

*Zusammenfassung*

In dieser Arbeit wird der Einfluss der Wand auf die Bewegung eines rotations-symmetrischen Körpers längs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres betrachtet. Der Widerstand des Körpers wird unter der Voraussetzung berechnet, dass die Dimensionen des Körpers gegenüber dem Radius des Rohres klein sind. Wir finden für den Widerstand  $D$  eines Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit  $U$  längs der Achse einer zylindrischen Röhre mit dem inneren Radius  $R$  bewegt,

$$D = D_0 \left[ 1 + \frac{\varkappa D_0}{2 \pi^2 \mu U R} \right],$$

wo  $D_0$  der Widerstand des Körpers in einer sonst den ganzen Raum füllenden Flüssigkeit,  $\varkappa$  eine Konstante etwa gleich 2.203, und  $\mu$  die Viskositätskonstante ist.

(Received: June 10, 1960.)

## Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiten

Von KLAUS KIRCHGÄSSNER<sup>1)</sup>, Freiburg i. Br., Deutschland

### Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der zuerst von TAYLOR [1]<sup>2)</sup> untersuchten Instabilität der laminaren, inkompressiblen Strömung zwischen zwei rotierenden coaxialen Zylindern. Die Störungen, die von einer gewissen Rotationsgeschwindigkeit des inneren Zylinders an auftreten können, bilden sich bekanntlich in Form eines in Richtung der Zylindererzeugenden periodischen Wirbelmusters aus.

Um die numerischen Auswertungen mit erträglichem Aufwand durchführen zu können, musste TAYLOR, neben anderen Annahmen wie der Kleinheit der betrachteten Störungen, verlangen, dass die Spaltbreite (Differenz der Zylinderradien) klein sei gegenüber den Krümmungsradien der Zylinder.

Die Erweiterung dieser Theorie auf den Fall beliebiger Spaltbreite gelang erstmals CHANDRASEKHAR [2] in neuester Zeit. Die von ihm angewandte Methode zur Lösung des Problems beruht auf einer auch von TAYLOR angesetzten Reihenentwicklung der Störungsmplituden nach Besselfunktionen.

In der vorliegenden Arbeit wird zur Lösung desselben Problems ein anderer Weg beschritten, der wesentlich auf der von GÖRTLER [3] und HÄMMERLIN [4]

<sup>1)</sup> Aus dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Freiburg und dem Institut für angewandte Mathematik und Mechanik der DVL an der Universität Freiburg. Diese Untersuchung wurde vom Wirtschaftsministerium des Landes Baden/Württemberg gefördert.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 29.

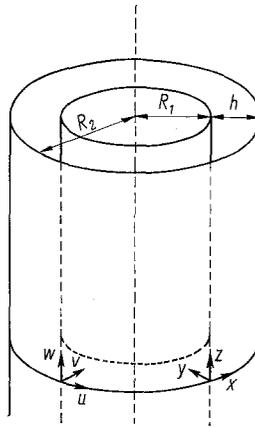
benutzten Methode aufgebaut ist. Diese Methode hat gegenüber der von CHANDRASEKHAR benutzten den Vorteil, dass der numerisch umfangreichste Teil, nämlich die Vertafelung der Greenschen Funktionen, von der speziellen Gestalt der Grundströmung unabhängig ist. Die Grundströmung wird erst im letzten Abschnitt der numerischen Auswertungen benötigt.

Wie alle auf der Grundlage kleiner Störungen behandelten Stabilitätsprobleme führt auch die vorliegende Untersuchung auf ein Eigenwertproblem, bei dem ausschliesslich der kleinste positive Eigenwert physikalische Bedeutung besitzt. Die Existenz dieses Eigenwertes wird in Strenge nachgewiesen.

Unsere Ergebnisse konnten in einem Fall mit experimentellen Resultaten von DONELLY [5] verglichen werden, wobei sich gute Übereinstimmung ergab.

### 1. Das Eigenwertproblem

Wir untersuchen die inkompressible zähe Strömung zwischen zwei unendlich langen, um ihre gemeinsame Achse rotierenden Zylindern – ihre Krümmungsradien bezeichnen wir mit  $R_1$  und  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) –, wobei wir zweckmässigerweise das in Figur 1 gezeichnete Koordinatensystem verwenden;  $u, v, w$  sind die Geschwindigkeitskomponenten in  $x, y, z$ -Richtung.



Figur 1

Das benutzte Koordinatensystem.

Da wir bei den in einer Reihe von Arbeiten wiedergegebenen Ableitungen der Grundgleichungen nicht verweilen wollen, sondern nur die benutzten Symbole und das zu diskutierende Eigenwertproblem anzugeben beabsichtigen, gehen wir von vornherein zu dimensionslosen Grössen über. Wir denken uns alle von jetzt an auftretenden variablen Längen mit der Spaltbreite  $h = R_2 - R_1$ , alle variablen Geschwindigkeiten mit der Rotationsgeschwindigkeit des inneren

Zylinders  $R_1 \omega_1$  ( $\omega_1 =$  Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders,  $\omega_2 =$  Winkelgeschwindigkeit des äusseren Zylinders) und den Druck mit  $\varrho R_1^2 \omega_1^2$  dimensionslos gemacht. Dabei steht  $\varrho$  für die Dichte. Ferner setzen wir:  $\bar{R}_i = R_i/h$ , ( $i = 1, 2$ ). Als weitere dimensionslose Grösse wird in die Gleichungen die Reynoldszahl:

$$Re = \frac{R_1 \omega_1 h}{\nu}$$

eingehen. Dabei steht  $\nu$  für die kinematische Zähigkeit.

