Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe.

Von

K. Wagner in Köln.

Einleitung.

Wir bezeichnen die Komplexe[1]), die der Fig. 1a bzw. 1b oder einer Unterteilung[2]) derselben homöomorph sind, mit K_a bzw. K_b. Den folgenden Satz von Kuratowski[3]) wollen wir als bekannt voraussetzen:

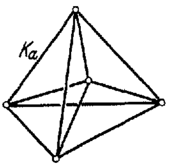

Fig. 1a.

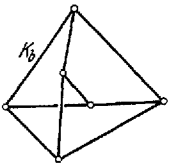

Fig. 1b.

I. Ein Komplex im Raum läßt sich dann und nur dann in die Ebene einbetten, wenn er weder einen K_a noch einen K_b als Teilkomplex enthält.

Bezeichnen wir einmal die Gesamtheit der Komplexe, die keinen K_a enthalten, kurz mit a (analog b), so ist also die Gesamtheit der ebenen Komplexe gleich dem Durchschnitt $a \cdot b$ (= schraffiertes Gebiet in Fig. 1′). Die ebenen Komplexe sind also durch die K_a *und* K_b charakterisiert. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich nun auf eine Teilmenge (= a^* in Fig. 1′) von a, die die ebenen Komplexe umfaßt. Zunächst einige Bezeichnungen:

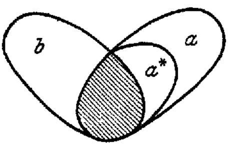

Fig. 1′.

1. Wir sagen kurz, daß wir einen Komplex K_1 auf einen Komplex K_2 *zusammenziehen* können, wenn man mit Hilfe des folgenden Prozesses, beliebig oft nacheinander ausgeführt, K_2 aus K_1 erhält: Man lasse eine Kante auf die Länge Null zusammenschrumpfen und lösche hiernach von je zwei Kanten eine derselben aus, falls sie die gleichen Ecken (also zwei Ecken doppelt)

---

[1]) Ein Komplex K ist ein System endlich vieler Jordanbögen (= Kanten von K) im Raum und der Endpunkte derselben (= Ecken von K). Je zwei Kanten sind, höchstens bis auf gemeinsame Endpunkte, punktfremd, und je zwei Ecken sind durch höchstens eine Kante verbunden. — Wir können annehmen, daß die Kanten speziell Strecken sind, da bekanntlich jeder Komplex einem Streckenkomplex und insbesondere jeder ebene Komplex einem ebenen Streckenkomplex homöomorph ist (s. Jahresbericht der Dtsch. Math.-Ver. **46**, S. 28).

[2]) Ein Komplex entsteht durch Unterteilung eines gegebenen Komplexes, indem man einfach auf den Kanten des letzteren neue Ecken einführt.

[3]) Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund. Math. **15**.

verbinden [4]). 2. Wir sagen von einem Komplex, daß er die *Eigenschaft* E hat, wenn er sich nicht auf einen K_a zusammenziehen läßt. 3. Einen Komplex mit der Eigenschaft E bezeichnen wir mit K^*. Insbesondere bezeichnen wir einen K^* mit K_v^*, wenn jeder $K^* + k$ [5]) die Eigenschaft E nicht mehr hat, sich also auf einen K_a zusammenziehen läßt. Die K_v^* sind also in bestimmtem Sinne *vollständig*.

Aus I. und einer Arbeit [6]) des Verfassers folgt unmittelbar:

II. Jeder ebene Komplex ist ein K^*, hat also notwendig die Eigenschaft E. Jeder Dreieckkomplex K_3 [7]) ist ein K_v^*.

Die K^* (und K_v^*) sind also durch die Eigenschaft E, d. h. durch die K_a *allein* charakterisiert. Wir interessieren uns nun für die Gesamtheit der K^* ($= a^*$ in Fig. 1′), insbesondere der K_v^*. Wir wollen also mit anderen Worten untersuchen, wie weit uns die K^* noch aus der Ebene hinausführen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man die Gesamtheit der K_v^* und mithin der K^* als deren Teilkomplexe vollkommen beherrscht.

Betrachten wir einmal alle diejenigen Dreieckkomplexe K_3 (= einfache K_3), die keinen von einem Dreieck verschiedenen Dreieckkomplex als echten Teilkomplex enthalten, ferner den Komplex K_0 (Fig. 15′), der aus der Kontur eines Möbiusschen Bandes sowie vier Kanten besteht, die das Möbiussche Band in vier Rechtecke zerlegen. Die Gesamtheit dieser Komplexe sei $\mathfrak{B}$. Also

$$\mathfrak{B} = \{\text{einfache } K_3,\ K_0\}.$$

Die folgenden Untersuchungen führen zu dem

Satz: *Die Gesamtheit der Komplexe K:*

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i \text{ (alle } K_i \text{ beliebig aus } \mathfrak{B};\ n = 1, 2, \ldots) \text{ mit der Bedingung}$$

(für $n \neq 1$*):*

$$K_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} K_j = k_i \text{ oder } = D_i \text{ (= Kante oder = Dreieck, } i = 2, 3, \ldots, n,$$

und mit der Einschränkung [8]), *daß im 1. Falle, falls* K_i *ein Dreieckkomplex*

---

[4]) Besteht K aus einer Kante k allein, so läßt sich K nur auf den Nullkomplex 0 zusammenziehen, abgesehen von dem trivialen Fall, daß K unverändert bleibt, der obige Prozeß also Null mal ausgeführt wird.

[5]) k (= Kante) verbindet zwei beliebige Ecken von K^* (= Endpunkte von k), die durch keine Kante von K^* bereits miteinander verbunden sind, und ist sonst mit K^* punktfremd.

[6]) Zwei Bemerkungen über Komplexe. Math. Annalen **112**, S. 317, Bemerkung A.

[7]) K_3 = ebener Streckenkomplex, bei dem jedes der Gebiete, in die er die Ebene zerlegt, von einem Dreieck berandet wird.

