

Kritische Drehzahlen unter Torsion und Druck bei Berücksichtigung des Eigengewichtes

VON HORST LEIPHOLZ, Stuttgart, Deutschland¹⁾

1. Einleitung

Es sollen einfach besetzte Wellen mit mehrfach beaufschlagten Turbinenscheiben betrachtet werden. Die Wellen seien zusätzlich durch \mathfrak{B} auf Torsion und durch \mathfrak{P} und q auf Druck beansprucht.

Das Torsionsmoment \mathfrak{B} werde durch die Turbinenscheibe in die Welle eingeleitet; \mathfrak{P} greife als Einzelkraft an den Enden der Welle an; q sei eine kontinuierlich verteilte Längskraft (zum Beispiel Eigengewicht); \mathfrak{P} und q mögen stets die Richtung der unverformten Wellenachse beibehalten; \mathfrak{B} sei semitangential. Die Welle sei von gleichbleibendem kreisförmigem Querschnitt; die Biegesteifigkeit a und die Torsionssteifigkeit c sind daher konstante Grössen. Alle Verformungen, die die Welle erleidet, seien sehr klein.

Bekanntlich [1]²⁾ werden die kritischen Drehzahlen durch die Torsions- und Druckbeanspruchung der Welle beeinflusst. Untersuchungen hierüber sind auch von H. ZIEGLER [2] durchgeführt worden, der insbesondere gezeigt hat, dass das Problem für die angenommene Belastung konservativ ist und dass die Annahme eines semitangentialen Momentes für mehrfach beaufschlagte Scheiben besonders sinnvoll ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen und ohne Berücksichtigung der Kreiselwirkung gilt, wie man bei H. ZIEGLER [3] nachliest, die Beziehung

$$\omega_k^2 = \frac{1}{m \bar{\alpha}}, \quad (1)$$

wobei ω_k die kritische Drehzahl, m die Masse der Scheibe und $\bar{\alpha}$ die Einflusszahl für die Durchbiegung der Welle an der Stelle ist, wo die Turbinenscheibe sitzt. Das ganze Problem besteht also in der Bestimmung von $\bar{\alpha}$.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, dass sich die kritische Drehzahl nur deshalb in der einfachen Beziehung (1) darstellt, weil das Torsionsmoment als semitangential vorausgesetzt worden ist. Die Begründung hierfür ist in der zitierten Arbeit von H. ZIEGLER angegeben.

¹⁾ Institut für technische Mechanik, Technische Hochschule Stuttgart.

²⁾ Die Ziffern in den eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 471.

Als neu gegenüber früheren Arbeiten soll jetzt $\bar{\alpha}$ auch noch unter Berücksichtigung von q errechnet werden.

2. Differentialgleichungen und Randbedingungen

An Hand von zwei Beispielen soll die Aufstellung der Differentialgleichungen und der Randbedingungen gezeigt werden. Die Überlegungen lassen sich dann leicht auf andere Fälle übertragen.

2.1 Die fliegende Welle

Die fliegende Welle ist in Abbildung 1 dargestellt. Sie ist mit dem unteren Ende in einem «langen» Lager eingespannt und erfährt am oberen Ende durch eine Horizontalkraft \mathfrak{H} eine Auslenkung.

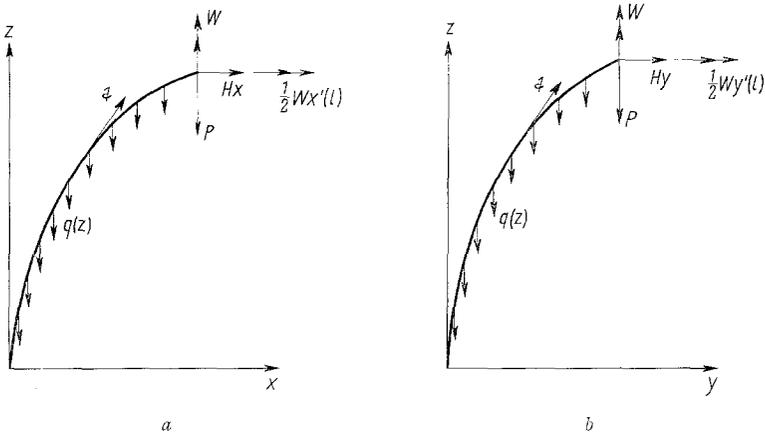


Abbildung 1
Die fliegende Welle.

Die Belastungen haben folgende Komponentendarstellung:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{B} &= W \left(\frac{1}{2} x', \frac{1}{2} y', 1 \right), \\
 \mathfrak{P} &= (0, 0, P), \\
 q &= (0, 0, q), \\
 \mathfrak{H} &= (H_x, H_y, 0),
 \end{aligned} \right\} (2)$$

und der Tangenten-Einheitsvektor der Stabachse ist

$$\mathbf{t} = (x', y', 1) = (t_x, t_y, 1). \quad (3)$$

Für kleine Auslenkungen der Wellenachse hat man für die Komponenten des inneren Stabmomentes die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} M_y &= a x'' , \\ M_x &= - a y'' , \\ W &= c \tau = \text{konst.} , \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wobei τ die infolge der Torsion auftretende Verwindung pro Längeneinheit der Welle ist.

