

*Zusammenfassung*

Ein ebener Flüssigkeitsstrahl von der Weite  $d$  wird normal gegen eine Wand geleitet, die von der Quelle  $h$  Einheiten entfernt ist. Man nimmt gewöhnlich an, dass, wenn das Verhältnis  $h/d$  gross ist, die Auswirkung des Hindernisses nicht zur Quelle des Strahles zurückwirkt, so dass im besonderen wichtige Eigenschaften des Strahls, wie sein Impuls und die Massenströmung, durch den Widerstand unberührt bleiben.

An einem einfachen Modell, in dem der Strahl, bestehend aus einer inkompressiblen und reibungslosen Flüssigkeit, von einem Schlitz in der Wand einer unendlichen Kammer ausströmt, zeigen wir, dass, soweit diese Haupteigenschaften betroffen sind, der Strahl durch das Hindernis beinahe ungestört bleibt, selbst für Werte der Verhältniszahl  $h/d$ , die nahe an der Einheit liegen.

(Received: July 29, 1959.)

**Bemerkung zu einem Hauptachsenproblem in der Plastizitätstheorie**

VON HANS ZIEGLER, ETH, Zürich

**1. Einleitung**

Die Fließbedingung eines isotropen idealplastischen Materials<sup>1)</sup>, das unter hydrostatischem Druck nicht fließt, ist bekanntlich [2] von der Form

$$F(S_2, S_3) = 0, \quad (1.1)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \dots - \sigma_y \sigma_z - \dots) + \tau_{yz}^2 + \dots, \\ S_3 &= \frac{1}{27} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) (2 \sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) (2 \sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \\ &\quad - \frac{1}{3} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \tau_{yz}^2 - \dots + 2 \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

die Grundvarianten des Spannungsdeviators sind [3] und die Funktion  $F$  so gewählt ist, dass  $F(0, 0) < 0$  gilt. So hat im Falle der Fließbedingung von v. MISES [4] (1.1) die einfache Form

$$F = S_2 - \frac{1}{3} \sigma_0^2 = 0, \quad (1.3)$$

wenn  $\sigma_0$  die Fließgrenze im linearen Spannungszustand bezeichnet; nach der Fließbedingung von TRESCA [5] ist dagegen

$$F = 4 S_2^3 - 27 S_3^2 - 9 \sigma_0^2 S_2^2 + 6 \sigma_0^4 S_2 - \sigma_0^6 = 0. \quad (1.4)$$

Im Rahmen der Theorie des plastischen Potentials [6] lautet das zugehörige Fließgesetz, in den plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\dot{\epsilon}_x, \dots, \dot{\gamma}_{yz}, \dots$  ge-

<sup>1)</sup> Bezüglich der Definition siehe [1]. Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 163.

geschrieben, wiederum allgemein

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial S_2} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial F}{\partial S_3} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \sigma_x} \right), \dots, \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} = \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial S_2} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{yz}} + \frac{\partial F}{\partial S_3} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{yz}} \right), \dots, \end{aligned} \right\} \lambda \geq 0. \quad (1.5)$$

Die hier auftretenden partiellen Ableitungen von  $S_2$  und  $S_3$  sind nach (1.2) durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{3} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z), \dots, \\ \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{yz}} &= 2 \tau_{yz}, \dots, \\ \frac{\partial S_3}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{9} (2 \sigma_x^2 - \sigma_y^2 - \sigma_z^2 + 4 \sigma_y \sigma_z - 2 \sigma_z \sigma_x - 2 \sigma_x \sigma_y) \\ &\quad - \frac{1}{3} (2 \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2), \dots, \\ \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{yz}} &= -\frac{2}{3} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \tau_{yz} + 2 \tau_{zx} \tau_{xy}, \dots \end{aligned} \right\} (1.6)$$

gegeben.