Die stationäre Grundströmung hat dann, in dimensionsloser Form geschrieben, die Gestalt (vgl. etwa SCHLICHTING [6]):

$$u_0(y) = A (\bar{R}_2 - y) + \frac{B}{(\bar{R}_2 - y)}, \quad (1.1)$$

mit

$$A = \frac{\bar{R}_1^2 - (\omega_2/\omega_1) \bar{R}_2^2}{\bar{R}_1 (1 - 2 \bar{R}_2)}; \quad B = \frac{\bar{R}_1 \bar{R}_2^2 (1 - \omega_2/\omega_1)}{2 \bar{R}_2 - 1}.$$

Ihr entspricht eine Druckverteilung  $p_0(y)$ , für die sich aus der zweiten Navier-Stokesschen Gleichung der folgende Ausdruck ergibt:

$$p_0(y) = - \int \frac{u_0''(y)}{\bar{R}_2 - y} dy. \quad (1.2)$$

Der Grundströmung werden nun in üblicher Weise dreidimensionale Störungen in Gestalt von in  $z$ -Richtung periodischen Wirbelpaaren überlagert:

$$\left. \begin{aligned} u(y, z, t) &= u_0(y) + u_1(y) \cos \sigma z \cdot e^{\gamma t}, \\ v(y, z, t) &= v_1(y) \cos \sigma z \cdot e^{\gamma t}, \\ w(y, z, t) &= w_1(y) \sin \sigma z \cdot e^{\gamma t}, \\ p(y, z, t) &= p_0(y) + p_1(y) \cos \sigma z \cdot e^{\gamma t}. \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Hierbei gibt  $\sigma$  die Zahl der Wirbelpaare in einem Intervall der Länge  $2 \pi h$  und  $\gamma$  den Anfachungsgrad der Störungen an.

Wir beschränken uns im folgenden stets auf neutrale Störungen ( $\gamma = 0$ ) und bezeichnen für jeden Parameterwert  $\sigma$  die kleinste Reynoldszahl, für die neutrale Störungen auftreten können, mit  $Re_0(\sigma)$ . Dann ergibt sich, wie physikalisch zu erwarten, dass für  $Re < Re_0(\sigma)$  alle Störungen mit der Wirbelzahl  $\sigma$  gedämpft ( $\gamma < 0$ ) und für  $Re > Re_0(\sigma)$  angefacht ( $\gamma > 0$ ) sind. Die kleinste aus der Gesamtheit aller Zahlen  $Re_0(\sigma)$  heisse die *kritische* Reynoldszahl  $Re_{kr}$ .

Geht man mit dem Ansatz (1.3) in die Navier-Stokesschen Gleichungen ein, und linearisiert man bezüglich der Störungsamplituden, so ergibt sich nach

einigen Umformungen das folgende Eigenwertproblem (vgl. etwa WITTING [7]):

$$\begin{aligned} L[u_1(y)] &= -2 A v_1(y), \\ L^2[v_1(y)] &= 2 \sigma^2 \mu \frac{u_0(y)}{R_2 - y} u_1(y), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$u_1(0) = u_1(1) = 0; \quad v_1(0) = v_1(1) = 0; \quad \frac{dv_1(0)}{dy} = \frac{dv_1(1)}{dy} = 0,$$

mit  $\mu = Re^2$  und

$$L \equiv \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{R_2 - y} \frac{d}{dy} - \left\{ \sigma^2 + \frac{1}{(R_2 - y)^2} \right\}.$$

Aus physikalischen Gründen interessiert in diesem Zusammenhang lediglich der kleinste positive Eigenwert  $\mu_0(\sigma) = Re_0^2(\sigma)$ , dessen Existenz wir mit Hilfe der im folgenden Paragraphen bewiesenen Hilfssätze nachweisen werden.

## 2. Einige Hilfssätze zur Behandlung des Eigenwertproblems

Bei der Bestimmung des kleinsten positiven Eigenwertes von (1.4) greifen wir auf das von GÖRTLER [3] und HÄMMERLIN [4] verwendete Verfahren zurück, führen also (1.4) vermittels der Greenschen Funktionen in äquivalente Integralgleichungen über und ermitteln den gesuchten Eigenwert iterativ. Der Existenznachweis für den Eigenwert wird wie in [4] mit Hilfe eines Satzes von JENTZSCH [8] geführt, der mit einigen Voraussetzungen über den Kern, und damit in diesem Fall über die Greenschen Funktionen verknüpft ist. Diese Eigenschaften sollen im Hilfssatz 1 dieses Paragraphen bewiesen werden. Die Aussage des Hilfssatzes 2 benötigen wir später zur Untersuchung des Eigenwertverhaltens für den nur mathematisch interessierenden Grenzfall  $\sigma \rightarrow 0$ , das heisst unendlich grosser Wirbelabmessungen.

Seien  $G$  und  $H$  die zu untersuchenden Greenschen Funktionen. Sie genügen überall im Quadrat  $Q = \{0 < y < 1; 0 < \hat{y} < 1\}$  mit Ausnahme der Strecke  $y = \hat{y}$  den Differentialgleichungen:

$$L[G(y, \hat{y})] = 0; \quad L^2[H(y, \hat{y})] = 0, \quad (2.1)$$

und den homogenen Randbedingungen:

$$G(0, \hat{y}) = G(1, \hat{y}) = 0; \quad H(0, \hat{y}) = H(1, \hat{y}) = 0; \quad \frac{\partial H(0, \hat{y})}{\partial y} = \frac{\partial H(1, \hat{y})}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Die Funktion  $G$  ist überall in  $Q$  stetig. Ihre erste Ableitung besitzt für  $y = \hat{y}$  eine Unstetigkeit. Es gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial G(\hat{y} - \varepsilon, \hat{y})}{\partial y} - \frac{\partial G(\hat{y} + \varepsilon, \hat{y})}{\partial y} \right\} = 1. \quad (2.3)$$

Die Funktion  $H$  ist in  $Q$  zweimal stetig differenzierbar. Für ihre dritte Ableitung gilt an der Stelle  $y = \hat{y}$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial^3 H(\hat{y} - \varepsilon, \hat{y})}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 H(\hat{y} + \varepsilon, \hat{y})}{\partial y^3} \right\} = 1. \quad (2.4)$$

Wir beweisen nun

*Hilfssatz 1:* Für die Greenschen Funktionen  $G$  und  $H$ , mit den in den Gleichungen (2.1) bis (2.4) festgelegten Eigenschaften, gelten die folgenden Ungleichungen<sup>3)</sup>:

1.  $G(y, \hat{y}) > 0$  in  $Q$ ,
2.  $\frac{\partial G(0, \hat{y})}{\partial y} > 0$ ;  $\frac{\partial G(1, \hat{y})}{\partial y} < 0$ ;  $\hat{y} \in \hat{I} = \{0 < \hat{y} < 1\}$ ,
3.  $H(y, \hat{y}) < 0$  in  $Q$ ,
4.  $\frac{\partial^2 H(0, \hat{y})}{\partial y^2} < 0$ ;  $\frac{\partial^2 H(1, \hat{y})}{\partial y^2} < 0$ ,  $\hat{y} \in \hat{I}$ .