Durch Anwendung des Schnittprinzips und der statischen Gleichgewichtsbedingungen erhält man

$$\left. \begin{aligned} a x'' &= - W y' + \frac{1}{2} W y'(l) + H_x(l-z) + P [x(l) - x] \\ &\quad + \int_z^l q(\zeta) [x(\zeta) - x(z)] d\zeta , \\ a y'' &= W x' - \frac{1}{2} W x'(l) + H_y(l-z) + P [y(l) - y] \\ &\quad + \int_z^l q(\zeta) [y(\zeta) - y(z)] d\zeta . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es seien noch weitere Bezeichnungen eingeführt:

$$w = \frac{W}{a}, \quad h_x = \frac{H_x}{a}, \quad h_y = \frac{H_y}{a}, \quad g(z) = \frac{P + \int_z^l q(\zeta) d\zeta}{a}, \quad (6)$$

und es werde (3) verwendet. Dann erhält man aus (5) durch Differentiation:

$$\left. \begin{aligned} t_x'' + w t_y' + g(z) t_x &= - h_x , \\ t_y'' - w t_x' + g(z) t_y &= - h_y . \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Das ist ein lineares, inhomogenes Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit teils konstanten und dem variablen Koeffizienten $g(z)$. Abhängige Variable sind die Komponenten t_x und t_y des Tangenteneinheitsvektors, unabhängige Variable ist z , welches die Länge der Wellenachse vom unteren Ende her zählt.

Als Randbedingungen hat man

2.11: wegen der Einspannung des unteren Wellenendes:

$$t_x = 0, \quad t_y = 0 \quad \text{für } z = 0, \quad (8)$$

2.12: als Momentenbedingung am oberen Wellenende:

$$\left. \begin{aligned} a t'_x &= -\frac{1}{2} W t_y \\ a t'_y &= \frac{1}{2} W t_x \end{aligned} \right\} \text{für } z = l. \quad (9)$$

2.2 Die beiderseits gelagerte Welle

Wie Abbildung 2 zeigt, soll die Welle beiderseits «lange» Lager haben, so dass ihre beiden Enden als eingespannt gelten können.

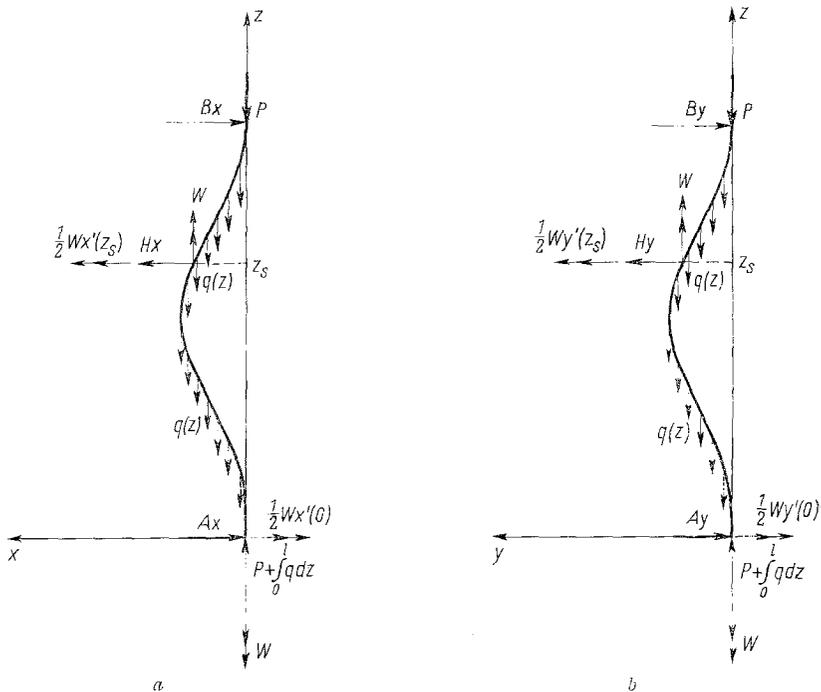


Abbildung 2

Die beiderseits gelagerte Welle.

Für die an der Welle angreifenden Belastungen gilt wieder (2), für die Komponenten des inneren Momentes (4). Zusätzlich braucht man jetzt für die Rechnung noch die an den Lagern auftretenden Auflagerkräfte. Diese haben

die Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= H_x \frac{l - z_s}{l} + \frac{W}{2l} [y'(0) - y'(z_s)], \\ A_y &= H_y \frac{l - z_s}{l} + \frac{W}{2l} [x'(z_s) - x'(0)], \\ B_x &= H_x \frac{z_s}{l} + \frac{W}{2l} [y'(z_s) - y'(0)], \\ B_y &= H_y \frac{z_s}{l} + \frac{W}{2l} [x'(0) - x'(z_s)], \end{aligned} \right\} (10)$$

und es ist z_s der Wert von z , der angibt, wo die Turbinenscheibe sitzt.