## 2. Problemstellung

Ist die  $z$ -Achse Hauptachse des Spannungszustandes, dann gilt

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad (2.1)$$

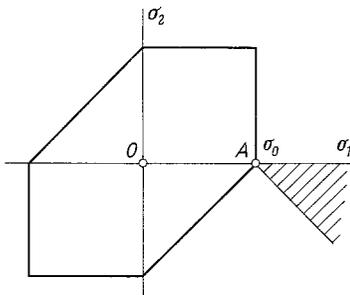
und aus den Beziehungen (1.6) folgt, dass die partiellen Ableitungen von  $S_2$  und  $S_3$  nach  $\tau_{yz}$  sowie  $\tau_{zx}$  verschwinden. Somit ist nach (1.5)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{yz} &= \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial S_2} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{yz}} + \frac{\partial F}{\partial S_3} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{yz}} \right) = 0, \\ \dot{\gamma}_{zx} &= \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial S_2} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{zx}} + \frac{\partial F}{\partial S_3} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{zx}} \right) = 0. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Zwar muss grundsätzlich auch die Möglichkeit  $\lambda = \infty$  im Auge behalten werden, wie etwa beim ebenen Spannungszustand die Diskussion des Fließgesetzes in den Ecken des aus (1.4) zu gewinnenden Tresca-Sechsecks (Figur 1) zeigt; hier kann man indessen diesen Fall, da man die Endlichkeit der übrigen Verzerrungsgeschwindigkeiten postulieren muss, ausschliessen.

Wenn also eine Achse Hauptachse des Spannungstensors ist, dann ist sie unter den in Abschnitt 1 formulierten allgemeinen Voraussetzungen über die Fließbedingung und das Fließgesetz auch Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten, wie das von H. GEIRINGER [7] erstmals festgestellt worden ist. Dagegen ist die Umkehrung dieses Satzes und damit die strenge Richtigkeit der Aussage, dass die beiden Tensoren koaxial seien, keineswegs evident. Da nämlich ein symmetrischer Tensor zweiter Ordnung mehr als ein Tripel von Hauptachsen (das heisst deren unendlich viele) aufweisen kann, ist es durchaus denkbar, dass der Spannungstensor in einem Punkt drei wohldefinierte Hauptachsen, der Tensor der

Verzerrungsgeschwindigkeiten aber noch weitere Hauptachsensysteme besitzt, so dass nicht jede seiner Hauptachsen auch eine solche des Spannungstensors ist. Dieser Fall tritt beispielsweise stets dann ein, wenn alle Verzerrungsgeschwindigkeiten null sind, das heisst, wenn das zum betreffenden Punkt gehörende Raumelement zwar plastifiziert ist, sich aber wie ein starrer Körper, bzw. gar nicht bewegt. Der Schluss von (2.2) auf (2.1) wird sich daher, wenn überhaupt, nur unter der Voraussetzung ziehen lassen, dass sich das Material wirklich plastisch deformiert.



Figur 1

Tresca-Sechseck für den ebenen Spannungszustand.

Das hier aufgeworfene Problem ist von Bedeutung für den ebenen Verschiebungszustand. Dieser wird, wenn  $x, y$  die Verschiebungsebene ist, durch die Forderungen