[8]) Ist die Einschränkung nicht erfüllt, so erhalten wir wohl einen K^*, aber keinen K_v^*.

ist, die Kante k_i zu keinem Dreieckkomplex der Summe gehört, d. h. K_i nicht an einen Dreieckkomplex geheftet wird) ist mit der Gesamtheit der K_v^* identisch (bis auf die trivialen Elemente 0 = *Nullkomplex und k = Kante). D. h. jeder K_v^* (ausschl.* 0 *und k) läßt sich, wie oben angegeben, aus den Elementen von* $\mathfrak{B}$ *zusammenheften und jeder Komplex K, den wir so aus den Elementen von* $\mathfrak{B}$ *zusammenheften, ist ein K_v^*.*

$\mathfrak{B}$ bildet also in bestimmtem Sinne eine *Basis* der K_v^*. Der Satz ist von einer allgemeineren Bedeutung, weil er in einem engen Zusammenhang mit dem Vierfarbenproblem steht und hier zeigt, an welche Eigenschaft der Ebene der Vierfarbensatz eigentlich gebunden ist. Einer Landkarte L [9]) wollen wir dual denjenigen ebenen Komplex K zuordnen, der in jedem Land genau eine Ecke hat und dessen Kanten je zwei Ecken aus benachbarten [10]) Ländern von L verbinden. Löschen wir einmal in L die gemeinsame Grenze [11]) zweier benachbarter Länder aus. L' sei die Landkarte, die auf diese Weise aus L entsteht, K' ihr dualer Komplex. K' entsteht dann aus K, indem man die Kante von K, welche die beiden benachbarten Länder von L verbindet, auf 0 zusammenzieht. Löscht man nun in L nacheinander die gemeinsamen Grenzen mehrerer Länder aus, so wollen wir hierfür kurz sagen, daß wir einige Länder von L *vereinigen*. Man sieht also, daß mit der Vereinigung einiger Länder von L das Zusammenziehen des dualen Komplexes in bestimmtem Sinne parallel geht. Der Vierfarbensatz besagt nun, daß wir die Länder einer jeden Landkarte L in der Ebene oder dual die Ecken eines jeden ebenen Komplexes K mit höchstens vier Farben färben können [12]). Wir wollen jetzt einmal die Landkarten L abstrakt als Systeme von Dingen (= Länder) betrachten; hierbei sei willkürlich (d. h. unabhängig von der Anschauung) zwischen je zwei der Länder eine Festsetzung getroffen, ob dieselben benachbart sind oder nicht. Wir können nun jeder (abstrakten) Landkarte L (analog der Ebene) dual einen Komplex K im Raum zuordnen [13]). L läßt

---

[9]) L = Aufteilung der Ebene in endlich viele, punktfremde Gebiete (= Länder von L).

[10]) Zwei Länder heißen benachbart, wenn es um einen gemeinsamen Randpunkt derselben eine Kreisscheibe gibt, in der jeder Punkt zu einem der beiden Länder oder deren Rand gehört. Vgl. die Arbeit: Bemerkungen zum Vierfarbenproblem (I); Jahresbericht der Dtsch. Math.-Ver. **46** (1936), S. 26.

[11]) = Menge der Randpunkte, die eine Umgebung besitzen, in der nur Punkte der beiden Länder oder Randpunkte derselben liegen.

[12]) So daß je zwei benachbarte Länder von L, bzw. je zwei Ecken an derselben Kante von K verschieden gefärbt sind.

[13]) Die Länder von L sind eineindeutig den Ecken von K zugeordnet. Zwei Ecken von K sind dann und nur dann durch eine Kante von K verbunden, wenn die den beiden Ecken entsprechenden Länder von L benachbart sind.

sich dann und nur dann in der Ebene realisieren, wenn der duale Komplex K von L sich in die Ebene einbetten läßt. Ferner ist der duale Komplex K von L dann und nur dann ein K^*, wenn L die folgende *Eigenschaft* E hat: In L gibt es keine fünf paarweise (d. h. zu je zwei) benachbarten Länder, gleichgültig wie wir die Länder von L vereinigen. Wie aus dem Satz über die Basis der K_v^* folgt, ist jeder K_v^*, mithin auch jeder K^* mit höchstens vier Farben färbbar [12]), sofern der Vierfarbensatz richtig ist. Also folgt: Falls der Vierfarbensatz richtig ist, so können wir die Länder einer jeden Landkarte L, welche die Eigenschaft E hat, mit höchstens vier Farben färben [12]), gleichgültig ob wir L in der Ebene realisieren können oder nicht. Mit anderen Worten ist also die Eigenschaft E für die Gültigkeit des Vierfarbensatzes *hinreichend und notwendig* [14]).

§ 1.

Die Basis der K_v^*.

Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze über die K_v^*.

I. Voraussetzung: $K = K_1 + K_2$,

$K_1 \cdot K_2 = D$ [$=$ Dreieck oder $= k$ (Kante), $= e$ (Ecke), $= 0$ (Nullkomplex)], K läßt sich auf einen K_a zusammenziehen.

Behauptung: Entweder K_1 oder K_2 läßt sich auf einen K_a zusammenziehen.

Beweis: Nach Voraussetzung läßt sich K auf einen K_a zusammenziehen. Hierbei werde K_1 bzw. K_2 auf K_1' bzw. K_2' zusammengezogen. Also ist

$K_a = K_1' + K_2'$, wobei der Durchschnitt von K_1' und K_2' entweder D oder k, e, 0 ist. Hieraus folgt aber, daß K_a ganz entweder in K_1' oder K_2' liegt. D. h. es ist entweder $K_1' = K_a$ oder $K_2' = K_a$, w. z. b. w.

Aus I. folgt:

I'. Voraussetzung: $K = K_1 + K_2$ (K_1 und $K_2 \neq 0$),

$$K_1 \cdot K_2 = e \quad (\text{oder} = 0).$$

Behauptung: $K \neq K_v^*$.

Beweis. Wir können annehmen, daß sich K auf keinen K_a zusammenziehen läßt, da sonst die Behauptung erfüllt ist. Im ersten

[14]) Ähnlich dem Zusammenziehen können wir in einem Komplex K_1 zwei beliebige Ecken, die durch keine Kante verbunden sind, identifizieren. Gelangen wir mit Hilfe dieses Prozesses, beliebig oft nacheinander ausgeführt, von K_1 zu K_2, so sagen wir hierfür, daß K_2 aus K_1 durch Identifizieren entsteht. Der Vierfarbensatz ist dann mit dem allgemeineren Satz äquivalent: Jeder K^* läßt sich durch Identifizieren in ein Tetraeder (Dreieck oder Kante) überführen.

