Viereck $HBCG$ in $HAA_1G_1$ über. Weiter verwandeln wir durch eine Spiegelung am Punkte $G_1$ das Dreieck $G_1BH$ in $G_1A_1H_1$ und das Viereck $G_1HAA_1$ in $G_1H_1B_1B$. Das hiermit gekennzeichnete Spiegelungsverfahren setzen wir fort, bis wir zu einem Punkte $G_n$ oder $H_n$ gelangt sind, dessen Entfernung von $E$ kleiner ist als die Strecke $HG = \frac{1}{2}DE$, sodaß also bei der nächsten Spiegelung an $G_n$ oder $H_n$ der Punkt $H_n$ oder $G_{n+1}$ so zu liegen käme, daß $GH_n$ oder $GG_{n+1}$ größer als die Strecke $GE$ wäre. In prinzipieller Hinsicht ist hier zu bemerken, daß unser Spiegelungsverfahren dann und nur dann bestimmt zu dem eben bezeichneten Resultate führt, wenn, wie oben verabredet*), die Meßbarkeit, also z. B. das Archimedische Postulat vorausgesetzt wird.

*) Vgl. den Anfang dieses Abschnittes.

Führen wir nunmehr die vorhin vorgenommenen Spiegelungen in der entgegengesetzten Richtung aus und markieren uns dabei die Punkte, welche die durch die ersten Spiegelungen erhaltenen Geraden auf den

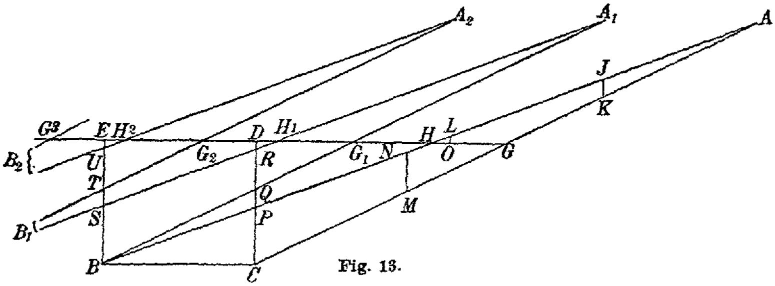


Fig. 13.

Seiten (und im Innern) des Vierecks $BCDE$ bestimmt haben, so ist leicht zu sehen, daß durch unsere Reihe von Spiegelungen das Dreieck und das Viereck in eine endliche Anzahl von paarweise kongruenten Figuren zerlegt worden sind; denn es ergibt sich aus unseren Konstruktionen ohne weiteres die Gleichheit von folgenden Figuren:

$$\begin{aligned} \triangle\quad & AJK \cong BPQ, \\ \text{Fünfeck:}\quad & JLOGK \cong SRDG_2T, \\ \triangle\quad & LHO \cong UH_2E, \\ \text{Viereck:}\quad & HNMG \cong H_2UTG_2, \\ ,,\quad & NPCM \cong RSBQ. \end{aligned}$$

Haben wir nun zwei inhaltsgleiche Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$, die eine Seite $BC = B_1C_1$ gemein haben und folglich nach Satz 14 bei der dort bezeichneten Lage auch in der zu dieser Seite gehörigen Mittellinie übereinstimmen, so sind sie beide mit dem Viereck $BCDE$ zerlegungsgleich. Da nun aber nach Satz 1 (vgl. S. 264) zwei Polygone, die mit einem und demselben Dritten zerlegungsgleich sind, auch untereinander zerlegungsgleich sind, können wir auch von den gegebenen Dreiecken behaupten, daß sie in eine endliche Anzahl entsprechend kongruenter Teile zerlegbar sind.

Um nun eine solche Zerlegung auch wirklich auszuführen, hat man zunächst das Viereck $BCDE$ mit Hilfe des vorhin beschriebenen Verfahrens mit $ABC$ und mit $A_1B_1C_1$ in entsprechend kongruente Teile zu zerlegen. Ziehen wir diese beiden Zerlegungen des Vierecks gleichzeitig in Betracht, und markieren wir uns alle Punkte, die durch die zweifache Zerlegung des Vierecks in seinem Innern und auf seinen Seiten entstanden sind, so erhält man ohne weiteres die gewünschte Zerlegung, wenn man die beiden Spiegelungsverfahren, die zu den ersten Zerlegungen führten, in den entgegengesetzten Richtungen nochmals ausführt.

Wenn die beiden inhaltsgleichen Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$ keine gemeinsame Seite besitzen, so konstruieren wir ein Dreieck, das mit jedem der gegebenen inhaltsgleich ist und überdies mit jedem von diesen eine Seite gemein hat. Damit ist dann dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt.

Ein solches Dreieck findet man auf folgende Weise: Besitzt von den gegebenen Dreiecken $A_1B_1C_1$ eine Seite, die größer ist als alle Seiten von $ABC$,*) so schlagen wir mit der Hälfte dieser größten Seite um eine Ecke von $ABC$, etwa $B$, als Radius einen Kreis. Dieser trifft die Verbindungslinie der Mitten $G$ und $H$ von $AC$ und $AB$ stets in einem eigentlichen Punkte $H'$.**) Konstruieren wir nun den Punkt $A'$ auf der Verlängerung von $\overrightarrow{BH'}$ so, daß $H'A' = H'B$ wird und verbinden $A'$ mit $C$, so ist $A'BC$ das gesuchte Dreieck.