$$\dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0 \quad (2.3)$$

samt der Bedingung definiert, dass die übrigen Verzerrungsgeschwindigkeiten nur von  $x$  und  $y$  abhängen. Aus den letzten beiden Beziehungen (2.3) wird in der Literatur allgemein auf (2.1) geschlossen<sup>2)</sup>. Dieser Schluss, so sehr er sich auch aufdrängt, folgt aber nicht ohne weiteres aus (2.2). Es ist auch nicht einzusehen, wie er sich physikalisch rechtfertigen lässt. Wohl ist man versucht, die Symmetrie heranzuziehen und daraus, dass sich zwei benachbarte, zur Ebene  $x, y$  parallele Schichten gleich bewegen, auf die Abwesenheit der die Symmetrie störenden Schubspannungen  $\tau_{yz}$  und  $\tau_{zx}$  zu schliessen. Symmetriebetrachtungen sind aber in der Plastizitätstheorie gefährlich und entschieden abzulehnen. Bekanntlich liegt es auch beim Zugversuch nahe, aus Symmetriegründen darauf zu schliessen, dass die Querkontraktion in allen Querrichtungen gleich gross sei. Aus der Fliessbedingung von TRESCA und dem zugehörigen Fliessgesetz folgt aber (Figur 1) nur, dass im Punkte  $A(\sigma_0, 0)$  des Fliesssechsecks für den ebenen Spannungszustand der Vektor  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$  der Verzerrungsgeschwindigkeit im schraffierten Gebiet liegen muss, und da mit Rücksicht auf die Inkompressibilität des Materials nur noch die Bedingung  $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0$  hinzukommt, braucht die Symmetrieforderung  $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3$  keineswegs erfüllt zu sein.

Bei Beschränkung auf die Fliessbedingung von v. MISES und das zugehörige Fliessgesetz ist der Schluss von (2.2) auf (2.1), sofern man plastischen Fluss voraussetzt, korrekt und leicht zu ziehen (vergleiche zum Beispiel [1], S. 125). Aus (1.3)

<sup>2)</sup> Siehe zum Beispiel [7]; [8]; [1], S. 126; [3], S. 268; [9].

erhält man nämlich  $\partial F/\partial S_2 = 1$  und  $\partial F/\partial S_3 = 0$ , also aus (2.2) nach (1.6)

$$\dot{\gamma}_{yz} = 2 \lambda \tau_{yz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{zx} = 2 \lambda \tau_{zx} = 0, \quad (2.4)$$

und da  $\lambda = 0$  einer starren Bewegung entsprechen würde, folgt hieraus (2.1).

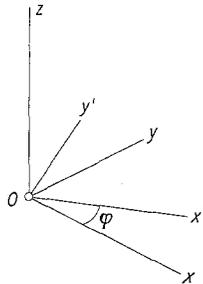
Im folgenden soll dieser Schluss verallgemeinert und nachgewiesen werden, dass unter den weitgefassten Voraussetzungen von Abschnitt 1 betreffend Fließbedingung und Fließgesetz beim plastischen Fluss jede Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten auch eine solche des Spannungstensors ist. Im Anschluss hieran soll gezeigt werden, dass sich dieses Resultat zwar nicht direkt, aber unter einer einschränkenden Voraussetzung auch auf gewisse Körper mit Verfestigung übertragen lässt.

### 3. Reduktion des Spannungszustandes

Bei einer Drehung des Koordinatensystems um die  $z$ -Achse (Figur 2) transformieren sich die Spannungskomponenten  $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots$  gemäss

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x \cos^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi, \\ \sigma'_y &= \sigma_x \sin^2 \varphi - 2 \tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi, \\ \tau'_{xy} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ \tau'_{zx} &= \tau_{zx} \cos \varphi + \tau_{yz} \sin \varphi, \\ \tau'_{yz} &= -\tau_{zx} \sin \varphi + \tau_{yz} \cos \varphi, \\ \sigma'_z &= \sigma_z. \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Die ersten drei Beziehungen (3.1) sind die Transformationen des ebenen Spannungszustandes  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , die sich geometrisch mit dem Spannungskreis interpretieren lassen; die beiden folgenden sind diejenigen eines Vektors  $\tau_{zx}, \tau_{yz}$  in der Ebene  $x, y$ . Entsprechende Transformationen gelten für die Komponenten  $\dot{\epsilon}_x, \dots, \dot{\gamma}_{yz}/2, \dots$  des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten.



Figur 2

Rotation des Koordinatensystems.