Falle $K_1 \cdot K_2 = e$ sei k_1 bzw. k_2 eine an e liegende Kante von K_1 und K_2. k sei eine neue Kante, die die beiden von e verschiedenen Ecken von k_1 und k_2 verbinde. Es sei $k_1 + k_2 + k = D$. D, K_1 und desgleichen K_2 läßt sich auf keinen K_a zusammenziehen, also nach I. auch die Summe $K_1 + D$ und $(K_1 + D) + K_2 = K + k$. D. h. $K \neq K_v^*$. Im zweiten Falle $K_1 \cdot K_2 = 0$ sei k eine neue Kante, die eine Ecke von K_1 mit einer Ecke von K_2 verbinde. Wie angenommen, läßt sich K, also K_1 und K_2, und natürlich k auf keinen K_a zusammenziehen, also nach I. ebenso auch $(K_1 + k) + K_2 = K + k$. D. h. $K \neq K_v^*$, w. z. b. w.

II. Voraussetzung: $K = K_1 + K_2$,
$K_1 \cdot K_2 = D$.

Behauptung: K ist dann und nur dann ein K_v^*, wenn sowohl K_1 wie K_2 ein K_v^* ist.

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, daß K_1 wie K_2 ein K_v^* ist. Nach I. läßt sich dann K auf keinen K_a zusammenziehen. Wir müssen also noch zeigen, daß K bezüglich der Eigenschaft E vollständig ist. Angenommen, K sei nicht vollständig, d. h. $K + k$ ließe sich nicht auf einen K_a zusammenziehen. Wegen der Vollständigkeit von K_1 und K_2 verbindet dann k eine Ecke e_1 von K_1 mit einer Ecke e_2 von K_2, wobei weder e_1 noch e_2 auf D liegt. e sei eine Ecke von D, k' die Kante mit den Endpunkten e_1 und e, und k'' die Kante mit den Endpunkten e_2 und e (Fig. 2). Dann folgt zunächst, daß k' zu K_1 und k'' zu K_2 gehört, falls es einen Polygonzug P in K gibt, der entweder e_1 oder e_2 mit e verbindet und bis auf seinen Endpunkt e mit D fremd ist. Denn P liege etwa in K_2. Dann läßt sich $K_1 + P + k$ auf $K_1 + k'$, mithin auch $K + k$ auf $K_1 + k'$ zusammenziehen. Wegen der Annahme läßt sich somit $K_1 + k'$

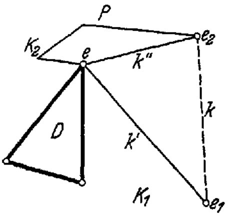

Fig. 2.

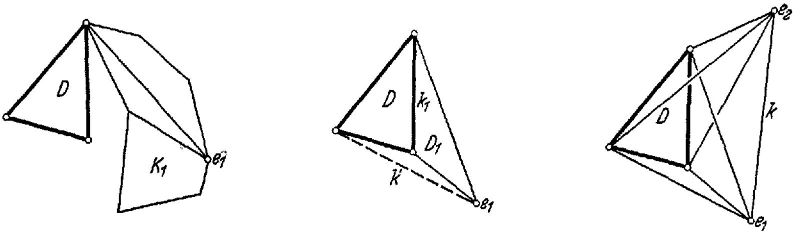

Fig. 3. 1. Fall. 2. Fall. 3. Fall.

auf keinen K_a zusammenziehen. Da K_1 vollständig ist, gehört also k' zu K_1. Wir können nun $K_2 + k' + k$ auf $K_2 + k''$ zusammenziehen. Hieraus schließt man analog, daß k'' zu K_2 gehört. Wir müssen also drei

Fälle unterscheiden, je nachdem e_1 (desgl. e_2) mit einer Ecke, zwei oder drei Ecken von D verbunden ist (Fig. 3). Im 1. Falle folgt aus I'. $K_1 \neq K_v^*$. Im 2. Falle sei D_1 das mit D benachbarte Dreieck durch e_1, k_1 die gemeinsame Kante von D und D_1, und k' verbinde die beiden k_1 gegenüberliegenden Ecken von D und D_1. Nun läßt sich $D + D_1 + k'$ sowie $(K_1 - D) + k_1$ auf keinen K_a zusammenziehen, mithin nach I. auch deren Summe $K_1 + k'$; d. h. $K_1 \neq K_v^*$. Im letzten Fall ist e_1, desgleichen e_2 mit den drei Ecken von D verbunden. Diese sechs Kanten bilden zusammen mit D und k einen K_a im Widerspruch zur Annahme. Mit den drei Fällen ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. — Umgekehrt sei nun K ein K_v^*. Dann folgt 1. K_1 und K_2 lassen sich auf keinen K_a zusammenziehen, und 2. K_1 und K_2 sind vollständig. Denn andernfalls können wir K_1 und K_2 durch Hinzufügung weiterer Kanten in vollständige Komplexe überführen. Dann wäre aber nach dem ersten Teil der Behauptung K kein K_v^* gewesen. Hiermit ist die Behauptung bewiesen[15]).

III. Voraussetzung: D_1 sei ein Dreieck in K_1. k_1 sei eine Kante von D_1. In K_2 sei analog D_2 und k_2 gegeben. Wir heften K_1 und K_2 längs k_1 und k_2 zusammen und verbinden die k_1 und k_2 gegenüberliegenden Ecken von D_1 und D_2 durch eine neue Kante k. Wir bilden also den Komplex (Fig. 4):

$$K = K_1 + K_2 + k, \quad K_1 \cdot K_2 = k_1 = k_2.$$

K_1 wie K_2 sei ein K_v^*.

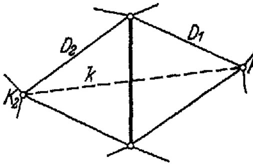

Fig. 4.

Behauptung: K ist ein K_v^*.

Beweis: $D_1 + D_2 + k$ ist ein K_v^*. Also ist nach II. auch
$K_1 + D_2 + k$ ein K_v^*, mithin auch
$K_2 + K_1 + k$, w. z. b. w.