Wieder durch Anwendung des Schnittprinzips und der statischen Gleichgewichtsbedingungen liest man aus Abbildung 2 ab

2.21: für den Bereich $0 \leq z \leq z_s$:

$$\left. \begin{aligned} a x'' &= -W y' + \frac{1}{2} W y'(0) - A_x z - P x - x \int_0^l q dz \\ &\quad + \int_0^z q(\xi) [x(z) - x(\xi)] d\xi, \\ a y'' &= W x' - \frac{1}{2} W x'(0) - A_y z - P y - y \int_0^l q dz \\ &\quad + \int_0^z q(\xi) [y(z) - y(\xi)] d\xi, \end{aligned} \right\} (11)$$

2.22: für den Bereich $z_s \leq z \leq l$:

$$\left. \begin{aligned} a x'' &= -B_x (l - z) - P x - \int_z^l q(\xi) [x(z) - x(\xi)] d\xi, \\ a y'' &= -B_y (l - z) - P y - \int_z^l q(\xi) [y(z) - y(\xi)] d\xi. \end{aligned} \right\} (12)$$

Verwendet man auch hier (3), (6), sowie

$$\alpha_x = \frac{A_x}{a}, \quad \beta_x = \frac{B_x}{a}, \quad \alpha_y = \frac{A_y}{a}, \quad \beta_y = \frac{B_y}{a}, \quad (13)$$

und differenziert man (11) und (12), so hat man die beiden Differentialgleichungssysteme

2.21: für den Bereich $0 \leq z \leq z_s$:

$$\left. \begin{aligned} t_x'' + w t_y' + g(z) t_x &= -\alpha_x, \\ t_y'' - w t_x' + g(z) t_y &= -\alpha_y \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

und 2.22: für den Bereich $z_s \leq z \leq l$:

$$\left. \begin{aligned} t_x'' + g(z) t_x &= \beta_x, \\ t_y'' + g(z) t_y &= \beta_y. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

In diesem Fall gelten folgende Randbedingungen:

2.23: wegen der Einspannung der Wellenenden:

$$t_x = 0, \quad t_y = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, \quad z = l, \quad (16)$$

2.24: aus Stetigkeitsgründen:

$$\left. \begin{aligned} t_x(z_s - 0) &= t_x(z_s + 0), \\ t_y(z_s - 0) &= t_y(z_s + 0), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

2.25: wegen der Unverschieblichkeit des oberen Wellenendes:

$$\int_0^{z_s} t_j(z) dz + \int_{z_s}^l t_j(z) dz = 0, \quad (j = x, y). \quad (18)$$

3. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

Von den bisher aufgestellten Differentialgleichungen sind (7) und (14) vom gleichen Typ. Wie man ihre Lösungen erhält, soll am Beispiel des Systems (7) gezeigt werden:

Man führt die komplexen Grössen

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= t_x + i t_y, \\ h &= h_x + i h_y \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ein und erhält statt (7):

$$\varrho'' - i w \varrho' + g \varrho = -h. \quad (20)$$

Als neue Bezeichnungen seien

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{w}{2}, \\ V &= -\left(g + \frac{w^2}{4}\right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

benutzt, dann wird aus (20):

$$\varrho'' + 2 i u \varrho - (u^2 + V) \varrho = -h, \quad (22)$$

was sich mit der Transformation

$$\varrho = r e^{-iuz} \quad (23)$$

auf

$$r'' - V r = -h e^{iuz} \quad (24)$$

zurückführen lässt. Die zu (24) gehörende homogene Gleichung

$$r'' - V r = 0 \quad (25)$$

sei die «Basisgleichung» genannt, denn ihre linear unabhängigen Fundamentallösungen r_1 und r_2 beherrschen die weitere Rechnung. Der Charakter von r_1 und r_2 ist bestimmt, wegen V und der Bedeutung von g , durch die Art der Längsbelastung $q(z)$.

Unter Verwendung der Wronskischen Determinante

$$W = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1' & r_2' \end{vmatrix}, \quad (26)$$

die in diesem Fall eine Konstante ist, erhält man durch Variation der komplexen Integrationskonstanten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} für die inhomogene Differentialgleichung (24) die allgemeine Lösung

$$r = \mathfrak{A} r_1 + \mathfrak{B} r_2 + \frac{h}{W} \left(r_1 \int_0^z r_2 e^{iuz} dz - r_2 \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right). \quad (27)$$

Hieraus folgt, wegen (23), als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (22):

$$\varrho = \left[\mathfrak{A} r_1 + \mathfrak{B} r_2 + \frac{h}{W} \left(r_1 \int_0^z r_2 e^{iuz} dz - r_2 \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right) \right] e^{-iuz}. \quad (28)$$

Das ist dann aber auch die gesuchte Lösung des Systems (7), wenn man noch die durch (19) und (21) festgesetzte Bedeutung von ϱ , h und u beachtet.

