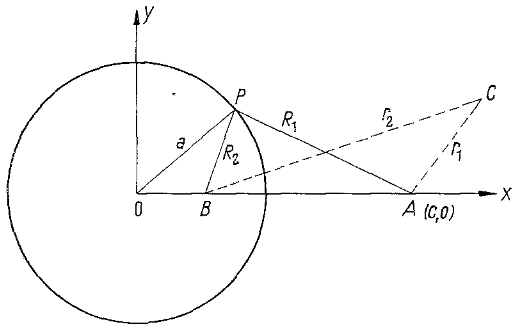

A circular hole with fixed edge in an infinite plate.

REFERENCES

[1] J. N. Goodier, Phil. Mag. *23*, 1017 (1937).
[2] B. Sen, Proc. Roy. Soc., Lond. [A] *187*, 87 (1946).

Zusammenfassung

Zweck dieser Mitteilung ist die Herleitung einer direkten Methode für die Lösung des zweiten Randwertproblems in einer elastischen Scheibe mit kreisförmiger Begrenzung. Zur Veranschaulichung der Methode wird das Problem der unendlichen Scheibe mit einer thermoelastischen Verzerrungsquelle in endlichem Abstand von einem kreisförmigen Loch mit fixiertem Rand gelöst.

(Received: February 4, 1957.)

Elementare Fälle des Dirichletschen Problems für elliptische Gebiete der Ebene

Von Václav Vodička, Pilsen, CSR

Es ist nicht allgemein bekannt, dass und wie sich manche interessante Probleme der Laplaceschen Gleichung auf ganz elementarem Wege lösen lassen. Das zugehörige Verfahren soll hier für den Fall spezieller Bedingungen auf der Peripherie eines elliptischen Grundgebietes durchgeführt werden.

1. *Problemstellung.* Es sei $f(x, y)$ ein Polynom vom beliebigen Grade $n \geqq 0$. Man fragt nach der Lösung $u(x, y)$ der Potentialaufgabe:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{im Gebiete} \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leqq 0 \,, \\ &u(x, y) = f(x, y) \quad \text{auf der Ellipse} \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

2. *Lösung.* Die Grundlage zur elementaren Behandlung unseres Problems bilden zwei bekannte Sätze der Algebra, die wir ohne Beweis in einer für folgende Zwecke passenden Form aussprechen wollen.

Satz 1. *Ein Polynom $\varphi(x, y)$ n-ten Grades hat dann und nur dann überall auf der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ den Wert Null, wenn*

$$\varphi(x, y) = (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)\, \psi(x, y); \tag{2}$$

hierbei ist $\psi(x, y)$ beliebiges Polynom vom Grade $n - 2$, falls $n \geq 2$ und $\psi(x, y) \equiv 0$ für $n \leqq 1$.

Satz 2. *Weiss man, dass ein Polynom $\varphi(x, y)$ n-ten Grades ($n \geqq 0$) mit der ganzen rationalen Funktion $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2$ mindestens $2n + 1$ verschiedene Nullstellen gemeinsam hat, so ist $\varphi(x, y) = 0$ überall auf der Ellipse*

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0\,,$$

und nach Satz 1 lässt sich dann $\varphi(x, y)$ in der Form (2) ausdrücken.

Mit einer Nullstelle irgendeiner Funktion $F(x, y)$ meinen wir natürlich jedes Zahlenpaar (x, y) mit der Eigenschaft $F(x, y) = 0$.

Nunmehr kehren wir wieder zum Problem (1) zurück und setzen die Lösung $u(x, y)$ mit noch unbekannten $2n + 1$ Koeffizienten $\gamma_0, \gamma_\nu, \gamma'_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots, n$) in der Form

$$u(x, y) = \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{n} [\gamma_\nu\, p_\nu(x, y) + \gamma'_\nu\, q_\nu(x, y)] \tag{3}$$

voraus. Hierin sind

$$p_\nu(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} (-1)^\lambda \binom{\nu}{2\lambda} x^{\nu-2\lambda} y^{2\lambda}, \quad q_\nu(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} (-1)^\lambda \binom{\nu}{2\lambda+1} x^{\nu-2\lambda-1} y^{2\lambda+1} \tag{3.1}$$

die durch

$$(x + i\,y)^\nu = p_\nu(x, y) + i\, q_\nu(x, y) \tag{3.2}$$

definierten harmonischen Grundpolynome, und $[r]$ bedeutet ganz allgemein den ganzen Teil der Zahl r.