IV. Voraussetzung: $K = K_1 + K_2$, $K_1 \cdot K_2 = k$.

Behauptung: K ist dann und nur dann ein K_v^*, wenn K_1 wie K_2 ein K_v^* ist und es wenigstens in einem der beiden Komplexe K_1 und K_2 kein Dreieck durch k gibt.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß K ein K_v^* ist. Dann ist auch K_1 und K_2 ein K_v^*. Denn erstens läßt sich K_1 und K_2 auf keinen K_a zusammenziehen und zweitens ist K_1, desgleichen K_2 vollständig, da sonst nach I. $K \neq K_v^*$ wäre. Nach III. gibt es somit wenigstens in einem der K_1 und K_2 kein Dreieck durch k. Umgekehrt sei jetzt K_1 wie K_2 ein K_v^* und wenigstens in einem der beiden Komplexe K_1 und K_2 — etwa in K_1 — gebe es kein Dreieck durch k (Fig. 5). Zunächst folgt aus I.,

[15]) Mit Hilfe der Dreieckkomplexe K_3 erhält man nach dem Hilfssatz nichtebene K_v^*.

daß sich K auf keinen K_a zusammenziehen läßt. Wir müssen uns also noch davon überzeugen, daß K vollständig ist, d. h. daß sich $K + k'$ auf einen K_a zusammenziehen läßt. Da K_1 und K_2 vollständig sind, müßte k' eine Ecke e_1 aus K_1 mit einer Ecke e_2 aus K_2 verbinden, wobei weder e_1 noch e_2 auf k liegt. Wir können nun e_2 mit jeder der beiden Ecken von k durch einen Polygonzug in $K_2 - k$ verbinden, da andernfalls nach I'. K_2 kein K_v^* wäre. e sei eine Ecke von k, die mit e_1 durch keine Kante von K_1 verbunden ist. Ferner sei P ein Polygonzug in $K_2 - k$, der e_2 mit e verbindet. Dann läßt sich wegen der Vollständigkeit von K_1 der Komplex $K_1 + k' + P$, mithin auch $K + k'$ auf einen K_a zusammenziehen. Also ist K ein K_v^*, w. z. b. w.

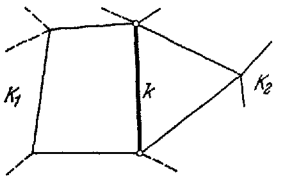

Fig. 5.

V. Voraussetzung: K' sei ein echter Teilkomplex von K, K' wie K sei ein K_v^* ($K' \neq 0$, k und D).

Behauptung. $K = K_1 + K_2$, $K_1 \cdot K_2 = D$ (K_1 und $K_2 \neq D$) oder
$K = K_1 + K_2$, $K_1 \cdot K_2 = k$ (K_1 und $K_2 \neq k$).

Beweis: e sei eine Ecke von K, die nicht zu K' gehört. Es gibt eine solche Ecke e, da K' ein echter Teilkomplex von K ist und beide Komplexe vollständig sind. Die Gesamtheit der Kanten, zu denen man in K von e aus gelangen kann, ohne eine Ecke von K' zu passieren, bildet einen Komplex K_1. K_2 sei der Komplex aus den übrigen Kanten von K, $K_2 = K - K_1$. K_2 enthält also K'. Nach Konstruktion liegen die gemeinsamen Ecken von K_1 und K_2 sämtlich auf K'. Also sind diese Ecken paarweise, d. h. zu je zwei durch Kanten von K', mithin von K_2 verbunden. Denn zwei beliebige dieser Ecken von K' sind durch zwei Polygonzüge P und P' in K_1 mit e verbunden. Nun läßt sich $K' + P + P'$ auf $K' + k$ zusammenziehen, wobei k die beiden Ecken von K' verbindet. $K' + k$ läßt sich also auf keinen K_a zusammenziehen; d. h. k gehört zu K'. Da K sich auf keinen K_a zusammenziehen läßt, kann also K_1 mit K_2 höchstens drei Ecken, d. h. ein Dreieck gemeinsam haben. Nach I'. muß aber K_1 mit K_2 mindestens zwei Ecken, d. h. eine Kante gemeinsam haben. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Im Anschluß an V. bezeichnen wir einen K_v^* als einen *einfachen* K_v^*, wenn er keinen von 0, k und D verschiedenen K_v^* als echten Teilkomplex enthält. Wie aus V., II. und IV. folgt, bildet also die Gesamtheit der einfachen K_v^* in bestimmtem Sinne eine *Basis* der K_v^*. Zu dieser Basis gehören sicher alle einfachen Dreieckkomplexe K_3, die also keinen von einem Dreieck verschiedenen Dreieckkomplex als echten Teilkomplex enthalten. Im folgenden lernen wir noch einen nichtebenen, einfachen K_v^*

($= K_0$) kennen[16]). Es wird gezeigt, daß die Basis der K_v^* mit diesem K_0 und den einfachen K_3 (und den trivialen Elementen k und 0) bereits erschöpft ist.

§ 2.

Aufstellung der Basis.

Wir kommen nunmehr zu den entscheidenden Hilfssätzen.

VI. Voraussetzung. K^* nicht eben (d. h. K^* läßt sich nicht in die Ebene einbetten).

Behauptung. $K^* = K_1 + K_2$, wobei K_1 und K_2 genau drei oder zwei Ecken[17]) gemeinsam haben und außerdem die Eckenzahl von K_1 wie von K_2 im ersten Falle > 3, im zweiten Falle > 2 ist.

Beweis. Wir können zunächst annehmen, daß K^* zusammenhängend ist[18]). Es sei dann K ein *ebener* Teilkomplex von K^* *maximaler* Kantenzahl. Es folgt, daß auch K zusammenhängend ist, da K von maximaler Kantenzahl ist. Ferner verbindet jede Kante von $K^* - K$ zwei Ecken von K. Wir wollen im folgenden jede solche Kante eine *Brücke* von K nennen. Es sei nun b eine Brücke von K. $K + b$ ist nicht eben. Da $K + b$ infolge der Definition des K^* keinen K_a enthält, muß es also nach dem Satz I der Einleitung in $K + b$ einen K_b (Fig. 1b) geben. Also liegt in $K + b$ die Fig. 6[19]). P ist das e_1 und e_2 (= Endpunkte von b) trennende Polygon. Die Gesamtheit der Brücken von K, die zwei Ecken im Inneren (bzw. im Äußeren) von P oder eine Ecke im Inneren (bzw. Äußeren) von P mit einer Ecke auf P verbinden, bezeichnen wir einmal mit B_1 (bzw. B_2). Ferner sei B_{12} die Gesamtheit der Brücken, die eine Ecke im Inneren mit einer Ecke im Äußeren von P verbinden. Sodann bezeichnen wir einmal die Gesamtheit der Kanten, die von e_1 (bzw. e_2) aus in $K + B_1 + B_2$ erreichbar sind, ohne P zu passieren, mit K_1' (bzw. K_1). Durch Hinzufügung weiterer Kanten zu K_1' und K_1'' konstruieren wir nun

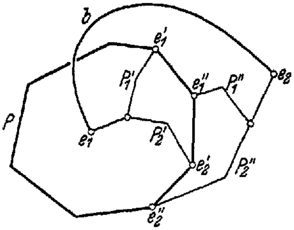

Fig. 6.