Wenn die  $z$ -Achse Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten ist, dann gelten die beiden Beziehungen (2.2), und zwar in der Form  $\dot{\gamma}'_{yz} = \dot{\gamma}'_{zx} = 0$  auch im gedrehten Koordinatensystem. Mit  $\lambda = 0$  oder  $\partial F/\partial S_2 = \partial F/\partial S_3 = 0$  wären sämtliche Verzerrungsgeschwindigkeiten null, und da man den Fall der starren Bewegung wieder auszuschliessen hat, müssen in (2.2) beide Klammern null sein, ohne dass gleichzeitig  $\partial F/\partial S_2$  und  $\partial F/\partial S_3$  verschwinden. Das ist aber nur möglich,

wenn ihre Determinante

$$\frac{\partial S_2}{\partial \tau_{yz}} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{zx}} - \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{zx}} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{yz}} = 0 \tag{3.2}$$

ist. Führt man (3.2) mit (1.6) aus, so kommt

$$(\sigma_x - \sigma_y) \tau_{yz} \tau_{zx} + \tau_{xy} (\tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) = 0, \tag{3.3}$$

und da die Bedingungen (2.2) auch im gedrehten Koordinatensystem gelten, muss (3.3) auch in den gestrichelten Spannungskomponenten erfüllt, mithin unabhängig von der Wahl des Winkels  $\varphi$

$$(\sigma'_x - \sigma'_y) \tau'_{yz} \tau'_{zx} + \tau'_{xy} (\tau'^2_{yz} - \tau'^2_{zx}) = 0 \tag{3.4}$$

sein.

Der dritten Transformation (3.1) ist zu entnehmen, dass man stets einen Winkel  $\varphi$  so finden kann, dass  $\tau'_{xy} = 0$  ist. Da ferner die Fließbedingung (1.1) von der ersten Grundinvariante  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  des Spannungstensors unabhängig ist, darf man von den drei Normalspannungen die gleiche Grösse subtrahieren und daher annehmen, dass im gedrehten System von den beiden Normalspannungen  $\sigma'_x, \sigma'_y$  eine beliebige null sei. Ist dann die andere ungleich null, so folgt aus (3.4), dass eine der beiden Schubspannungen  $\tau'_{yz}, \tau'_{zx}$  verschwinden, also beispielsweise  $\tau'_{zx} = \sigma'_x = 0$  sein muss. Damit ist aber der gegebene auf den ebenen Spannungszustand  $\sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{yz}$  zurückgeführt. Sind dagegen  $\sigma'_x$  und  $\sigma'_y$  gleichzeitig null, so folgt aus den ersten drei Transformationen, (3.1) bzw. aus dem Spannungskreis, dass auch in jedem anderen Koordinatensystem mit  $z$  als Achse  $\sigma'_x = \sigma'_y = \tau'_{xy} = 0$  ist. Nach der vierten Transformation (3.1) kann dann der Drehwinkel  $\varphi$  so gewählt werden, dass überdies  $\tau'_{zx} = 0$  gilt, und damit ist der Spannungszustand wiederum auf einen ebenen  $\sigma'_z, \tau'_{yz}$  reduziert.

Falls also die Bewegung nicht starr und die  $z$ -Achse Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten ist, dann lässt sich der gegebene Spannungszustand durch eine Drehung um die  $z$ -Achse in jedem Fall auf einen ebenen  $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$  zurückführen. Somit ist  $x$  eine Hauptachse des Spannungszustandes, und es muss jetzt nur noch gezeigt werden, dass auch  $z$  eine solche ist.