Ganz entsprechend erhält man mit

$$\alpha = \alpha_x + i \alpha_y \quad (29)$$

als allgemeine Lösung von (14):

$$\varrho = \left[\mathfrak{C} r_1 + \mathfrak{D} r_2 + \frac{\alpha}{W} \left(r_1 \int_0^z r_2 e^{iuz} dz - r_2 \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right) \right] e^{-iuz}. \quad (30)$$

Als letzte der bisher betrachteten Differentialgleichungen können die Gleichungen des Systems (15) mit q und mit

$$\beta = \beta_x + i \beta_y \quad (31)$$

auf die Form

$$q'' + g(z) q = \beta \quad (32)$$

gebracht werden, die vom Typ der inhomogenen Basisgleichung (24) ist. Bezeichnet man die Fundamentallösungen von

$$r'' + g(z) r = 0 \quad (33)$$

mit r_1^g und r_2^g , und die zu (33) gehörende Wronskische Determinante mit W^g , so bekommt man daher, ganz entsprechend wie bei (24), für (32), durch Variation der Konstanten, die allgemeine Lösung

$$q = \mathfrak{E} r_1^g + \mathfrak{F} r_2^g + \frac{\beta}{W^g} \left(-r_1^g \int_0^z r_2^g dz + r_2^g \int_0^z r_1^g dz \right). \quad (34)$$

3.1 Die Berechnung von $\bar{\alpha}$

Wie (1) zeigt, kennt man die gesuchte kritische Drehzahl ω_k , bei gegebener Scheibenmasse m , vollkommen, wenn es gelungen ist, die Einflusszahl $\bar{\alpha}$ für die Durchbiegung der Welle an der Stelle $z = z_s$ anzugeben.

Der Bedeutung von q entsprechend gibt

$$v(z_s) = \int_0^{z_s} q dz \quad (35)$$

gerade die Durchbiegung der Welle in vektorieller Form unter den in den Abbildungen 1 und 2 gezeigten Belastungen.

Wie schon H. ZIEGLER [4] gezeigt hat und wie es auch hier die weitere Rechnung bestätigen wird, ist es dem Wirken eines semitangentialen Torsionsmomentes zu verdanken, dass die Welle sich unter einer beliebig gerichteten horizontalen Kraft \mathfrak{H} in Richtung der Kraft \mathfrak{H} verschiebt. Das heisst aber: Auslenkung $v(z_s)$ und Kraft \mathfrak{H} haben gleiche Wirkungslinie. Wählt man also für die Komponenten von \mathfrak{H} Kräfte vom Betrag 1, so wird auch $v(z_s)$ Komponenten haben, die betragsmässig gleich sind, und dieser gemeinsame Betrag ist das gesuchte $\bar{\alpha}$.

Die weitere Rechnung hat demnach so zu verlaufen, dass man

$$v(z_s) = \int_0^{z_s} q dz$$

unter der besonderen Bedingung $\mathfrak{H} = 1 + i$ (was sich in entsprechenden Werten für h , α und β ausdrückt) errechnet und den Realteil (oder den gleichgrossen

Imaginärteil) von $v(z_s)$ ermittelt. Dann ist

$$\bar{\alpha} = \operatorname{Re}(v(z_s)) \quad \text{für} \quad \mathfrak{S} = 1 + i. \quad (36)$$

Für ϱ stehen die Lösungen (28) oder (30) zur Verfügung

$$\left(\text{würde man mit (34) rechnen, so wäre } v(z_s) = - \int_{z_s}^l \varrho dz \right),$$

in denen aber noch Integrationskonstanten vorkommen. Die Anwendung der in Absatz 2 gegebenen Randbedingungen gestattet jedoch die Bestimmung dieser Konstanten. Es ist nur noch nötig, auch die Randbedingungen komplex zu schreiben. Aus (8) wird

$$\varrho = 0 \quad \text{für} \quad z = 0; \quad (37)$$

aus (9) wird

$$\varrho' = \frac{1}{2} i w \varrho \quad \text{für} \quad z = l; \quad (38)$$

aus (16) wird

$$\varrho = 0 \quad \text{für} \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = l; \quad (39)$$

aus (17) wird

$$\varrho(z_s - 0) = \varrho(z_s + 0); \quad (40)$$

und aus (18) wird

$$\int_0^{z_s} \varrho(z) dz + \int_{z_s}^l \varrho(z) dz = 0. \quad (41)$$

Hat man mit Hilfe der Randbedingungen (37), (38) oder (39) bis (41) die Integrationskonstanten ermittelt, so steht der Berechnung von $v(z_s)$ und darüber hinaus von $\bar{\alpha}$ nichts mehr im Wege. Die wirkliche Durchführung der bisher nur angedeuteten Rechnung soll am Beispiel der fliegenden Welle erfolgen.