[16]) K_0 enthält kein Dreieck, so daß also auch der Hilfssatz IV an dem Aufbau der K_v^* aus den Elementen der Basis beteiligt ist.

[17]) Und eventuell Kanten, die diese Ecken verbinden.

[18]) D. h. K^* läßt sich nicht als Summe zweier punktfremder, von 0 verschiedener Komplexe darstellen.

[19]) Hierbei kann speziell der Polygonzug, der in der Fig. 6 von e_1, desgleichen e_2, nach der nächsten mit o markierten Ecke verläuft, 0 sein. In den Zeichnungen stellen wir der Übersicht wegen eine Brücke durch einen Bogen dar.

schrittweise die beiden Teilkomplexe K' und K'' von K^* wie folgt. Wir nehmen an, daß wir dabei bereits bei den beiden Teilkomplexen K'_n und K''_m von K^* angelangt sind. Von K'_n und K''_m setzen wir voraus: **1.** Der Durchschnitt von K'_n und K''_m besteht höchstens aus Ecken von P, **2.** von K'_n, desgleichen K''_m aus kann man keine weiteren Kanten von $K + B_1 + B_2$ erreichen, es sei denn, daß man P passiert. Es sei nun b_{12} eine Brücke aus B_{12}, die nur eine Ecke mit $K'_n + K''_m$ — etwa mit K'_n — gemeinsam hat. Wir fügen nun zu K'_n die Kante b_{12} und die Gesamtheit der Kanten hinzu, die man von K'_n aus über b_{12} in $K + B_1 + B_2$ erreichen kann, ohne P zu passieren. Auf diese Weise erhalten wir aus K'_n einen Komplex K'_{n+1}. Für K'_{n+1} und K''_m gelten nunmehr die analogen Sätze 1. und 2., mithin auch für die Komplexe K'_{n_0} und K''_{m_0}, zu denen wir schließlich am Ende der Konstruktion gelangen. Jede Brücke aus B_{12} ist also entweder mit $K'_{n_0} + K''_{m_0}$ punktfremd oder ihre beiden Endpunkte liegen auf $K'_{n_0} + K''_{m_0}$. Der Komplex K' (s. oben) entstehe aus K'_{n_0} durch Hinzufügung aller Brücken aus B_{12}, deren Endpunkte beide auf K'_{n_0} liegen. (Analog K'' aus K''_{m_0}.) Die Sätze 1. und 2. behalten also auch für K' und K'' ihre Gültigkeit. Es sei B'_{12} die Gesamtheit der Brücken aus B_{12}, die eine Ecke von K' mit einer Ecke von K'' verbinden. Dann folgt: Jede Kante k von $\bar{P} = K^* - (K' + K'' + B'_{12})$ hat mit $K' + K'' + B'_{12}$ höchstens Ecken auf P gemeinsam, d. h. **3.** der Durchschnitt von $\bar{P}$ mit $K' + K'' + B'_{12}$ besteht höchstens aus Ecken von P. Denn wir unterscheiden die beiden Fälle, daß k entweder zu $K + B_1 + B_2$ oder zu B_{12} gehört. Hätte dann k mit $K' + K'' + B'_{12}$ eine Ecke gemeinsam, die nicht auf P liegt, so hätte im ersten Falle k nach Konstruktion von K' und K'' in einem der beiden Komplexe aufgenommen werden müssen; im zweiten Falle wäre die Konstruktion der K'_n und K''_m nicht zu Ende geführt worden. Insgesamt haben wir also K^* zerlegt in:

$$K^* = K' + K'' + B'_{12} + \bar{P}.$$

Nach 1., 2. und 3. sind K' und K'', sowie $K' + K''$ und $\bar{P}$ höchstens bis auf Ecken von P punktfremd. B'_{12} ist die Gesamtheit der Brücken aus B_{12}, die K' mit K'' verbinden. Nach der Fig. 6 hat K', desgleichen K'' mit $\bar{P}$, d. h. mit P mindestens zwei Ecken[20]) gemeinsam.

Wir beweisen zunächst die Behauptung für den *Spezialfall*, daß B'_{12} nur aus der Brücke b besteht (Fig. 6). Also:

Annahme. $B'_{12} = b$.

Es folgt dann sofort, daß entweder K' oder K'' höchstens zwei Ecken (d. h. nach Fig. 6 genau zwei Ecken) mit P gemeinsam hat. Denn

[20]) Im folgenden ist entscheidend, daß sich in der Fig. 6 die beiden Eckenpaare von K' und K'' auf P trennen.

andernfalls gäbe es von e_1 aus außer den beiden Polygonzügen P_1' und P_2' der Fig. 6 noch einen weiteren P_3' in K', die in drei verschiedenen Punkten von P enden und sonst mit P punktfremd sind. Desgleichen gäbe es analog von e_2 aus drei Polygonzüge P_1'', P_2'' und P_3'' in K''. Dann ließe sich aber unter Berücksichtigung der Fußnote [20]) der Komplex $P + P_1' + P_2' + P_3' + P_1'' + P_2'' + P_3'' + b$ auf einen K_a zusammenziehen, mithin auch K^*, im Widerspruch zur Definition. Wir können also annehmen, daß K' mit P nur zwei Ecken gemeinsam hat. Die beiden Komplexe

$$K_1 = K' + b,$$
$$K_2 = K'' + \overline{P}$$

erfüllen dann aber die Behauptung, womit der Spezialfall bewiesen ist.