#### 4. Der ebene Spannungszustand

Der Spannungskreis des ebenen Spannungszustandes  $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$  ist durch die Abszisse seines Mittelpunktes und seines Radius, also durch die Grössen

$$I_1 = \sigma_y + \sigma_z, \quad I_2 = (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4 \tau_{yz}^2 \tag{4.1}$$

vollständig bestimmt. Daher muss sich die Fließbedingung (1.1) hier auch in der Form

$$G(I_1, I_2) = 0 \tag{4.2}$$

und das Fließgesetz in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_y &= \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_y} = \lambda \left[ \frac{\partial G}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial G}{\partial I_2} (\sigma_y - \sigma_z) \right], \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_z} = \lambda \left[ \frac{\partial G}{\partial I_1} - 2 \frac{\partial G}{\partial I_2} (\sigma_y - \sigma_z) \right], \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \lambda \frac{\partial G}{\partial \tau_{yz}} = 8 \lambda \frac{\partial G}{\partial I_2} \tau_{yz} \end{aligned} \right\} \tag{4.3}$$

anschreiben lassen. In der Tat überzeugt man sich leicht davon, dass aus (1.2) mit  $\sigma_x = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$

$$S_2 = \frac{1}{12} (I_1^2 + 3 I_2), \quad S_3 = -\frac{1}{108} (I_1^3 - 9 I_1 I_2) \quad (4.4)$$

folgt. Damit ist aber (4.2) gerechtfertigt.

Nach (4.3) führt die Bedingung  $\dot{\gamma}_{yz} = 0$ , wenn die starre Bewegung wieder ausgeschlossen wird, auf

$$\tau_{yz} \left( \frac{\partial G}{\partial I_2} \right)_{\dot{\gamma}_{yz}=0} = 0. \quad (4.5)$$

Da  $\dot{\epsilon}_y$  und  $\dot{\epsilon}_z$  frei wählbar sind, folgt hieraus  $\tau_{yz} = 0$ , denn das Verschwinden des zweiten Faktors wäre nach (4.3) mit der Beziehung  $\dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_z$  gleichbedeutend. Damit ist aber nachgewiesen, dass  $z$  eine Hauptachse des Spannungszustandes ist.

## 5. Körper mit Verfestigung

Bisher wurde angenommen, dass das betrachtete Material idealplastisch sei. Lässt man jetzt auch Körper zu, die sich nach der Regel von PRAGER [10] oder nach der vom Verfasser vorgeschlagenen Modifikation ([9], S. 55) derselben verfestigen, so sind in den Beziehungen von Abschnitt 1 die Spannungskomponenten rechterhand durchwegs durch die Ausdrücke  $\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots$  zu ersetzen, und zwar gilt im Falle der Pragerschen Verfestigungsregel beim plastischen Fließen [11]

$$\dot{\alpha}_x = \frac{2}{3} c \dot{\epsilon}_x, \dots, \quad \dot{\alpha}_{yz} = \frac{1}{3} c \dot{\gamma}_{yz}, \dots, \quad (5.1)$$

nach ihrer Modifikation dagegen

$$\dot{\alpha}_x = \mu (\sigma_x - \alpha_x), \dots, \quad \dot{\alpha}_{yz} = \mu (\tau_{yz} - \alpha_{yz}), \dots \quad (5.2)$$

Dabei sind  $c$  und  $\mu$  positive Konstanten, deren Bedeutung in diesem Zusammenhang unerheblich ist, und ferner gilt zu Beginn des plastischen Flusses

$$\alpha_x = \dots = \alpha_{yz} = \dots = 0.$$

Nimmt man an, dass die  $z$ -Achse in irgendeinem Stadium des plastischen Flusses Hauptachse des Spannungstensors, mithin (2.1) erfüllt sei, so folgt aus den in der angegebenen Weise verallgemeinerten Beziehungen (1.5) und (1.6) noch nicht (2.2); eine Hauptachse des Spannungstensors ist also im allgemeinen nicht Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten. Das hängt damit zusammen, dass das Material mit der Verfestigung anisotrop wird. Nimmt man aber die Voraussetzung  $\alpha_{yz} = \alpha_{zx} = 0$  hinzu, so kommt jetzt (2.2), und zudem schliesst man aus (5.1) bzw. (5.2) auf  $\dot{\alpha}_{yz} = \dot{\alpha}_{zx} = 0$ . Folglich ist jede raumfeste Achse, die während des ganzen Fließvorganges eine Hauptachse des Spannungstensors ist, jederzeit auch Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten und damit auch Hauptachse des Verzerrungstensors.