*Beweis:* 1. Die Funktion  $G$  kann in  $Q$ , ausgenommen auf der Strecke  $y = \hat{y}$ , weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum annehmen, da sonst die Ungleichungen

$$L[G] < 0 \text{ bzw. } L[G] > 0$$

für mindestens einen Punkt in  $Q$  gelten.  $G$  ist daher in jedem der Teilbereiche  $0 \leq y \leq \hat{y}$ ;  $\hat{y} \leq y \leq 1$  monoton. Wäre nun  $G$  im ersten der beiden Teilbereiche negativ, so folgte aus der Monotonie und aus  $G(0, \hat{y}) = 0$ :

$$\frac{\partial G(y, \hat{y})}{\partial y} \leq 0 \quad \text{für } 0 < y < \hat{y},$$

und wegen der Stetigkeit von  $G$  und  $G(1, \hat{y}) = 0$ :

$$\frac{\partial G(y, \hat{y})}{\partial y} \geq 0 \quad \text{für } \hat{y} < y < 1.$$

Diese beiden Ungleichungen stehen aber im Widerspruch zur Beziehung (2.3), woraus sich also  $G \geq 0$  in  $Q$  ergibt.

2. Längs der Strecken  $y = 0$  und  $y = 1$  gilt daher sicher für die einseitigen Ableitungen:

$$\frac{\partial G(0, \hat{y})}{\partial y} \geq 0; \quad \frac{\partial G(1, \hat{y})}{\partial y} \leq 0; \quad \hat{y} \in \hat{I}.$$

<sup>3)</sup> Wie der Beweis zeigt, gilt die Behauptung dieses Satzes auch für den Fall, dass der Operator  $L$  die allgemeine Gestalt

$$\bar{L} \equiv a(y) \frac{d^2}{dy^2} + b(y) \frac{d}{dy} + c(y)$$

besitzt, wenn nur  $a$ ,  $b$  und  $c$  stetig im betrachteten Bereich und  $a > 0$ ,  $c < 0$  ist.

Angenommen nun, es gebe ein  $\hat{y}_0 \in \hat{I}$  so, dass in einer der beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen steht, dann folgt aus (2.1) sowie aus der Stetigkeit und Monotonie von  $G$ :

$$G(y, \hat{y}_0) \equiv 0, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

wiederum im Widerspruch zu (2.3). Hieraus ergeben sich aber sofort die Ungleichungen der Behauptung 2, und damit  $G > 0$  im Innern von  $Q$ .

3. Setzen wir vorübergehend:

$$L[H] = K, \quad (2.5)$$

so befriedigt  $K$  die Differentialgleichung

$$L[K] = 0; \quad (2.6)$$

a)  $K$  ist stetig, und  $\partial K/\partial y$  besitzt längs der Strecke  $y = \hat{y}$  eine Unstetigkeit der Form (2.3).  $K$  kann in jedem der Gebiete  $0 < y < \hat{y}$ ;  $\hat{y} < y < 1$ ,  $\hat{y} \in \hat{I}$  nach unseren Überlegungen über  $G$  weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum annehmen und daher in  $I = \{0 < y < 1\}$  höchstens 2 Nullstellen besitzen.  $H$  selbst verschwindet in keinem Teilintervall von  $I$  identisch, was sich leicht mit Hilfe der oben erwähnten Eigenschaften von  $K$  und Gleichung (2.4) beweisen lässt.

b) Besitzt  $H$  für ein  $\hat{y} = \hat{y}_0$  in  $I$   $n$  Nullstellen, wobei eine  $k$ -fache Nullstelle nur 1mal gezählt wird, so hat  $K$  in  $I$  mindestens  $n + 2$  Nullstellen. Um dies einzusehen, hat man nur zu beachten, dass  $H$  in jedem der durch die Nullstellen begrenzten  $n + 1$  Teilintervalle von  $I$  mindestens ein Extremum annimmt. Zwischen je zwei dieser Extrema liegt sicher eine Nullstelle von  $K$ , wie man sich leicht überlegt. Ferner wechselt  $K$  zwischen den Randpunkten  $y = 0$  und  $y = 1$  und den ihnen benachbarten Extremstellen nochmals das Vorzeichen ( $H \not\equiv 0$  in der Umgebung dieser Punkte).

Hieraus folgt aber sofort das Behauptete.

c) Da aber nach (a)  $K$  in  $I$  nicht mehr als zwei Nullstellen besitzen kann, gilt  $n = 0$ .

Nimmt man nun an,  $H$  sei für ein  $\hat{y} = \hat{y}_0$  im ganzen Intervall  $I$  positiv, so existiert mindestens ein Punkt  $(y_0, \hat{y}_0)$ , wo  $H$  ein positives Maximum annimmt.  $K$  ist dann an dieser Stelle negativ, während es auf Grund der Randbedingungen (2.2) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Randpunkte  $y = 0$  und  $y = 1$  positiv ist ( $H \not\equiv 0$  in der Umgebung dieser Punkte). Hieraus und mit Hilfe der Beziehung (2.3) schliesst man, dass dies nur dann der Fall sein kann, wenn  $K$  für ein  $y = y_1 \neq \hat{y}_0$  ein negatives Minimum besitzt, was im Widerspruch zu den unter (a) angeführten Eigenschaften von  $K$  steht.

Damit ist gezeigt, dass für  $H$  in  $Q$  die Ungleichung:

$$H(y, \hat{y}) < 0$$

gilt.