Die Beiwerte γ aus (3) bestimmen sich nun einfach aus dem linearen Gleichungssystem

$$u(x_s, y_s) = \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{n} [\gamma_\nu\, p_\nu(x_s, y_s) + \gamma'_\nu\, q_\nu(x_s, y_s)] = f(x_s, y_s) \quad (s = 1, 2, \dots, 2n + 1), \tag{4}$$

worin (x_s, y_s); $s = 1, 2, \dots, 2n + 1$ beliebige untereinander verschiedene Punkte der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ sind. In allen praktisch wichtigen Fällen sind die (x_s, y_s) immer so wählbar, dass die Beziehungen (4) und damit auch alle folgenden Rechnungen verhältnismässig einfach ausfallen.

Es ist leicht einzusehen, dass die Gleichungen (4) lösbar sind, und das Ergebnis der Einsetzung der daraus berechneten Werte γ in (3) schreibt sich dann in Form der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} 1, & p_1(x, y), & q_1(x, y), & p_2(x, y), & q_2(x, y), & \dots, & p_n(x, y), & q_n(x, y), & u(x, y) \\ 1, & p_1(P_1), & q_1(P_1), & p_2(P_1), & q_2(P_1), & \dots, & p_n(P_1), & q_n(P_1), & f(P_1) \\ 1, & p_1(P_2), & q_1(P_2), & p_2(P_2), & q_2(P_2), & \dots, & p_n(P_2), & q_n(P_2), & f(P_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & p_1(P_{2n}), & q_1(P_{2n}), & p_2(P_{2n}), & q_2(P_{2n}), & \dots, & p_n(P_{2n}), & q_n(P_{2n}), & f(P_{2n}) \\ 1, & p_1(P_{2n+1}), & q_1(P_{2n+1}), & p_2(P_{2n+1}), & q_2(P_{2n+1}), & \dots, & p_n(P_{2n+1}), & q_n(P_{2n+1}), & f(P_{2n+1}) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5}$$

Natürlich ist hierbei

$$p_\nu(P_s) = p_\nu(x_s, y_s)\,, \quad q_\nu(P_s) = q_\nu(x_s, y_s)\,, \quad f(P_s) = f(x_s, y_s)\,.$$

Dass die durch (5) dargestellte Funktion $u(x, y)$ wirklich die gesuchte Lösung angibt, sieht man leicht folgendermassen ein: Erstens ist $u(x, y)$ nach (3) ein in der ganzen Ebene harmonisches Polynom n-ten Grades. Weiter haben nach (4) die beiden Polynome $u(x, y) - f(x, y)$, $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2$ alle $2n + 1$ Punkte (x_s, y_s) als gemeinsame Nullstellen. Da $u(x, y) - f(x, y)$ vom höchstens n-ten Grade ist, so hat man nach Satz 2 wirklich $u(x, y) - f(x, y) = 0$ längs der ganzen Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$.

Nach demselben Satz 2 lässt sich unsere durch (5) definierte Lösung auch in der Form

$$u(x, y) = f(x, y) + (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)\, \psi(x, y) \tag{6}$$

schreiben. Dabei ist $\psi(x, y)$ ein passendes Polynom vom höchstens $(n - 2)$-ten Grade, oder $\psi(x, y) \equiv 0$. Die genaue Bestimmung von $\psi(x, y)$ ist in konkreten Fällen nicht schwer, wie sich noch weiter zeigen wird.

3. *Tabelle der Polynome* (3.1). Die ersten 10 Paare von Polynomen (3.1) sind:

$$\left.\begin{aligned}
&p_1 = x && q_1 = y\\
&p_2 = x^2 - y^2 && q_2 = 2\,x\,y\\
&p_3 = x^3 - 3\,x\,y^2 && q_3 = 3\,x^2\,y - y^3\\
&p_4 = x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4 && q_4 = 4\,x^3\,y - 4\,x\,y^3\\
&p_5 = x^5 - 10\,x^3\,y^2 + 5\,x\,y^4 && q_5 = 5\,x^4\,y - 10\,x^2\,y^3 + y^5\\
&p_6 = x^6 - 15\,x^4\,y^2 + 15\,x^2\,y^4 - y^6 && q_6 = 6\,x^5\,y - 20\,x^3\,y^3 + 6\,x\,y^5\\
&p_7 = x^7 - 21\,x^5\,y^2 + 35\,x^3\,y^4 - 7\,x\,y^6 && q_7 = 7\,x^6\,y - 35\,x^4\,y^3 + 21\,x^2\,y^5 - y^7\\
&p_8 = x^8 - 28\,x^6\,y^2 + 70\,x^4\,y^4 - 28\,x^2\,y^6 + y^8 &&\\
& && q_8 = 8\,x^7\,y - 56\,x^5\,y^3 + 56\,x^3\,y^5 - 8\,x\,y^7\\
&p_9 = x^9 - 36\,x^7\,y^2 + 126\,x^5\,y^4 - 84\,x^3\,y^6 + 9\,x\,y^8 &&\\
& && q_9 = 9\,x^8\,y - 84\,x^6\,y^3 + 126\,x^4\,y^5 - 36\,x^2\,y^7 + y^9\\
&p_{10} = x^{10} - 45\,x^8\,y^2 + 210\,x^6\,y^4 - 210\,x^4\,y^6 + 45\,x^2\,y^8 - y^{10} &&\\
& && q_{10} = 10\,x^9\,y - 120\,x^7\,y^3 + 252\,x^5\,y^5 - 120\,x^3\,y^7 + 10\,x\,y^9
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

4. *Beispiele.* Es soll jetzt obige Theorie auf einigen Beispielen erläutert werden.

4. 1. Ist $f(x, y)$ selbst ein harmonisches Polynom, so folgt aus (6) für $\psi(x, y)$ die Bedingung

$$\Delta\,[(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)\, \psi(x, y)] = 0\,,$$

welche im ganzen Gebiet $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leqq 0$ erfüllt sein soll. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn das Polynom in der eckigen Klammer identisch verschwindet, das heisst $\psi(x, y) \equiv 0$.

Im Sinne von (6) kommt man so zum folgenden (hier freilich fast trivialen) Ergebnis: Ist $f(x, y)$ beliebiges harmonisches Polynom, so lautet die Lösung $u(x, y)$ des Problems (1) ganz einfach

$$u(x, y) = f(x, y)\,.$$

Insbesondere gehören hierher die häufigen Fälle

$$f(x, y) = f_{00},\; f(x, y) = f_{00} + f_{10}\, x + f_{01}\, y$$

mit beliebigen konstanten f_{ik}.

Im weiteren kann man sich also auf nichtharmonische Polynome $f(x, y)$ beschränken.

4. 2. Es sei

$$f(x, y) = f_{00} + f_{10}\, x + f_{01}\, y + f_{20}\, x^2 + f_{11}\, x\, y + f_{02}\, y^2;$$

f_{ik} gegebene Festwerte.

Mit den 5 Punkten

$$(\pm a, 0), \quad (0, \pm b), \quad (\alpha, \alpha); \quad \alpha = \frac{a\, b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

der Randellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ lautet die Gleichung (5) [siehe auch (7)]:

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & x^2 - y^2, & x\, y, & u(x, y) \\ 1, & a, & 0, & a^2, & 0, & f_{00} + a\, f_{10} + a^2 f_{20} \\ 1, & -a, & 0, & a^2, & 0, & f_{00} - a\, f_{10} + a^2 f_{20} \\ 1, & 0, & b, & -b^2, & 0, & f_{00} + b\, f_{01} + b^2 f_{02} \\ 1, & 0, & -b, & -b^2, & 0, & f_{00} - b\, f_{01} + b^2 f_{02} \\ 1, & \alpha, & \alpha, & 0, & \alpha^2, & f_{00} + \alpha\,(f_{10} + f_{01}) + \alpha^2\,(f_{20} + f_{11} + f_{02}) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Mit einiger Rechenarbeit ergibt sich daraus die nicht allgemein bekannte Lösung

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= f_{00} + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\,(f_{20} + f_{02}) + f_{10}\, x + f_{01}\, y \\ &\quad + \frac{a^2 f_{20} - b^2 f_{02}}{a^2 + b^2}\,(x^2 - y^2) + f_{11}\, x\, y\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Für den Spezialfall $b = a$ erhält man die Lösungsform

$$u(x, y) = f_{00} + \frac{a^2}{2}\,(f_{20} + f_{02}) + f_{10}\, x + f_{01}\, y + \frac{1}{2}\,(f_{20} - f_{02})\,(x^2 - y^2) + f_{11}\, x\, y \tag{8.1}$$

des Dirichletschen Problems für den Kreis mit dem Radius a.