e' sei eine beliebige, feste Ecke von K', die nicht auf P liegt [21]). Wir bezeichnen nun einen Teilkomplex von K' als ein Ende E um e', wenn 1. e' zu E gehört, 2. E mit P fremd ist und 3. E mit dem Komplex $K' - E$ nur eine Ecke e gemeinsam hat. e trennt also E von $K' - E$. Wir nennen e die trennende Ecke von E. Jedes Ende ist zusammenhängend, da dasselbe für K' gilt. $\overline{E}$ sei ein anderes Ende um e' mit der trennenden Ecke $\bar{e}$. Dann liegt entweder e in $\overline{E}$ oder $\bar{e}$ in E. Denn wir verbinden e' mit e durch einen Polygonzug in E. Falls dieser aus $\overline{E}$ austritt, so muß dies in $\bar{e}$ geschehen, d. h. $\bar{e}$ gehört zu E. Andernfalls liegt e in $\overline{E}$. Wir behaupten nun, daß auch $E + \overline{E}$ ein Ende um e' mit der trennenden Ecke e oder $\bar{e}$ ist. Denn $E + \overline{E}$ erfüllt die Bedingungen 1. und 2. Nach 3. hat $E + \overline{E}$ mit $K' - (E + \overline{E})$ entweder nur eine der beiden Ecken e und $\bar{e}$ (evt. $e = \bar{e}$) oder beide zugleich gemeinsam. Der erste Fall liefert die Behauptung. Im zweiten Falle lägen aber beide Ecken e und $\bar{e}$ sowohl in $K' - E$ wie in $K' - \overline{E}$ und, wie wir eben sahen, entweder in E oder $\overline{E}$ entgegen der Definition von E und $\overline{E}$. Mithin ist $E + \overline{E}$ ein Ende um e'. Also gibt es ein *größtes* Ende E' um e' (evt. $E' = 0$). Wir bezeichnen E' als ein Ende von K'. Je zwei Enden von K' sind also punktfremd. Die folgenden Betrachtungen können wir dadurch vereinfachen, daß wir uns alle Enden von K' und K'' auf 0 zusammengezogen denken. Wir wollen also im folgenden annehmen:

A. Außer 0 gibt es in K' und K'' kein Ende.

Wir müssen dann bei der Zerlegung von K^* in die beiden Summanden K_1 und K_2 nur darauf achten, daß alle Brücken aus B_{12}', die eine Ecke gemeinsam haben (d. h. deren Endpunkte ursprünglich in demselben Ende

---

[21]) Die Betrachtungen gelten analog für K''.

von K' oder K'' lagen), zugleich entweder in K_1 oder K_2 aufgenommen werden. e' sei jetzt eine beliebige, nicht auf P gelegene Ecke von K'. Wir behaupten:

B. Es gibt von e' aus in K' zwei bis auf e' punktfremde Polygonzüge nach P, von denen wenigstens einer in e_1' oder e_3' der Fig. 6 endet. (Analog für e'' und K'').

Denn nach der Fig. 6 und der Konstruktion von K' gibt es überhaupt zwei Polygonzüge in K', die e' mit den beiden Ecken e_1' und e_3' von P verbinden. Nun sei P_1 einer dieser beiden Polygonzüge, etwa derjenige, der in e_1' endet. Betrachten wir einmal einen weiteren Polygonzug P_2 in K', der von e' aus zunächst ein Stück auf P_1 bis zu einer Ecke $e \neq e_1'$ von P_1 verläuft, sich dann von P_1 trennt und, ohne wieder P_1 zu treffen, auf P endet. Wir unterscheiden dann die beiden Fälle: 1. alle e' und P verbindenden Polygonzüge von K' passieren die Ecke e, und 2. es gibt einen Polygonzug P' in K', der e' mit P verbindet, aber e meidet. Im 1. Falle folgt $e = e'$, also B., da nach A. jedes Ende von K' gleich 0 ist. Im 2. Falle können wir P_1 (exklusive e_1') und P_2 mit Hilfe von P' so abändern, daß das gemeinsame Stück $[e' e]$ der beiden Polygonzüge verkürzt wird. Durch Wiederholung der Betrachtungen auf die beiden abgeänderten Polygonzüge erhält man schließlich die beiden gesuchten Polygonzüge von B. Wir beweisen nun allgemein die Behauptung des Hilfssatzes VI für den

Fall I. K' hat auf P mindestens drei Ecken.

Dann hat K'' auf P nur zwei Ecken, da sich sonst mit den Schlüssen des Spezialfalles K^* auf einen K_a zusammenziehen läßt. Nach B müssen wir die Fälle a), b) und c) der Fig. 7 unterscheiden.

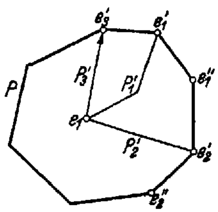

Fig. 7a.

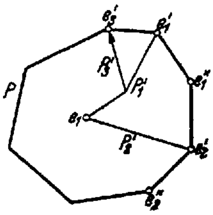

Fig. 7b.

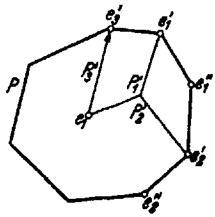

Fig. 7c.

Wir machen zunächst für a) und c) die Einschränkung, daß e_3' von e_1'' und e_2'' verschieden ist. V' sei nun die Gesamtheit der Kanten von K', die von den Kanten von B_{12}' aus auf einem Polygonzug in K' zu erreichen sind, ohne e_1 oder eine Ecke von P zu passieren. Verfolgen wir einmal einen solchen Polygonzug P' von V'. Wie man sich leicht an Hand der Fig. 7a, b und c überzeugt, passiert P' keine Ecke von

$P'_1 + P'_2 + P'_3$, da sich andernfalls K^* auf einen K_a zusammenziehen läßt; ferner endet P' auf P höchstens in den Ecken e''_1 oder e''_2. Also hat V' mit $K' - V'$ und P höchstens die Ecken e_1, e''_1 und e''_2 gemeinsam. Für $V' \neq 0$ erfüllt also

$$(1) \qquad \begin{aligned} K_1 &= K'' + B'_{12} + V' \\ K_2 &= (K' - V') + \overline{P} \end{aligned}$$

die Behauptung, und für $V' = 0$ (d. h. alle Kanten von B'_{12} enden in e_1):

$$(2) \qquad \begin{aligned} K_1 &= K'' + B'_{12} \\ K_2 &= K' + \overline{P}. \end{aligned}$$

Es bleibt noch übrig, daß für a) oder c) $e'_3 = e''_1$ oder $e'_3 = e''_2$ ist. Aus Symmetriegründen können wir annehmen: $e'_3 = e''_1$ (Fig. 7′a und c). Im Falle a) sei V' wie oben bestimmt. P' sei ein Polygonzug von V'. P' passiert die Polygonzüge P'_1 oder P'_2 nicht, da andernfalls entweder K^* sich auf einen K_a zusammenziehen läßt oder (falls P' zuvor noch P'_3 passieren würde) man zur Fig. 7 b gelangt, die erledigt ist. Desgleichen endet P' auf P höchstens in $e''_1 = e'_3$ oder e''_2. Mithin erfüllen die Gleichungen (1) oder (2) die Behauptung. Im letzten Falle c) berücksichtigen wir, daß wir die folgende Annahme machen können: In K'

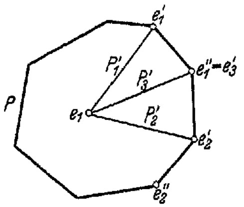

Fig. 7′a.