4. Zum Beweis dieses letzten Teiles der Behauptung nehmen wir an, es existiere ein  $\hat{y}_0 \in \hat{I}$ , für welches etwa

$$\frac{\partial^2 H(0, \hat{y}_0)}{\partial y^2} = 0$$

ist. Dann gilt aber  $\partial K / \partial y < 0$  in diesem Punkt, wegen  $H \not\equiv 0$ . Dies ist aber wegen der auch für  $K$  geltenden Beziehung (2.3) und wegen der unter (a) aufgeführten Eigenschaften von  $K$  unmöglich.

Damit ist Hilfssatz 1 vollständig bewiesen.

Wir bezeichnen mit  $L_0$  den Operator, der aus  $L$  hervorgeht, wenn  $\sigma = 0$  gesetzt wird:

$$L_0 \equiv \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{R_2 - y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{(R_2 - y)^2}. \quad (2.7)$$

Die Greenschen Funktionen der Operatoren  $L_0$  und  $L_0^2$ , die den Randbedingungen (2.2) genügen, nennen wir  $G_0$  und  $H_0$ ; dann gilt:

*Hilfssatz 2:* Lässt man  $\sigma$  gegen Null konvergieren, so gilt gleichmässig im Bereich  $Q$ :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} |G(y, \hat{y}) - G_0(y, \hat{y})| = 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} |H(y, \hat{y}) - H_0(y, \hat{y})| = 0.$$

*Beweis:* Die Funktion  $D_1 = G - G_0$  ist in  $Q$  zweimal stetig differenzierbar und befriedigt die Differentialgleichung:

$$L[D_1(y, \hat{y})] = \sigma^2 G_0(y, \hat{y}).$$

Führt man diese Beziehung durch die Greensche Funktion  $G$  in Integralform über, so ergibt sich:

$$D_1(y, \hat{y}) = -\sigma^2 \int_0^1 G(y, \bar{y}) G_0(\bar{y}, \hat{y}) d\bar{y}.$$

Bezeichnet  $G_{0M}$  das Maximum von  $G_0$  im Bereich  $Q$ , so folgt, da  $G$  nach Hilfssatz 1 in  $Q$  positiv ist:

$$|D_1(y, \hat{y})| < \sigma^2 G_{0M} d_1(y), \quad (2.8)$$

mit

$$d_1(y) = \int_0^1 G(y, \bar{y}) d\bar{y}.$$

$d_1$  genügt der Differentialgleichung:

$$L[d_1(y)] = -1, \quad (2.9)$$

was man sehr leicht verifiziert. Hieraus gewinnt man aber die Abschätzung:

$$d_1(y) < \hat{d}_1 = \frac{1}{\sigma^2 + 1/\bar{R}_2^2}. \quad (2.10)$$

Es gilt nämlich:

$$L[\hat{d}_1] \leq -1 \text{ in } Q.$$

Da  $d_1(y)$  für  $y = 0$  und  $y = 1$  verschwindet, müsste, falls  $d_1 > \hat{d}_1$  an einer Stelle gilt, mindestens ein  $y_0$  existieren, wo  $d_1$  ein positives Maximum annimmt und  $d_1(y_0) > \hat{d}_1$  ist. Dort bestünde dann aber die Ungleichung:

$$L[d_1(y)] < L[\hat{d}_1] \leq -1,$$

in Widerspruch zu Gleichung (2.9).

Aus (2.8) und (2.10) folgt nun:

$$|D_1(y, \hat{y})| < \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 1/\bar{R}_2^2} G_{0M}.$$

Da  $G_{0M}$  von  $\sigma$  nicht abhängt, folgt hieraus:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} |D_1(y, \hat{y})| = \lim_{\sigma \rightarrow 0} |G(y, \hat{y}) - G_0(y, \hat{y})| = 0,$$

gleichmässig in  $Q$ .

Den zweiten Teil unserer Behauptung beweisen wir ganz entsprechend. Wir setzen:  $D_2 = H - H_0$  und erhalten für  $D_2$  die Differentialgleichung:

$$L^2[D_2] = 2\sigma^2 L_0[H_0] - \sigma^4 H_0. \quad (2.11)$$

Da  $H_0$  in  $Q$  und bei einseitiger Annäherung an den Rand von  $Q$  stetig differenzierbar ist, können wir  $L_0[H_0]$  und  $H_0$  in  $Q$  nach oben abschätzen:

$$|L_0[H_0(y, \hat{y})]| < C, \quad |H_0(y, \hat{y})| < H_{0M}.$$

(2.11) wird wiederum mit Hilfe von  $H$  in Integralform überführt und  $|D_2|$  nach oben abgeschätzt:

$$|D_2(y, \hat{y})| < d_2(y) \{2\sigma^2 C + \sigma^4 H_{0M}\},$$

mit

$$d_2(y) = -\int_0^1 H(y, \bar{y}) d\bar{y}.$$

$d_2$  erfüllt die Differentialgleichung:

$$L^2[d_2(y)] = 1 .$$

Setzt man

$$L[d_2(y)] = \delta_2(y) ,$$

so gilt

$$L[\delta_2(y)] = 1 ,$$

und es ist  $\delta_2$  für  $y = 0$  und  $y = 1$  positiv, wie aus der Aussage 4 des Hilfssatzes 1 folgt. Wendet man die Überlegungen, die wir oben bei der Abschätzung von  $d_1$  angestellt haben, auf  $\delta_2$  und  $d_2$  an, so ergibt sich:

$$d_2(y) < \frac{1}{(\sigma^2 + 1/\bar{R}_2^2) \{\sigma^2 + 1/(\bar{R}_2 - 1)^2\}} ,$$

und hieraus für  $D_2$ :

$$|D_2(y, \hat{y})| < \frac{2\sigma^2 C + \sigma^4 H_{0M}}{(\sigma^2 + 1/\bar{R}_2^2) \{\sigma^2 + 1/(\bar{R}_2 - 1)^2\}} .$$

Lässt man  $\sigma$  gegen Null gehen, so folgt gleichmässig in  $Q$ :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} |D_2(y, \hat{y})| = \lim_{\sigma \rightarrow 0} |H(y, \hat{y}) - H_0(y, \hat{y})| = 0 ,$$

womit der Satz bewiesen ist.