Bemerkung. Das Ergebnis (8) folgt in ein wenig anderer Gestalt

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= f_{00} + f_{10}\, x + f_{01}\, y + f_{20}\, x^2 + f_{11}\, x\, y + f_{02}\, y^2 \\ &\quad - \frac{f_{20} + f_{02}}{a^2 + b^2}\,(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

viel schneller aus (6).

4. 3. Für den Fall

$$f(x, y) = f_{00} + f_{10}\, x + f_{01}\, y + f_{20}\, x^2 + f_{11}\, x\, y + f_{02}\, y^2 + f_{30}\, x^3 + f_{21}\, x^2 y + f_{12}\, x\, y^2 + f_{03}\, y^3$$

führt der Ansatz (6), das heisst

$$u(x, y) = f(x, y) + (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)\,(c_{00} + c_{10}\, x + c_{01}\, y)\,,$$

zur Bedingung

$$f_{20} + f_{02} + (3\, f_{30} + f_{12})\, x + (f_{21} + 3\, f_{03})\, y + 2\,(c_{10}\, b^2 x + c_{01}\, a^2 y) + (a^2 + b^2)\,(c_{00} + c_{10}\, x + c_{01}\, y) = 0\,,$$

die im ganzen Gebiete $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leqq 0$ erfüllt sein soll.

Dies ist der Fall, wenn und nur wenn

$$c_{00}\,(a^2 + b^2) + f_{20} + f_{02} = 0\,, \quad c_{10}\,(a^2 + 3\,b^2) + f_{12} + 3\,f_{30} = 0\,,$$
$$c_{01}\,(3\,a^2 + b^2) + 3\,f_{03} + f_{21} = 0\,.$$

Mit den daraus berechneten Werten von c_{ik} ergibt sich dann die Lösung

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) = {} & f_{00} + f_{10}\,x + f_{01}\,y + f_{20}\,x^2 + f_{11}\,x\,y + f_{02}\,y^2 \\ & + f_{30}\,x^3 + f_{21}\,x^2\,y + f_{12}\,x\,y^2 + f_{03}\,y^3 \\ & - \left(\frac{f_{20} + f_{02}}{a^2 + b^2} + \frac{f_{12} + 3\,f_{30}}{a^2 + 3\,b^2}\,x + \frac{3\,f_{03} + f_{21}}{3\,a^2 + b^2}\,y\right)(b^2\,x^2 + a^2\,y^2 - a^2\,b^2)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Technisch sind unsere Ausführungen überall dort von Interesse (Elektrostatik, Wärmeleitung usw.), wo man mit der Laplaceschen Gleichung zu tun hat.

Es ist zu bemerken, dass sich auch andere Fragen der mathematischen Physik, insbesondere unter gewissen Umständen das Poissonsche Problem

$$\Delta u = f(x, y)\,, \quad u = 0 \text{ am Rande des Grundgebietes}$$

nach der vorangehenden Methode lösen lassen.

Summary

The Dirichlet problem is solved for an elliptic domain if the boundary values are given by a polynomial defined in the interior of the ellipse. The solution is a finite expansion in harmonic polynomials.

(Eingegangen: 17. Dezember 1956.)

Varia – Miscellaneous – Divers

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 4. bis 5. Mai 1957 in Brunnen

Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik

Ein Widerstandsbrett für rotationssymmetrische Potentialprobleme.

Von E. Baumgartner, R. Galli und P. Huber, Basel[1]).

Seit der praktischen Realisierung von Widerstandsnetzwerken durch de Packh[2]) und Redshaw[3]) wurde diese Art Analogierechengerät auch auf kompliziertere Differentialgleichungen mit Erfolg angewendet[4]). Diese Methode bietet gegenüber dem elektrolytischen Trog hauptsächlich den Vorteil grösserer Genauigkeit und einfacherer Handhabung. Ein scheinbarer Nachteil tritt aber bei krummen Oberflächen auf, weil ohne jeweilige Abänderung der Anordnung nur diskrete Knotenpunkte zur Verfügung stehen.

---

1) Physikalisches Institut der Universität.

2) D. C. de Packh, Rev. sci. Instrum. *18*, 798 (1947).

3) S. C. Redshaw, Proc. Instn. mech. Engrs., Lond. *159*, 25 (1948).

4) C. Liebmann, J. int. Calc. analog. *1955*, 346.