4. Kritische Drehzahl für die fliegende Welle

Für diesen Fall muss man (28), (37) und (38) benutzen. Durch Anwendung der Randbedingungen (37) und (38) auf die allgemeine Lösung (28) von ϱ erhält man für die Integrationskonstanten:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= -r_2(0) \frac{h}{W} \frac{r_1'(l) \int_0^l r_2 e^{iuz} dz - r_2'(l) \int_0^l r_1 e^{iuz} dz}{r_1'(l) r_2(0) - r_2'(l) r_1(0)}, \\ \mathfrak{B} &= r_1(0) \frac{h}{W} \frac{r_1'(l) \int_0^l r_2 e^{iuz} dz - r_2'(l) \int_0^l r_1 e^{iuz} dz}{r_1'(l) r_2(0) - r_2'(l) r_1(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} r_1(0) & r_2(0) \\ r_1'(l) & r_2'(l) \end{vmatrix}, \\
 a_{11} &= \frac{r_2(0) r_1'(l)}{W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}}, & a_{12} &= -\frac{r_2(0) r_2'(l)}{W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}}, \\
 b_{11} &= -\frac{r_1(0) r_1'(l)}{W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}}, & b_{12} &= \frac{r_1(0) r_2'(l)}{W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}}
 \end{aligned} \quad (43)$$

und mit (42) folgt dann aus (28):

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \frac{h}{W} \left(a_{11} r_1 e^{-iuz} \int_0^l r_2 e^{iuz} dz + a_{12} r_1 e^{-iuz} \int_0^l r_1 e^{iuz} dz \right. \\
 &\quad + b_{11} r_2 e^{-iuz} \int_0^l r_2 e^{iuz} dz + b_{12} r_2 e^{-iuz} \int_0^l r_1 e^{iuz} dz \\
 &\quad \left. + r_1 e^{-iuz} \int_0^z r_2 e^{iuz} dz - r_2 e^{-iuz} \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right),
 \end{aligned} \quad (44)$$

womit man $v(z_s)$ nach (35) errechnen kann.

Vor Ausführung der nach (35) vorgeschriebenen Integration sollen weitere Abkürzungen eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
 S_{1s}^{i0} &= \int_0^l r_1 \sin u z dz, & S_{2s}^{i0} &= \int_0^l r_2 \sin u z dz, \\
 S_{1c}^{i0} &= \int_0^l r_1 \cos u z dz, & S_{2c}^{i0} &= \int_0^l r_2 \cos u z dz.
 \end{aligned} \quad (45)$$

Hiermit erhält man:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l r_1 e^{-iuz} dz \int_0^l r_2 e^{iuz} dz &= (S_{1c}^{i0} S_{2c}^{i0} + S_{1s}^{i0} S_{2s}^{i0}) + i (S_{1c}^{i0} S_{2s}^{i0} - S_{1s}^{i0} S_{2c}^{i0}), \\
 \int_0^l r_1 e^{-iuz} dz \int_0^l r_1 e^{iuz} dz &= (S_{1c}^{i0})^2 + (S_{1s}^{i0})^2, \\
 \int_0^l r_2 e^{-iuz} dz \int_0^l r_2 e^{iuz} dz &= (S_{2c}^{i0})^2 + (S_{2s}^{i0})^2,
 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^l r_2 e^{-iuz} dz \int_0^l r_1 e^{iuz} dz &= (S_{1c}^{i0} S_{2c}^{i0} + S_{1s}^{i0} S_{2s}^{i0}) - i (S_{1c}^{i0} S_{2s}^{i0} - S_{1s}^{i0} S_{2c}^{i0}), \\
 \int_0^l \left[r_1 e^{-iuz} \int_0^z r_2 e^{iuz} dz \right] dz - \int_0^l \left[r_2 e^{-iuz} \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right] dz &= \\
 &= \int_0^l r_1 \cos uz z S_{2c}^{z0} dz + \int_0^l r_1 \sin uz z S_{2s}^{z0} dz - \int_0^l r_2 \cos uz z S_{1c}^{z0} dz \\
 &\quad - \int_0^l r_2 \sin uz z S_{1s}^{z0} dz + i (S_{1c}^{i0} S_{2s}^{i0} - S_{1s}^{i0} S_{2c}^{i0}).
 \end{aligned} \right\} (46)$$

Benutzt man ausserdem die Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned}
 L_{12}(l) &= S_{1c}^{i0} S_{2c}^{i0} + S_{1s}^{i0} S_{2s}^{i0}, & L_1(l) &= (S_{1c}^{i0})^2 + (S_{1s}^{i0})^2, \\
 L_{12}^*(l) &= S_{1c}^{i0} S_{2s}^{i0} - S_{1s}^{i0} S_{2c}^{i0}, & L_2(l) &= (S_{2c}^{i0})^2 + (S_{2s}^{i0})^2, \\
 L(l) &= \int_0^l r_2 \cos uz z S_{1c}^{z0} dz + \int_0^l r_2 \sin uz z S_{1s}^{z0} dz - \int_0^l r_1 \cos uz z S_{2c}^{z0} dz \\
 &\quad - \int_0^l r_1 \sin uz z S_{2s}^{z0} dz,
 \end{aligned} \right\} (47)$$

so lässt sich mit (44) bei Verwendung von (45 bis 47), die Ausrechnung von (35) schreiben:

$$\left. \begin{aligned}
 v(z_s) &= \frac{\hbar}{W} \{ a_{11} [L_{12}(l) + i L_{12}^*(l)] + a_{12} L_1(l) + b_{11} L_2(l) \\
 &\quad + b_{12} [L_{12}(l) - i L_{12}^*(l)] - L(l) + i L_{12}^*(l) \}.
 \end{aligned} \right\} (48)$$

Es ist aber immer, wie man an Hand von (43) nachprüfen kann,

$$a_{11} - b_{12} + 1 = 0, \tag{49}$$

so dass bei (48) wegen (49) die imaginären Terme aus der geschweiften Klammer herausfallen und man

$$v(z_s) = \frac{\hbar}{W} \{ L_{12}(l) [a_{11} + b_{12}] + a_{12} L_1(l) + b_{11} L_2(l) - L(l) \} \tag{50}$$

hat. Daraus ersieht man, dass das Wellenende sich tatsächlich unter einer beliebig gerichteten horizontalen Einheitskraft um die Strecke $\bar{\alpha}$ in Richtung der Kraft verschiebt.