### 3. Berechnung der Greenschen Funktionen und Existenzbeweis für den gesuchten Eigenwert

Um das in 2 angekündigte Verfahren zur Bestimmung des kleinsten Eigenwerts anwenden zu können, müssen wir die Greenschen Funktionen  $G$  und  $H$  kennen. Zu diesem Zweck benötigen wir zunächst ein Fundamentalsystem von Lösungen der Operatoren  $L$  und  $L^2$ . Für  $L$  bieten sich hierfür die modifizierten Besselfunktionen 1. Ordnung  $I_1$  und  $K_1$  an, deren Wronski-Determinante  $\Delta_1$  den Wert

$$\Delta_1(r) = -\frac{1}{r} \quad \text{mit} \quad r = \sigma(\bar{R}_2 - y)$$

besitzt. Hieraus lassen sich aber ohne Schwierigkeit vier linear unabhängige Lösungen von  $L^2$  bestimmen. Sie lauten:

$$\varphi_1(r) = I_1(r) ,$$

$$\varphi_2(r) = K_1(r) ,$$

$$\varphi_3(r) = A_1(r) I_1(r) - A_2(r) K_1(r) ,$$

$$\varphi_4(r) = A_3(r) I_1(r) - A_1(r) K_1(r) ,$$

mit den Abkürzungen

$$A_1(r) = \int_{r_1}^r \varrho I_1(\varrho) K_1(\varrho) d\varrho,$$

$$A_2(r) = \int_{r_1}^r \varrho [I_1(\varrho)]^2 d\varrho,$$

$$A_3(r) = \int_{r_1}^r \varrho [K_1(\varrho)]^2 d\varrho,$$

wobei wir für  $r_1$  den Wert  $r_1 = \sigma (\overline{R_2} - 1)$  gewählt haben. Für die Wronski-Determinante  $\Delta$  der vier Funktionen  $\varphi_i(r)$  gilt:

$$\Delta_2(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Die Greenschen Funktionen  $G$  und  $H$  haben dann die folgende Gestalt:

$$G(r, \hat{r}) = \frac{\hat{r}}{N_1} \left\{ \begin{array}{l} [I_1(r_2) K_1(\hat{r}) - K_1(r_2) I_1(\hat{r})] [I_1(r_1) K_1(r) - K_1(r_1) I_1(r)] \\ \text{für } r \leq \hat{r}; \\ [I_1(r_2) K_1(r) - K_1(r_2) I_1(r)] [I_1(r_1) K_1(\hat{r}) - K_1(r_1) I_1(\hat{r})] \\ \text{für } r \geq \hat{r}; \end{array} \right.$$

$$H(r, r) = \hat{r} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \varphi_2(\hat{r}) - \frac{1}{N_2} [A_3(r_2) \varphi_3(\hat{r}) - A_1(r_2) \varphi_4(\hat{r})] \right\} \varphi_3(r) \\ + \left\{ -\varphi_1(\hat{r}) + \frac{1}{N_2} [A_1(r_2) \varphi_3(\hat{r}) - A_2(r_2) \varphi_4(\hat{r})] \right\} \varphi_4(r) \\ \text{für } r \leq \hat{r}; \\ \left\{ \varphi_2(r) - \frac{1}{N_2} [A_3(r_2) \varphi_3(r) - A_1(r_2) \varphi_4(r)] \right\} \varphi_3(\hat{r}) \\ + \left\{ -\varphi_1(r) + \frac{1}{N_2} [A_1(r_2) \varphi_3(r) - A_2(r_2) \varphi_4(r)] \right\} \varphi_4(\hat{r}) \\ \text{für } r \geq \hat{r}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

mit

$$r = \sigma (\overline{R_2} - y); \quad \hat{r} = \sigma (\overline{R_2} - \hat{y}); \quad r_1 = \sigma (\overline{R_2} - 1); \quad r_2 = \sigma \overline{R_2},$$

$$N_1 = I_1(r_1) K_1(r_2) - I_1(r_2) K_1(r_1); \quad N_2 = [A_1(r_1)]^2 - A_2(r_2) A_3(r_2).$$

Mit Hilfe von  $G$  und  $H$  lässt sich nun (1.4) in ein System von Integralgleichungen überführen:

$$u_1(y) = 2 A \int_0^1 G(y, \hat{y}) v_1(\hat{y}) d\hat{y}, \quad v_1(y) = 2 \sigma^2 \mu \int_0^1 H(y, \hat{y}) \frac{u_0(\hat{y})}{R_2 - \hat{y}} d\hat{y},$$

oder zusammengefasst

$$v_1(y) = \mu \int_0^1 M(y, \hat{y}) v_1(\hat{y}) d\hat{y}, \quad (3.3)$$

mit dem Kern

$$M(y, \bar{y}) = 4 \sigma^2 A \int_0^1 H(y, \bar{y}) \frac{u_0(\bar{y})}{R_2 - \bar{y}} G(\bar{y}, \hat{y}) d\bar{y}. \quad (3.31)$$

Greift man auf die Aussage des Hilfssatzes 1 des vorigen Paragraphen zurück, so erkennt man, dass das Vorzeichen des Kerns  $M$  durch das Vorzeichen von  $u_0(y)$  und von  $A$  bestimmt ist; denn  $H$  und  $G$  besitzen im Quadrat  $Q$  keine Nullstelle. Wir beschränken uns nun für den Existenzbeweis auf solche Grundströmungen, für die  $A < 0$  und  $u_0 \geq 0$  gilt.

Während mit der letzten Ungleichung der für die Stabilitätstheorie durchaus bedeutungsvolle Fall gegensinnig rotierender Zylinder ausgeschlossen wird und damit die Existenzfrage des Eigenwertes hierfür offen bleibt, kann dagegen der Bereich  $A \geq 0$ , das heisst  $\omega_2/\omega_1 \geq R_2^2/R_1^2$  ausser acht gelassen werden, ohne dass dadurch die Klasse der zugelassenen und für die Stabilitätstheorie interessanten Grundströmungen eingeschränkt wird. Man weiss nämlich auf Grund eines Rayleighschen Stabilitätskriteriums, dass alle möglichen Strömungen der Taylorschen Versuchsanordnung, für die  $A \geq 0$  gilt, gegenüber Störungen des hier betrachteten Typs stabil sind. Dieses Kriterium wurde für reibende Flüssigkeiten erstmals von J. L. SYNGE [9] bewiesen.