Nach dem Früheren sind nun $ABC$ und $A_1B_1C_1$ beide mit $A'BC$ zerlegungsgleich; sie können daher selber in eine endliche Anzahl entsprechend kongruenter Teile zerlegt werden.

Um endlich auch die Zerlegungsgleichheit von inhaltsgleichen Polygonen nachzuweisen, machen wir die folgende Überlegung. Haben wir zwei beliebige Dreiecke $D_1$ und $D_2$, so können wir sie mit Hilfe der in $I_3$ benutzten Umformung stets in solche mit einer gemeinsamen Seite verwandeln, die größer ist als alle Seiten der gegebenen Dreiecke. Diese Dreiecke führen wir weiter in gleichschenklige $D_1'$ und $D_2'$ über, so zwar, daß die gemeinsame Seite ungeändert bleibt, und können dann, wenn das Zeichen $\sim$ die Zerlegungsgleichheit andeuten soll, auf Grund der bisherigen Ergebnisse schreiben:

$$D_1 \sim D_1'; \quad D_2 \sim D_2';$$

es gilt dann aber auch:

$$D_1 + D_2 \sim D_1' + D_2'.$$

Da wegen der ersten Verwandlung von $D_1$ und $D_2$ in $D_1'$ und $D_2'$ das Aggregat $D_1' + D_2'$ bei geeigneter Zusammenfügung (siehe Fig. 10 auf

*) Von den sechs Seiten der Dreiecke muß offenbar, wenn nicht schon der Fall der Gleichheit eintritt, eine die größte sein.

**) In prinzipieller Hinsicht ist hier zu bemerken, daß zu dieser Konstruktion das Postulat von der Zirkelkonstruktion nötig ist. Da wir jedoch in den gegenwärtigen Entwicklungen bereits das Archimedische Postulat benutzt haben und dieses das erstgenannte zur Folge hat, sind wir nicht gezwungen, hier eine neue Voraussetzung einzuführen.

Zu der letztgenannten Tatsache vgl. man die Ausführungen von Schur über das archimedische Postulat zu seinen Grundlagen der Geometrie § 8 (insbesondere Nr. 56).

S. 276) von $D'_1$ und $D'_2$ in zwei kongruente Dreiecke $D$ zerlegt werden kann, folgt aus:

$$D_1 + D_2 \sim D'_1 + D'_2$$

die weitere Beziehung:

$$D_1 + D_2 \sim 2D.$$

Nehmen wir nun noch ein drittes Dreieck $D_3$ hinzu, verwandeln dieses in ein gleichschenkliges und zerlegen dieses gleichschenklige in zwei kongruente Dreiecke, so gilt:

$$D_1 + D_2 + D_3 \sim 2(D + D')$$

oder auch:

$$D_1 + D_2 + D_3 \sim 4D'',$$

wo $D''$ ein neues Dreieck bedeutet, das nach dem oben beschriebenen Verfahren aus $D$ und $D'$ gewonnen werden kann.

Durch Induktion ergibt sich hieraus der Satz:

20. Satz: *Das Aggregat von $n$ beliebigen Dreiecken ist mit der Summe von $2^{n-2}$ untereinander kongruenten Dreiecken zerlegungsgleich.*

Von zwei inhaltsgleichen Polygonen $P_m$ und $P_n$ ist demnach jedes mit einem solchen Aggregat $P'_m$ und $P'_n$ von $2^{n-2}$ untereinander kongruenten Dreiecken zerlegungsgleich. Nun sind aber $P'_m$ und $P'_n$ selber zerlegungsgleich, da ja die untereinander kongruenten Dreiecke paarweise in eine endliche Anzahl von entsprechend kongruenten Teilen zerlegt werden können. Mithin ist mit Hilfe des Satzes 1 (vgl. S. 264) auch die Zerlegungsgleichheit von $P_m$ und $P_n$ bewiesen.

Wir haben demnach das Ergebnis:

21. Satz: *Bei Voraussetzung eines Stetigkeitsaxioms können die von uns im I. Abschnitt als inhaltsgleich bezeichneten Figuren in eine endliche Anzahl von entsprechend kongruenten Teilen zerlegt werden; mit anderen Worten: Aus dem Archimedischen Postulate folgt die Identität der Definition der Inhaltsgleichheit durch Summation mit ihrer Definition durch Subtraktion.*

Daß nun dieser Tatsache die Stetigkeit als notwendige Voraussetzung zugrunde liegt d. h. nicht allein bei dem von uns gewählten Beweisverfahren benutzt werden muß, ist unmittelbar zu erkennen; denn eine einfache Überlegung zeigt, daß unsere Behauptung im Grunde nichts anderes verlangt, als irgend ein Axiom der genannten Art. Diese Notwendigkeit hat zuerst Hilbert hervorgehoben und in dem von ihm konstruierten speziellen nichtarchimedischen Systeme ein einfaches Beispiel zweier inhaltsgleicher, aber nicht zerlegungsgleicher euklidischer Polygone (Dreiecke) angegeben.*)

---

*) Grundl. d. G., 3. Aufl., § 19.