Aus (50) erhält man die gesuchte Einflusszahl $\bar{\alpha}$, indem man für $h = 1/a$ setzt. Das ergibt:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{aW} \{L_{12}(l) [a_{11} + b_{12}] + a_{12} L_1(l) + b_{11} L_2(l) - L(l)\}. \quad (51)$$

Die Gleichung (51) kann für alle möglichen Lastverteilungsgesetze $q(z)$ angewendet werden.

Der Fall $q \equiv 0$ wurde bereits von H. ZIEGLER behandelt. Hier besteht die Druckbelastung nur aus der Einzelkraft P , die an den Enden der Welle angreift. Mit

$$v_0^2 = -V = g + \frac{w^2}{4} = \frac{P}{a} + \frac{T^2}{4a^2} = \text{konst.} \quad (52)$$

heissen daher die Fundamentallösungen der Basisgleichung (25):

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sin v_0 z \\ r_2 &= \cos v_0 z. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Das gibt:

$$r_1(0) = 0, \quad r_2(0) = 1, \quad r_1'(l) = v_0 \cos v_0 l, \quad r_2'(l) = -v_0 \sin v_0 l,$$

$$W = -v_0, \quad W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} = -v_0 \cos v_0 l,$$

so dass man nach (43)

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = -\text{tg } v_0 l, \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0 \quad (54)$$

erhält.

Setzt man (54) in (51) ein, so ist

$$\bar{\alpha} = -\frac{1}{a v_0} \{-L_{12}(l) - \text{tg } v_0 l \cdot L_1(l) - L(l)\}. \quad (55)$$

Verwendet man für die Ausrechnung von $L(l)$, $L_1(l)$ und $L_{12}(l)$ die Formeln (45-47) und für r_1 und r_2 (53), so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} L(l) &= \frac{a}{P} \left[\left(1 + \frac{2a u^2}{P}\right) \sin v_0 l \cos u l - \frac{2u v_0 a}{P} \cos v_0 l \sin u l - v_0 l \right], \\ L_1(l) &= \frac{a}{P} \left[2 + \frac{2u^2 a}{P} - \sin^2 v_0 l - 2 \frac{a v_0^2}{P} \cos v_0 l \cos u l \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{a v_0 u}{P} \sin v_0 l \sin u l \right], \\ L_{12}(l) &= \frac{a}{P} [\sin v_0 l \cos u l - \sin v_0 l \cos v_0 l]. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Dies, in (55) eingesetzt, führt nach einigen Zwischenrechnungen zu

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{P} \left[\frac{v_0^2 + u^2}{v_0} \frac{a}{P} \text{tg } v_0 l - \frac{2u a}{P} \frac{\sin u l}{\cos v_0 l} - l \right]. \quad (57)$$

Der Ausdruck (57) stimmt aber genau mit einer für diesen Lastfall auf anderem Wege von H. ZIEGLER [5] berechneten Formel überein, wenn man den Unterschied in der Bezeichnungsweise beseitigt:

den Bezeichnungen bei H. ZIEGLER	entsprechen	in dieser Arbeit
w	—————	$- 2 u$
σ	—————	$2 v_0$
b	—————	P/a .

Der Fall $q(z) = q = \text{konst.}$ soll jetzt neu in diese Arbeit aufgenommen werden.

Als Fundamentallösungen der Basisgleichung (25) hat man für ihn:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \delta^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \delta^{3/2} \right), \\ r_2 &= \delta^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \delta^{3/2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \alpha \beta^{-2/3} - \beta^{1/3} z, \\ \alpha &= \frac{P}{a} + \frac{q l}{a} + \frac{T^2}{4 a^2}, \quad \beta = \frac{q}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Die Funktionen (58) sind in (26, 43, 45-47) zur Berechnung von $W, W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}, a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}, L(l), L_1(l), L_2(l)$ und $L_{12}(l)$ zu verwenden. Dann hat man alles für die Bestimmung von α nach (51) zur Verfügung.

Die Rechnung muss im konkreten Fall numerisch erfolgen, da sich wegen der Kompliziertheit der Funktionen die nach (45) und (46) vorgeschriebenen Integrale wohl kaum geschlossen ausrechnen lassen. Die Durchführung der Rechnung wird zur Erläuterung der Formeln an einem Zahlenbeispiel vorgenommen. Für die Bestimmung der Funktionen $J_{1/3}$ und $J_{-1/3}$ konnten die Tafeln von WATSON [6] benutzt werden, da die Argumente für das gewählte Beispiel alle positiv reell bleiben.