Mit der Aussage von Hilfssatz 1 aus § 2 und den oben gemachten Annahmen:  $u_0 \geq 0$  und  $A < 0$  ( $\omega_2/\omega_1 < R_2^2/R_1^2$ ) lassen sich jetzt für den Kern  $M$  aus (3.31) sofort die folgenden Beziehungen verifizieren:

$$M(y, \hat{y}) > 0 \quad \text{in } Q, \quad M(0, \hat{y}) = M(1, \hat{y}) = M(y, 0) = M(y, 1) = 0.$$

$M$  ist stetig und beschränkt und daher quadratisch integabel. Nun verbürgt aber ein Satz von JENTZSCH<sup>4)</sup>, dass jeder quadratisch integrabler Kern, der höchstens in einer Menge vom Mass Null verschwindet und sonst positiv ist,

<sup>4)</sup> Der Satz von JENTZSCH wurde zuerst von HÄMMERLIN [4] zum Beweis der Existenz eines kleinsten positiven Eigenwertes herangezogen, und zwar für den Nachweis der Instabilität einer Grenzschichtströmung längs einer konkaven Wand gegenüber Görtler-Wirbeln. Im Falle der Taylorschen Zylinder wurde die obige Aussage unter der Einschränkung  $h \ll R_2$  von WITTING [7] bewiesen.

einen einfachen und vom Betrag kleinsten Eigenwert besitzt. Ferner hat die zugehörige Eigenfunktion im ganzen Intervall dasselbe Vorzeichen.

Mithin existiert für jedes  $\sigma > 0$  ein dem Betrag nach kleinster positiver Eigenwert  $\mu_0 = Re_0^2$  von (3.3).  $v_1(y)$  wechselt im Intervall  $I$  das Vorzeichen nicht. Dasselbe gilt nach (3.2) und Hilfssatz 1 dann auch für  $u_1$ .

#### 4. Numerische Ergebnisse

Zur Berechnung des gesuchten Eigenwertes definieren wir das folgende Iterationsverfahren:

$$v_1^{(n)}(y) = \int_0^1 M(y, \hat{y}) v_1^{(n-1)}(\hat{y}) d\hat{y}. \quad (4.1)$$

Die Folge

$$\frac{l[v_1^{(n-1)})]}{l[v_1^{(n)})]},$$

wobei  $l[v_1]$  ein beliebiges lineares Funktional in  $v_1$  bezeichnet, konvergiert dann für wachsendes  $n$  gegen den gesuchten Eigenwert vom kleinsten Betrage, vorausgesetzt, dass die nullte Näherung  $v_1^{(0)}$  an der zum Eigenwert gehörigen Eigenfunktion beteiligt ist<sup>5)</sup>. Diese Bedingung kann bei der hier vorgenommenen numerischen Durchführung des Iterationsverfahrens als erfüllt angesehen werden.

Da das Verfahren auch dann konvergiert, wenn  $u_0$  das Vorzeichen wechselt, die Zylinder also gegensinnig rotieren, sollen sich die numerischen Auswertungen auch auf diesen Fall erstrecken, obwohl die Existenz des gesuchten Eigenwertes hierfür nicht gesichert wurde.

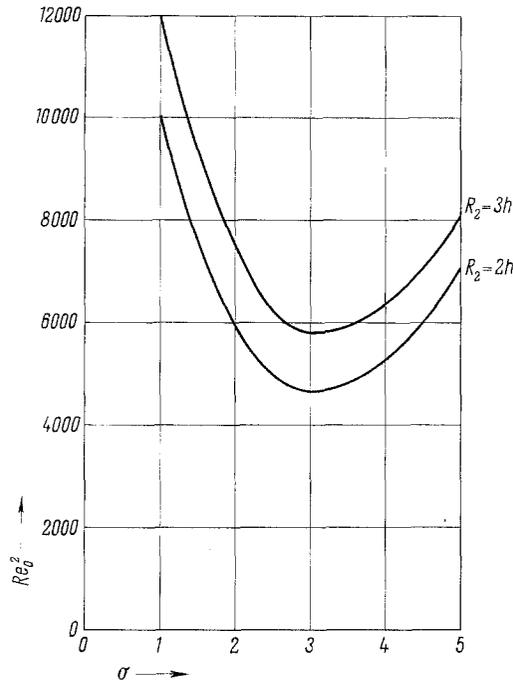
Zunächst wurde der Eigenwert  $\mu_0 = Re_0^2$  für die Parameterwerte

$$h = \frac{R_2}{2}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0; \quad h = \frac{R_2}{3}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0$$

in Abhängigkeit von  $\sigma$  berechnet ( $\sigma = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Das Ergebnis ist in Figur 2 graphisch dargestellt. Der Minimalwert beider Kurven  $\mu_{kr} = Re_{kr}^2$  liegt, wie im Taylorschen Grenzfall ( $h \ll R_i$ ) etwa bei  $\sigma = 3$ . Die Wirbeldicke der am frühesten angefachten Störungen wächst also proportional zu der Spaltbreite  $h$ . ( $\sigma$  ist die mit  $h$  dimensionslos gemachte Wirbelzahl). Wir geben hier noch die numerisch ermittelten Werte von  $Re_{kr}$ , also die Minimalwerte der in Figur 2 gezeichneten neutralen Kurven, an:

$$Re_{kr} = 68,30 \quad \text{für} \quad h = \frac{R_2}{2}, \quad Re_{kr} = 76,34 \quad \text{für} \quad h = \frac{R_2}{3}.$$

<sup>5)</sup> Zum Begriff der Beteiligung vgl. WIELANDT [10].