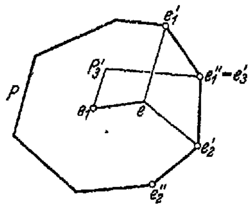

Fig. 7′c.

gibt es keinen Polygonzug, der $(e'_3 e_1]$[22]) + $(e_1 e)$ mit $(e e'_1)$, $(e e'_2)$ oder P (exklusive $e'_3 = e''_1$ und e''_2) verbindet und bis auf seine Endpunkte mit der Fig. 7′c punktfremd ist. Denn ein Polygonzug, der $(e'_3 e_1]$ mit $(e e'_1]$, $(e e'_2]$ oder mit P (exklusive e''_1 und e''_2) verbindet, verhilft uns zu den in Fig. 7 und 7′a erledigten Fällen. Verbindet der Polygonzug im anderen Falle $(e_1 e)$ mit $(e e'_1]$ oder $(e e'_2]$, so können wir das gemeinsame Stück $[e_1 e]$ analog den Schlüssen des Beweises von B. verkürzen. In dem letzten Falle schließlich liegen die Endpunkte des Polygonzuges auf $(e_1 e)$ und P, wobei der Endpunkt auf P von den vier markierten Ecken auf P der Fig. 7′c verschieden ist. Wir können dann aber den Polygonzug an

[22]) Kurze Bezeichnung für den Polygonzug, der in der Fig. 7′c von e'_3 nach e_1 verläuft. Die eckige Klammer bedeutet inklusive, die runde Klammer exklusive des betreffenden Endpunktes.

Stelle von $(e\,e_1')$ oder $(e\,e_2')$ in die Fig. 7'c setzen, so daß sich die beiden Eckenpaare auf P wie bisher trennen. Da hierdurch das gemeinsame Stück $[e_1\,e]$ verkürzt wird, gelangen wir also am Ende entweder zu der Fig. 7'a, die erledigt ist, oder zu der Fig. 7'c, in der die gemachte Annahme erfüllt ist. V' sei nunmehr die Gesamtheit der Kanten von K', die von den Kanten von B_{12}' aus auf einem Polygonzug in K' zu erreichen sind, ohne e oder P zu passieren. P' sei ein Polygonzug von V', der also weder e noch eine Ecke von P überschreitet. Unter Berücksichtigung der letzten Annahme endet P' auf P höchstens in $e_3' = e_1''$ oder e_2''. Mithin hat V' mit $K' - V'$ und P höchstens die drei Ecken e, e_1'' und e_2'' gemeinsam. $[e_1\,e_3']$ sowie $[e_1\,e]$ ist in V' enthalten, da b in $e_1 \neq e$ endet. Also erfüllt

$$(3) \qquad \begin{aligned} K_1 &= K'' + B_{12}' + V', \\ K_2 &= (K' - V') + \overline{P} \end{aligned}$$

die Behauptung.

Mit den drei Fällen ist der Fall I vollständig bewiesen.

F a l l II. K' wie K'' hat auf P genau zwei Ecken.

Nach der Bemerkung B liegt also in K^* die Fig. 8. Wie im Fall I müssen wir mehrere Fälle unterscheiden.

1. B_{12}' enthält zwei punktfremde Brücken b_1 und b_2 (Fig. 9), die mit $e_1 + e_2$ punktfremd sind (d. h. b, b_1 und b_2 sind paarweise punktfremd).

Wir behaupten, daß sich dann K^* auf einen K_a zusammenziehen läßt. Wir nehmen einmal die folgende Behauptung als bewiesen an:

C. Von den drei Brücken b, b_1 und b_2 greife man zwei willkürlich heraus (etwa b_1 und b_2). Dann gibt es in K' zwei punktfremde Polygonzüge P' und Q', von denen P' eine der beiden herausgegriffenen Brücken mit P, und Q' die Endpunkte der beiden anderen Brücken, ohne P zu berühren, miteinander verbindet. (Analog P'' und Q'' in K'').

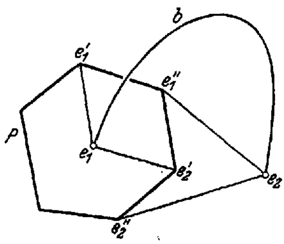

Fig. 8.

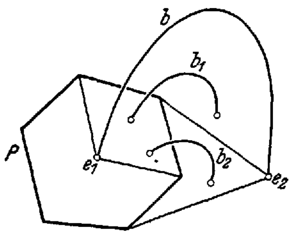

Fig. 9.

Aus Symmetriegründen können wir dann annehmen, daß P' b_1 mit P, und P'' b_2 mit P verbindet. Ziehen wir nun P', Q', P'' und Q'' auf 0 zusammen, nehmen b_1 zu K'' und b_2 zu K' hinzu, so läßt sich K^* mit den Schlüssen des Spezialfalles auf einen K_a zusammenziehen.

Wir müssen uns also noch von C. überzeugen. Nach B. liegt nun in $K' + P$ die Fig. 9′, in der die mit o markierten Ecken die Endpunkte von b_1 und b_2 sind und die beiden mit einem Pfeil angedeuteten Polygonzüge in zwei beliebigen, verschiedenen Punkten der beiden anderen Polygonzüge von K' der Fig. 9′ enden. Da die beiden Ecken o der Fig. 9′ in K' verbindbar sind, ohne P zu berühren, können wir annehmen, daß wenigstens einer der beiden Endpunkte der beiden Pfeile von e_1' und e_2' verschieden ist. Insbesondere können die beiden Endpunkte o von b_1 und

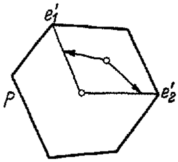

Fig. 9′.

