Commun. math. Phys. 9, 53—54 (1968)

Einige Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen mit idealer Flüssigkeit, die sich in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen

H. STEPHANI

Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Jena

Eingegangen am 1. März 1968

Abstract. All solutions of the Einstein equations for a perfect fluid are given, which are invariantly characterized by: embedding class one, Petrov type D, zero acceleration of matter. Among these solutions are inhomogeneous cosmological models and special solutions with spherical symmetry.

Ein Rechenfehler führte in einer früheren Arbeit [1] des Verfassers zu der Feststellung, daß es keine beschleunigungsfreien Lösungen (mit idealer Flüssigkeit) der Einbettungsklasse 1 und des Petrowtyps D gibt. Wir wollen diese Lösungen jetzt explizit bestimmen; man vergleiche zum folgenden die oben zitierte Arbeit.

Wenn sich Lösungen der Einsteinschen Gleichungen mit idealer Flüssigkeit

$$R_{in} - \frac{1}{2} R g_{in} = T_{in} = (\mu + p)\, u_i u_n + p g_{in} \tag{1}$$

in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen, existiert ein symmetrischer Tensor Ω_{mn}, aus dem man den Krümmungstensor bilden kann

$$R_{inkl} = e(\Omega_{ik}\Omega_{nl} - \Omega_{il}\Omega_{kn}), \qquad e = \pm 1 \tag{2}$$

und der den Gleichungen

$$\Omega_{in;k} = \Omega_{ik;n} \tag{3}$$

genügt. Hat der Krümmungstensor den Typ D ($= I_e$), so gilt

$$\begin{aligned} &p = C^2, \quad \mu = C(3C + 2D), \quad e = +1 \\ &\Omega_{in} = 2C u_i u_n + C g_{in} + D v_i v_n \\ &u_i u^i = -1, \quad u_i v^i = 0, \quad v_i v^i = 1\,, \end{aligned} \tag{4}$$

und für beschleunigungsfreie Strömungen folgt aus (3) bei teilweiser Berücksichtigung von (2) das System

$$\begin{aligned} u_{m;n} &= a_1 v_m v_n + a_2(w_m w_n + z_m z_n) \\ v_{m;n} &= a_1 u_m v_n + a_3 z_m v_n + a_4 w_m v_n \\ C_{,m} &= 2 C a_2 u_m \\ D_{,m} &= [(2C + D)\, a_1 - 2 C a_2]\, u_m + d v_m + C a_3 z_m + C a_4 w_m\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Da die Vektorfelder u_i und v_i rotationsfrei sind und gleichzeitig auf die Normalform

$$u^i = -u_i = (0, 0, 0, 1), \qquad v_i = (0, 0, v, 0) \tag{6}$$

gebracht werden können, kann man das Koordinatensystem (Ruhesystem der Flüssigkeit)

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^2(t)\,[dx^2 + H^2(x, y)\,dy^2] + v^2(x, y, r, t)\,dr^2 - dt^2 \\ z_i &= (f, 0, 0, 0); \qquad w_i = (0, fH, 0, 0) \end{aligned} \tag{7}$$

einführen. Die Funktionen f, H und v lassen sich aus (2) und (5) bestimmen; man erhält zwei Lösungstypen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= t(dx^2 + dy^2) + v^2(x, y, z, t)\,dz^2 - dt^2 \\ v &= t\sqrt{t}\,h_1 + \sqrt{t}\left[h_2 + \frac{3}{4}h_1(x^2 + y^2) + h_3 x + h_4 y\right] + h_5 \\ p(t) &= \frac{1}{4}t^{-2}, \qquad \mu(x, y, z, t) = -\frac{4h_1 t\sqrt{t} + h_5}{2t^2 v} + 3p \\ h_i &= h_i(z) \end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned} ds^2 &= b^2 f^2\left(dx^2 + \frac{\sinh^2 x}{\sin^2 x}\,dy^2\right) + v^2\,dr^2 - dt^2, \quad b \gtrless 0 \\ f^2(t) &= t^2 b^{-1} - eab; \qquad e = \pm 1; \qquad a, b = \text{const.} \\ v(x, r, t) &= f(t)\,d_1(x)\,d_2(r) + d_3(r)\int \frac{dt}{f(t)} + d_4(r) \\ p(t) &= eaf^{-4}; \qquad \mu(x, r, t) = p + \frac{2e}{bvf^3}\,[abd_1(x)\,d_2(r) + ed_3(r)t]\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Lösungen (8) hat man wohl als inhomogene Kosmen zu deuten. Ein einfacher Spezialfall entsteht für $h_1 = h_3 = h_4 = 0$:

$$ds^2 = t(dx^2 + dy^2) + [\sqrt{t}\,h_2(z) + h_5(z)]^2\,dz^2 - dt^2\,. \tag{10}$$

Die Unterräume $t =$ const. sind flach; der Druck hängt nur von der Zeit, die Ruhemassendichte auch von z ab. Für große Zeiten geht dieser Kosmos gegen einen Lichtkosmos $\mu = 3p$.

Bei der zweiten Lösungsklasse (9) handelt es sich für $b < 0$ und $d_1 = 0$ um spezielle kugelsymmetrische Räume.

Herrn Prof. Dr. SCHMUTZER und allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Relativitätstheorie danke ich für Anregungen und Diskussionen.

Literatur

1. STEPHANI, H.: Commun. Math. Phys. 4, 137 (1967).

H. STEPHANI
Theoretisch-Physikalisches Institut
der Friedrich-Schiller-Universität Jena
X-69 Jena, Max-Wien-Platz 1