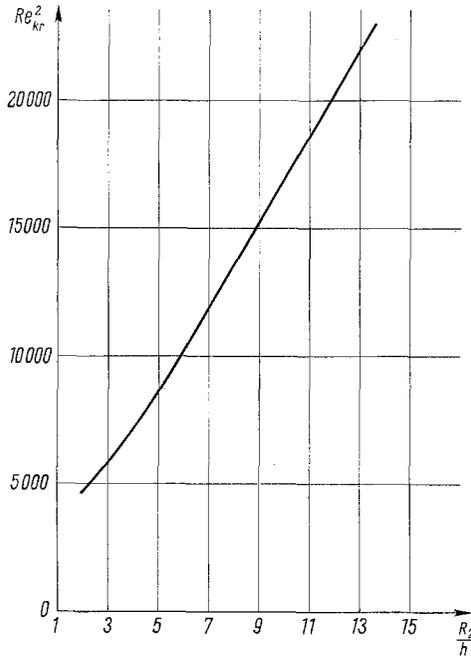


Figur 2

Das Quadrat der Reynoldszahl in Abhängigkeit von der Wirbelzahl  $\sigma$  ( $R_2 = 2h$ ;  $R_2 = 3h$ ;  $\omega_2/\omega_1 = 0$ ).

Ein anschauliches Bild vom Zusammenhang zwischen der kritischen Reynoldszahl  $Re_{k_r}$  und der relativen Spaltbreite  $h/R_2$  erhält man, wenn man, wie es in Figur 3 geschehen ist, neben den oben bestimmten Werten für  $Re_{k_r}^2$  die Taylorschen Resultate benutzt, die das asymptotische Verhalten von  $Re_{k_r}^2$  für  $h/R_2 \rightarrow 0$  wiedergeben. Weiterhin kann die von WITTING in [7] berechnete Korrektur des Eigenwertverhaltens von der Ordnung  $O(h^2/R_2^2)$  verwendet werden. Aus Figur 3, in der aus graphischen Gründen  $Re_{k_r}^2$  in Abhängigkeit von der reziproken relativen Spaltbreite  $R_2/h$  dargestellt ist, ersieht man nun, dass  $Re_{k_r}^2$  mit wachsender relativer Spaltbreite fällt; jedoch schwächer als linear in  $R_2/h$ , wie es nach der Taylorschen Theorie zu erwarten gewesen wäre.

Die kritische  $Re$ -Zahl wurde ausserdem für verschiedene Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_2/\omega_1$  bestimmt. Das Minimum von  $Re_{k_r}^2$  liegt, wie Figur 4 zeigt, in beiden Fällen in der Nähe des Wertes  $\omega_2/\omega_1 = -0,1$ . Die Grundströmung ist daher, für die betrachteten endlichen Spaltbreiten im Gegensatz zum Taylorschen Grenzfall  $h \gg R_2$ , bei variablem  $\omega_2/\omega_1$  am frühesten instabil, wenn der äussere Zylinder mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2 = -0,1 \omega_1$  rotiert.



Figur 3

Das Quadrat der kritischen Reynoldszahl in Abhängigkeit von der reziproken relativen Spaltbreite ( $\sigma = 3; \omega_2/\omega_1 = 0$ ).

Die numerischen Ergebnisse erlauben für den Fall  $R_2 = 2h$  einen Vergleich mit einem experimentellen Resultat von DONELLY [5], der in seinen Untersuchungen an Stelle der hier ermittelten Reynoldszahl die kritische Taylorzahl  $Ta$  angibt. Diese ist definiert durch die Gleichung

$$Ta = 4 \left( \frac{\omega_1 R_1^2}{\nu} \right)^2 \frac{(1 - \omega_2/\omega_1) (1 - R_2^2 \omega_2/R_1^2 \omega_1)}{[1 - R_1^2/R_2^2]^2}$$

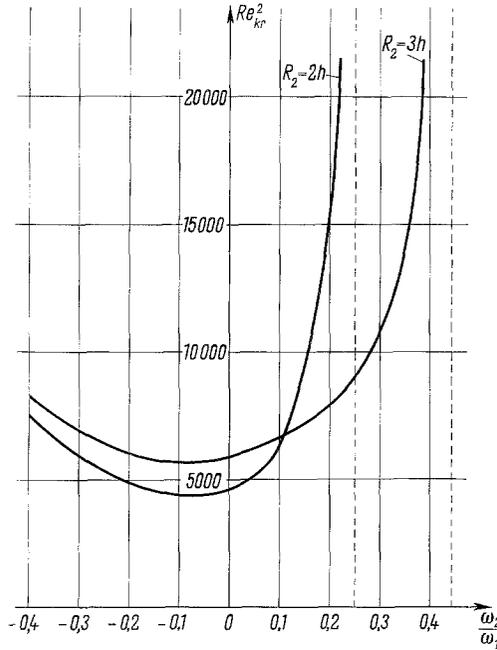
Für  $\omega_2/\omega_1 = 0$  und  $h = R_2/2$  ergibt sich hieraus:

$$Ta = \frac{64}{9} \left( \frac{R_1^2 \omega_1}{\nu} \right)^2$$

Umgerechnet auf die Reynoldszahl  $Re = R_1 \omega_1 h/\nu$  lautet DONELLY'S Ergebnis in diesem Fall:

$$Ta_{kr} = \frac{64}{9} \left( \frac{R_1^2 \omega_1}{\nu} \right)_{kr}^2 = \frac{64}{9} Re_{kr}^2 = 32780 \pm 130.$$

Durch Multiplikation der oben berechneten Grösse  $Re_{kr}^2 = (68,30)^2$  mit dem



Figur 4

Das Quadrat der kritischen Reynoldszahl in Abhängigkeit vom Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_2/\omega_1$  ( $\sigma = 3$ ;  $R_2 = 2h$ ;  $R_2 = 3h$ ).

Faktor 64/9 ergibt sich:

$$\frac{64}{9} Re_{kr}^2 = Ta_{kr} = 33173.$$

Das errechnete und das experimentell bestimmte  $Ta_{kr}$  weichen also um etwa 1% voneinander ab.

CHANDRASEKHAR gibt in [2] als berechneten Wert  $Ta_{kr} = 33100$  an, dessen prozentuale Abweichung vom experimentellen Wert um ein Geringes kleiner als der hier ermittelte Wert ist. Letzterer liesse sich jedoch durch Verwendung einer genaueren Integrationsmethode beim Iterationsverfahren weiter verbessern.