Gegeben seien:

$$q = 10^3 \text{ kp/m}, \quad T = 2 \cdot 10^{9/2} \text{ kp m}, \quad a = 10^5 \text{ kp m}^2, \quad l = 3 \text{ m}.$$

Es ist die Konstante W wegen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_2}{dz} &= \beta^{1/3} \delta J_{2/3} \left(\frac{2}{3} \delta^{3/2} \right), \\ \frac{dr_1}{dz} &= - \beta^{1/3} \delta J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \delta^{3/2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

gleich

$$W = \beta^{1/3} \bar{3}^{3/2} (J_{1/3} J_{2/3} + J_{-1/3} J_{-2/3}) = \beta^{1/3} \frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi}{3}. \quad (61)$$

Mit den gegebenen Werten errechnet man nach (59) und (21):

$$\alpha = \frac{3 \cdot 10^3}{10^5} + \frac{40 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{10}} = 13 \cdot 10^{-2}, \quad \beta = \frac{10^3}{10^5} = 10^{-2},$$

$$z = 13 \cdot 10^{-2} (10^{-2})^{-2/3} - (10^{-2})^{1/3} z = 0,215 (13 - z),$$

$$u = -\frac{2 \cdot 10^{9/2}}{2 \cdot 10^5} = -0,316.$$

Die weitere Rechnung wurde in Tabelle I durchgeführt. Mit den Werten der Tabelle I erhält man für $l = 3$ durch numerische Differentiation:

$$r'_1(3) = \frac{1}{12} (0,095 - 8 \cdot 0,352 + 8 \cdot 0,738 - 0,835) = 0,196,$$

$$r'_2(3) = \frac{1}{12} (-0,612 + 8 \cdot 0,428 + 8 \cdot 0,056 - 0,307) = 0,246.$$

Tabelle I

z	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{3}$	2,795	2,580	2,365	2,150	1,935	1,720	1,505
$\bar{3}^{1/2}$	1,673	1,606	1,539	1,466	1,393	1,311	1,229
$\bar{3}^{3/2}$	4,657	4,173	3,652	3,151	2,703	2,253	1,856
$\sigma = 2/3 \bar{3}^{3/2}$	3,11	2,78	2,44	2,10	1,80	1,50	1,24
$J_{1/3}(\sigma)$	-0,094	+0,059	+0,229	+0,396	+0,530	+0,637	+0,701
$J_{-1/3}(\sigma)$	-0,429	-0,381	-0,278	-0,128	+0,040	+0,234	+0,421
$r_1(z) = \bar{3}^{1/2} \cdot J_{1/3}(\sigma)$	-0,160	+0,095	+0,352	+0,581	+0,738	+0,835	+0,862
$r_2(z) = \bar{3}^{1/2} \cdot J_{-1/3}(\sigma)$	-0,718	-0,612	-0,428	-0,188	+0,056	+0,307	+0,517

Damit und mit $r_1(3)$ und $r_2(3)$ aus Tabelle I erhält man nach (43)

$$W \binom{0}{l} = -0,160 \cdot 0,246 + 0,718 \cdot 0,196 = 0,101,$$

$$a_{11} = -\frac{0,718 \cdot 0,196}{0,101} = -1,393,$$

$$a_{12} = \frac{0,718 \cdot 0,246}{0,101} = 1,749,$$

$$b_{11} = \frac{0,160 \cdot 0,196}{0,101} = 0,315,$$

$$b_{12} = -\frac{0,160 \cdot 0,246}{0,101} = -0,390$$

und nach (61)

$$W = \frac{3}{\pi} \cdot 0,215 \cdot 0,866 = 0,178 .$$

Die Berechnung der in (47) festgelegten Werte erfolgt durch numerische Integration in Tabelle II, aus der man

$$\begin{aligned} S_{1c}^{i0} &= 0,464, & S_{1s}^{i0} &= -0,474, & S_{2c}^{i0} &= -1,340, & S_{2s}^{i0} &= 0,513, \\ \int_0^l r_2 \cos u z S_{1c} dz &= -0,057, & \int_0^l r_2 \sin u z S_{1s} dz &= -0,074, \\ \int_0^l r_1 \cos u z S_{2c} dz &= -0,601, & \int_0^l r_1 \sin u z S_{2s} dz &= -0,189 \end{aligned}$$

herausliest, womit man eben nach (47)

$$\begin{aligned} L_{12}(3) &= -1,340 \cdot 0,464 - 0,474 \cdot 0,513 = -0,865, \\ L_1(3) &= 0,464^2 + 0,474^2 = 0,440, \\ L_2(3) &= 1,340^2 + 0,513^2 = 2,059, \\ L(3) &= 0,601 + 0,189 - 0,057 - 0,074 = 0,659 \end{aligned}$$

erhält.

Jetzt steht alles zur Verfügung, um nach (51) errechnen zu können:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{1}{0,178 \cdot 10^5} [(-1,393 + 0,390) \cdot 0,865 + 1,749 \cdot 0,440 + 0,315 \cdot 2,059 \\ &\quad - 0,659] = 1,293 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Zum Vergleich sei noch nach Formel (41) gerechnet und dazu angenommen, dass die Längskraft nicht verteilt sei, sondern als Einzelkraft $P = 3 \cdot 10^3$ kp an den Enden der Welle angreift. Alle anderen Daten sollen unverändert bleiben.