## § 3.

## Größencharakter des Flächeninhaltes.

Zu der zweiten der unter 18. angeführten Tatsachen (Beweisbarkeit des 5. Euklid. Axioms), deren Beweis durch die Entwicklungen des ersten Abschnitts vollkommen erbracht ist, seien endlich noch folgende Bemerkungen erlaubt:

Auf Grund jener fünften Forderung war Euklid in seiner Inhaltslehre unmittelbar imstande auch die umgekehrten Theoreme, in denen aus der Inhaltsgleichheit gewisser Polygone auf die Gleichheit von Strecken geschlossen wird, (vgl. I, § 3, Satz 14) zu beweisen, er hatte also mit jenem Satze den *Größencharakter* des den Kriterien 1—4 genügenden Flächeninhaltes von vornherein durch ein Postulat gesichert.

Dieser Grundsatz wurde lange Zeit neben den anderen von Euklid benutzten Axiomen als solcher anerkannt und benutzt. Noch in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts haben italienische Geometer wie de Zolt und R. de Paolis ihn ausdrücklich als Postulat hingestellt. Erst die moderne Auffassung des Inhaltsmaßes als Grenze einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Quadraten hat zu der Erkenntnis geführt, daß jene Forderung in dem von Euklid angegebenen Kriteriensystem überflüssig ist, d. h. daß der in ihr enthaltene Satz aus der Gesamtheit der vorherigen Axiome bewiesen werden kann. Bei diesen Betrachtungen wird unser Prinzip in der Tat zu einer unmittelbaren Folge des fundamentalen Satzes von der Existenz des bestimmten Integrales, wie dies W. Killing zuerst hervorgehoben hat.*)

Allein auf direkte und elementare geometrische Weise ist das Prinzip zuerst von F. Schur (1892, Dorpat. Naturf. Ges. Ber.) bewiesen worden.

Bei den Schurschen Entwicklungen wird jedoch noch das Archimedische Postulat gebraucht. Indessen ist auch die Benutzung von Stetigkeitsbetrachtungen beim Beweise unserer Tatsache vollkommen überflüssig. Es beruht diese wichtige Erkenntnis im wesentlichen einerseits auf dem schon von Lambert**) auf geometrischem Wege und ohne Benutzung der Stetigkeit gefundenen Ergebnis, daß mit einem Dreiecke auch jedes andere eine bestimmte, von Null verschiedene Winkeldifferenz besitzen muß (vgl. I, § 2, insbesondere die Sätze 3, 4 und 7), und andererseits in den Euklidischen Systemen (singuläre Annahme) auf dem Nachweis von der Möglichkeit

*) Nicht-Euklidische Raumformen, Leipzig 1885.

**) Vgl. hierzu: Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien, Leipzig 1895, S. 137 ff. oder Bonola-Liebmann, Nicht-Euklidische Geometrie, Leipzig 1908, S. 46 ff.

einer geometrischen, nicht-archimedischen Streckenrechnung und Proportionslehre. Diese letzte Frage ist erst in neuerer Zeit und zwar ebenfalls zuerst von Schur erledigt worden.*)

Endlich geht aus unseren Entwicklungen noch hervor, daß beim Beweise des genannten Prinzips auch eine Voraussetzung über das Schneiden der Geraden in der Ebene überflüssig ist.

Die Ergebnisse der vorstehenden Abschnitte können nun in folgende Sätze zusammengefaßt werden:

22. Satz: *Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone kann entwickelt werden, wenn man die Inhaltsgleichheit als Gleichheit durch Subtraktion (vgl. die Def. 1 und 2) definiert, ohne Benutzung der Stetigkeit und ohne eine Voraussetzung über das Schneiden der Geraden in der Ebene, allein auf Grund der üblichen linearen und ebenen Postulate.*

23. Satz: *Fügt man dagegen diesen Postulaten ein Stetigkeitsaxiom (z. B. das Archimedische) hinzu, so genügt es zur vollständigen Entwicklung der Inhaltslehre die Inhaltsgleichheit als Gleichheit durch Summation zu definieren.*

---

*) Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (Math. Ann. (1898) 51, S. 403).

Nachdem Schur hier den Beweis geliefert hatte, daß das Rechnen mit Strecken (die Proportionslehre ist in der Streckenrechnung enthalten) auf einem von der Maßzahl und dem Archimedischen Postulate unabhängigen Wege hergeleitet werden könnte, entwickelte später Hilbert unabhängig davon eine solche Proportionslehre, die sich zugleich auf ebene Axiome beschränkte, (Grundl. d. G., 3. Aufl., Kap. III, insbesondere § 16) jedoch das Euklidische Parallelenaxiom zur Voraussetzung hat. Auf dieser Proportionslehre beruht dann die ebenda von Hilbert gegebene, in der Einleitung erwähnte Entwicklung der Inhaltslehre.