Zum Schluss soll hier noch das Verhalten des Eigenwertes  $\mu_0 = Re_0^2$  für  $\sigma \rightarrow 0$  bestimmt werden, das heisst für den nur mathematisch interessierenden Grenzfall unendlich gross werdender Wirbelabmessungen.

Wir betrachten zunächst die Greenschen Funktionen in diesem Grenzfall. Dazu ziehen wir die Aussage des Hilfssatzes 2 heran, wonach die Funktionen  $G$  und  $H$  für  $\sigma \rightarrow 0$  gleichmässig gegen die Greenschen Funktionen  $G_0$  und  $H_0$  der Operatoren  $L_0$  und  $L_0^2$  streben. Fasst man nun  $\sigma^2 \mu_0$  in (3.3) zu einem neuen

Eigenwert  $\bar{\mu}_0$  zusammen, so besitzt  $\mu_0$  im Grenzfall  $\sigma = 0$  einen endlichen Grenzwert. Dies folgt aus der Tatsache, dass sich der Eigenwert bei gleichmässig stetiger Veränderung des Kerns stetig ändert (vgl. BÜCKNER [11]). Der Wert von  $\bar{\mu}_0$  für  $\sigma = 0$  ergibt sich mit Hilfe des oben beschriebenen Iterationsverfahrens aus der Integralgleichung (3.3), wenn man dort  $G$  durch  $G_0$  und  $H$  durch  $H_0$ <sup>6)</sup> ersetzt.

Für das asymptotische Verhalten von  $\mu_0$  selbst folgt dann:

$$\mu_0 = \frac{\bar{\mu}_0}{\sigma^2} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0, \quad (\bar{\mu} = \text{const}),$$

ein Resultat, das insbesondere auch für den Taylorschen Grenzfall  $h \ll R_2$  gilt und übrigens auch für die Görtlersche Theorie der Grenzschichtinstabilität an einer konkaven Wand. Im ersten Fall wurde es von WITTING [7], im zweiten Falle von HÄMMERLIN [12] bewiesen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. I. TAYLOR, *Stability of a Viscous Liquid Contained Between two Rotating Cylinders*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, [A] 223, 289 (1923).
- [2] S. CHANDRASEKHAR, *The Stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders*, Proc. Roy. Soc. [A], 246, 301 (1958).
- [3] H. GÖRTLER, *Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgruppe I, Neue Folge 2, 1 (1940).
- [4] G. HÄMMERLIN, *Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden*, J. Rat. Mech. Anal. 4, 279 (1955).
- [5] R. J. DONNELLY, *Experiments on the Stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders*, Proc. Roy. Soc. [A], 246, 312 (1958).
- [6] H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, 3. Auflage (Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1958) S. 69.
- [7] H. WITTING, *Über den Einfluss der Stromlinienkrümmung auf die Stabilität laminarer Strömungen*, Arch. Rat. Mech. Anal. 2, 243 (1958).
- [8] R. JENTZSCH, *Über Integralgleichungen mit positivem Kern*, J. Math. 141, 235 (1912).
- [9] J. L. SYNGE, *On the Stability of a Viscous Liquid Between Rotating Coaxial Cylinders*, Proc. Roy. Soc. [A], 167, 250 (1938).
- [10] H. WIELANDT, *Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten Eigenwertaufgaben*, Math. Z. 50, 93 (1944).
- [11] H. BÜCKNER, *Die praktische Behandlung von Integralgleichungen*, Ergebnisse der Angew. Math., Bd. I, (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952), S. 81.
- [12] G. HÄMMERLIN, *Zur Theorie der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten*, ZAMP 7, 156 (1956).

<sup>6)</sup>  $G_0$  und  $H_0$  besitzen eine ähnliche Gestalt wie  $G$  und  $H$ . Sie gehen aus diesen hervor, wenn man in (3.1)  $I_1$  durch  $I_0$ ,  $K_1$  durch  $K_0$  und  $r$  durch  $\varrho = \bar{R}_2 - \gamma$  ersetzt.

### Summary

An investigation is made of the instability of stationary flow between two rotating cylinders for any gap distance. Previous work on this problem, viz. the Taylor theory, has been done with the restriction of small gaps. Moreover, in contrast to the recent work of S. CHANDRASEKHAR [2], who has also analysed this problem, the method used is independent of the basic flow and is therefore valid for all flows between two coaxial cylinders. In fact, it can even be used for the analysis of the flow in a curved channel.

The major item of physical interest is the critical Reynoldsnumber, i. e. the value of the Reynoldsnumber where small disturbances are amplified for the first time. The value of this parameter is determined by the smallest positive eigenvalue of the boundary value problem. An existence proof is made for this eigenvalue for any wavenumber and for all possible cases of cylindrical flow, with the exception of the case where the cylinders rotate in opposite directions. The results are depicted in a convenient form, where the critical Reynoldsnumber is the dependent variable and the gap distance and the angular velocity ratio of the two cylinders are the independent variables respectively.

A comparison with experiment is made for the case where the ratio of the two radii is 2:1 and the outer cylinder is at rest. The agreement with the theory is good; the noticeable error being approximately 1%.

(Eingegangen: 20. April 1960.)

## Photoelastic Calculations by a Complex Variable Method

By JOHN A. LEWIS and HENRY O. POLLAK, Murray Hill, N. J., USA<sup>1)</sup>

### 1. Introduction

From photoelastic observations of isochromatics and isoclinics, one may determine the principal stress difference,  $p - q$ , and the principal angle  $\alpha$  at each point of a slab of transparent, elastic material in a state of plane stress. The shear stress  $\sigma_{xy}$  and the difference of the normal stresses  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  may be calculated immediately from the relations

$$2 \sigma_{xy} = (p - q) \sin 2\alpha, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = (p - q) \cos 2\alpha. \quad (1.2)$$

or, in complex form,

$$2 w = \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2 i \sigma_{xy} = - (p - q) e^{-2i\alpha}, \quad (1.3)$$

where  $w$  is the 'conjugate stress deviator' (see, e. g. [1]<sup>2)</sup>).

<sup>1)</sup> Bell Telephone Laboratories, Inc.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 37.