Nimmt man umgekehrt an, dass die  $z$ -Achse in irgendeinem Stadium des plastischen Flusses Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten, mithin (2.2) erfüllt sei, so kann man den Spannungszustand  $\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots$  gemäß Abschnitt 3 auf einen ebenen  $\sigma_y - \alpha_y, \sigma_z - \alpha_z, \tau_{yz} - \alpha_{yz}$  zurückführen, wobei im gedrehten Koordinatensystem insbesondere  $\tau_{zx} - \alpha_{zx} = 0$  wird. Sodann zeigt man analog wie in Abschnitt 4, dass  $\tau_{yz} - \alpha_{yz} = 0$  sein muss; da aber hieraus und aus

$\tau_{zx} - \alpha_{zx} = 0$  nicht (2.1) folgt, ist eine Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten im allgemeinen nicht Hauptachse des Spannungstensors. Nur mit der weiteren Voraussetzung  $\alpha_{yz} = \alpha_{zx} = 0$  erhält man (2.1); da aber dann aus (5.1) bzw. (5.2) auch  $\dot{\alpha}_{yz} = \dot{\alpha}_{zx} = 0$  folgt, ist jede raumfeste Achse, die während des ganzen Fließvorganges Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten und somit auch eine solche des Verzerrungstensors ist, jederzeit auch eine Hauptachse des Spannungstensors.

Damit ist insbesondere auch für Körper, die sich gemäss (5.1) oder (5.2) verfestigen, nachgewiesen, dass im Falle des ebenen Verschiebungszustandes (2.3) die Normale  $z$  zur Verschiebungsebene stets eine Hauptachse des Spannungszustandes ist<sup>3)</sup>.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. PRAGER und P. G. HODGE, *Theorie ideal plastischer Körper* (Springer-Verlag, Wien 1954).
- [2] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity* (Clarendon Press, Oxford 1950), S. 16.
- [3] R. T. SHIELD und H. ZIEGLER, *On Prager's Hardening Rule*, Z. angew. Math. Phys. 9a, 266 (1958).
- [4] R. v. MISES, *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Goettinger Nachr., Math. Phys. Klasse 1913, 582.
- [5] H. TRESCA, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*, Mém. prés. Acad. Sci., Paris, 18, 733 (1868).
- [6] R. v. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Z. angew. Math. Mech. 8, 161 (1928).
- [7] H. GEIRINGER, *Some Recent Results in the Theory of an Ideal Plastic Body*, Adv. Appl. Mech. 3 (Academic Press, New York 1953), S. 207.
- [8] A. M. FREUDENTHAL und H. GEIRINGER, *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*, Handbuch der Physik, Band 6 (Springer-Verlag, Berlin 1958), S. 350.
- [9] H. ZIEGLER, *A Modification of Prager's Hardening Rule*, Quart. Appl. Math. 17, 60 (1959).
- [10] W. PRAGER, *The Theory of Plasticity, A Survey of Recent Achievements* (James Clayton Lecture), Proc. Inst. Mech. Eng. 169, 41 (1955).
- [11] CH. CLAVUOT und H. ZIEGLER, *Über einige Verfestigungsregeln*, Festschrift Richard Grammel, Ing. Arch. 28, 13 (1959).

#### Summary

In an ideally plastic material any principal axis of the stress tensor is also a principal axis of the strain rate tensor. It is shown here that in plastic flow also the reverse is true. Besides, the validity of either statement is discussed for materials obeying PRAGER'S hardening rule or its modification proposed by the author.

(Eingegangen: 17. Dezember 1959.)

---

<sup>3)</sup> Der Autor ist Herrn Dr. CH. CLAVUOT für die kritische Durchsicht dieser Mitteilung zu Dank verpflichtet.