Dann hat man nach (52):

$$v_0^2 = \frac{3 \cdot 10^3}{10^5} + \frac{40 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{10}} = 13 \cdot 10^{-2}, \quad v_0 = 3,606 \cdot 10^{-1},$$

und es ist bereits bekannt: $u = -0,316$, $u^2 = 10 \cdot 10^{-2}$. Hiermit gibt (57):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{1}{3 \cdot 10^3} \left[\frac{13 \cdot 10^{-2} + 10 \cdot 10^{-2}}{3,606 \cdot 10^{-1}} \cdot \frac{10^5}{3 \cdot 10^3} \cdot \operatorname{tg}(3,606 \cdot 10^{-1} \cdot 3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \cdot 0,316}{3 \cdot 10^3} \cdot 10^5 \frac{\sin(0,316 \cdot 3)}{\cos(3,606 \cdot 10^{-1} \cdot 3)} - 3 \right] = 1,913 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Tabelle II

z	0	1	2	3
$u z$	0	-0,316	-0,632	-0,948
$\cos u z$	1	0,950	0,807	0,583
$\sin u z$	0	-0,301	-0,591	-0,812
$r_1 \cos u z$	-0,160	0,090	0,284	0,339
$r_1 \sin u z$	0	-0,029	-0,208	-0,472
$r_2 \cos u z$	-0,718	-0,581	-0,345	-0,110
$r_2 \sin u z$	0	0,184	0,253	0,153
$S_{1c}^{z0} = \int_0^z r_1 \cos u z dz$	0	-0,035	0,152	0,464
$S_{1s}^{z0} = \int_0^z r_1 \sin u z dz$	0	-0,015	-0,134	-0,474
$S_{2c}^{z0} = \int_0^z r_2 \cos u z dz$	0	-0,649	-1,112	-1,340
$S_{2s}^{z0} = \int_0^z r_2 \sin u z dz$	0	0,092	0,310	0,513
$S_{1s}^{z0} \cdot r_2 \cos u z$	0	0,020	-0,052	-0,051
$S_{1s}^{z0} \cdot r_2 \sin u z$	0	-0,003	-0,034	-0,073
$S_{2c}^{z0} \cdot r_1 \cos u z$	0	-0,058	-0,316	-0,454
$S_{2s}^{z0} \cdot r_1 \sin u z$	0	-0,003	-0,064	-0,242
$\int_0^z S_{1c}^{z0} r_2 \cos u z dz$	0	0,010	-0,006	-0,057
$\int_0^z S_{1s}^{z0} r_2 \sin u z dz$	0	-0,002	-0,020	-0,074
$\int_0^z S_{2c}^{z0} r_1 \cos u z dz$	0	-0,029	-0,216	-0,601
$\int_0^z S_{2s}^{z0} r_1 \sin u z dz$	0	-0,002	-0,036	-0,189

Nach (1) ist das Verhältnis der zugehörigen Drehzahlen (ω_{kq} für die kontinuierliche Längskraft q , ω_{kP} für die entsprechende Einzelkraft P):

$$\frac{\omega_{kq}}{\omega_{kP}} \sqrt{\frac{1,913}{1,293}} = 1,217,$$

woraus man ersieht, dass man bei Berücksichtigung der kontinuierlichen Verteilung der Last eine merkliche Erhöhung der kritischen Drehzahl erhalten kann.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik*, Bd. II, S. 176–180, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953).
- [2] H. ZIEGLER, *Ing. Arch.* 20, 377 (1952).
- [3] H. ZIEGLER, a. a. O., S. 386.
- [4] H. ZIEGLER, a. a. O., Seite 385.
- [5] H. ZIEGLER, a. a. O., S. 387, Formel (6.13).
- [6] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Teil 3, Cambridge 1944.

Summary

The paper deals with the critical angular velocities of continuously loaded shafts. A method is given for the solution of the problem and an example is presented which shows that the critical angular velocities increase, when, instead of a single concentrated load on the ends, the shaft carries a continuous load of the same magnitude.

(Eingegangen: 16. März 1960.)

Steady-State Thermal Stresses in an Elastic Cone¹⁾

By ROKURO MUKI and ELI STERNBERG, Providence, R. I., U.S.A.²⁾

1. Introduction

The stress analysis of circular cones, and of bodies bounded by two coaxial conical surfaces with a common vertex, has received repeated attention in the linear theory of elasticity. Thus MICHELL [2]³⁾ established the solution appropriate to a semi-infinite solid cone under a concentrated force of arbitrary orientation, applied to the vertex. L. FÖPPL [3] disposed of the analogous pure

¹⁾ The results communicated in this paper were obtained in the course of an investigation conducted under Contracts Nonr 562(20) and Nonr 562(25) of Brown University with the Office of Naval Research in Washington, D. C.

²⁾ Division of Applied Mathematics, Brown University.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 495.