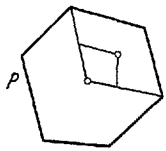

Fig. 9′a.

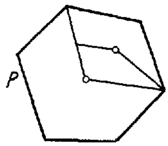

Fig. 9′b.

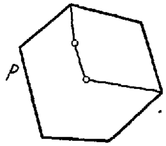

Fig. 9′c.

b_2 auf einem von e_1' nach e_2' führenden Polygonzug von K' liegen. Wir müssen also die drei Fälle der Fig. 9′a, b und c unterscheiden. An Hand der drei Figuren überzeugt man sich unmittelbar von C., gleichgültig wo e_1 liegt. Der Fall 1. kann also nicht auftreten.

2. B_{12}' enthält zwei punktfremde Brücken b_1 und b_2, von denen b_1 mit $e_1 + e_2$ und b_2 mit e_2 punktfremd ist (Fig. 10).

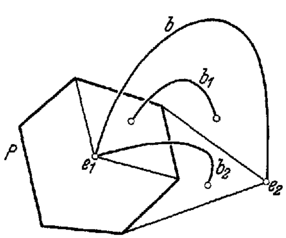

Fig. 10.

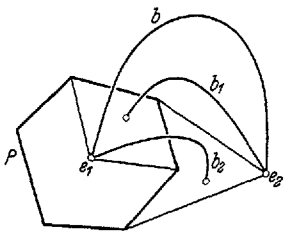

Fig. 11.

Auch dieser Fall scheidet aus. Denn nach B. gibt es einen Polygonzug in K', der den Endpunkt von b_1 mit P verbindet, ohne e_1 zu passieren. Wir ziehen diesen Polygonzug auf 0 zusammen und wenden C. auf b, b_2 und K'' an. Wie wir bei dem Fall 1. sahen, ließe sich dann aber K^* auf einen K_a zusammenziehen.

3. B_{12}' enthält zwei punktfremde Brücken b_1 und b_2, von denen b_1 mit e_1 und b_2 mit e_2 punktfremd ist (Fig. 11).

Auch dieser Fall führt zu einem Widerspruch, da wir sonst K^* mit den Schlüssen des 2. Falles auf einen K_a zusammenziehen können.

4. B'_{12} enthält eine Brücke b_1, die mit $e_1 + e_2$ fremd ist (Fig. 12).

Aus 1., 2. und 3. und Symmetriegründen folgt zunächst, daß B'_{12} mit b und b_1 bereits erschöpft ist. — Wir nehmen zunächst einmal an, daß jeder Polygonzug in K', der e' mit e'_1 (analog e'_2) ohne Berührung von e'_2 verbindet, e_1 passiert. V' sei dann die Gesamtheit der Kanten von K', die wir von e' aus in K' erreichen können, ohne e_1 oder e'_2 zu überschreiten. Nach der Annahme hat V' mit $K' - V'$ höchstens die beiden Ecken e_1 und e'_2 gemeinsam. Also erfüllt in diesem Falle

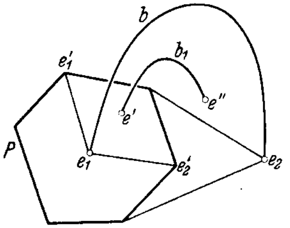

Fig. 12.

$$K_1 = V' + b_1,$$
$$K_2 = K' - V' + K'' + b + \overline{P}$$

die Behauptung. Andernfalls liegt in K^* die Fig. 12′ ($e_1 \neq e$, eventuell $e' = e$, entsprechend in K''), da wir e' erstens nach B. durch zwei bis auf den gemeinsamen Anfangspunkt punktfremde Polygonzüge in K' mit P und zweitens, da K' zusammenhängend ist, durch einen mit P punktfremden Polygonzug in K' mit e_1 verbinden können. Wir behaupten nun, daß alle Polygonzüge in K', die e_1 mit e'_1 oder e' verbinden und höchstens bis auf den Endpunkt e'_1 mit P fremd sind, e passieren müssen. Denn andernfalls gäbe es von e_1 und ebenso von e_2 aus drei Polygonzüge, die in den drei verschiedenen mit 1 bzw. 2 bezeichneten Ecken des geschlossenen Polygons $e' e e'_1 e''_1 e e'' e'$ (Fig. 12″) enden. Die Fig. 12″ läßt sich also auf einen K_a zusammenziehen. Mithin würde dasselbe für K^* gelten entgegen der Definition.

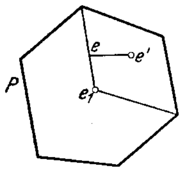

Fig. 12′.

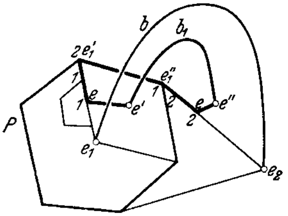

Fig. 12″.

— Die Gesamtheit der Kanten von K', zu denen wir nun in K' von e_1 aus gelangen können, ohne e oder P zu passieren, wollen wir mit V' bezeichnen. V' hat also mit $K' - V'$ höchstens die beiden Ecken e und e'_2 gemeinsam. Ferner gehört e' nicht zu V'. Also erfüllt

$$K_1 = V' + b,$$
$$K_2 = (K' - V') + K'' + b_1 + \overline{P} \text{ die Behauptung VI.}$$

Es bleibt noch übrig:

5. Alle Brücken aus B'_{12} enden auf K' in e_1 (oder auf K'' in e_2). Wir setzen:

$$K_1 = K'' + B'_{12}$$
$$K_2 = K' + \overline{P}.$$

Mit diesen fünf Fällen ist also der Fall II vollständig erledigt und mithin der Hilfssatz VI bewiesen.

VII. Voraussetzung: K_v^* nicht eben.

Behauptung: Es gilt einer der drei folgenden Fälle:

(1) $K_v^* = K_1 + K_2$, $K_1 \cdot K_2 = k$ (K_1 und $K_2 \neq k$),

(2) $K_v^* = K_1 + K_2$, $K_1 \cdot K_2 = D$ (K_1 und $K_2 \neq D$),

(3) $K_v^* = K_1 + T$, $K_1 \cdot T = e_1 + e_2 + e_3$ (Fig. 13).

Der Komplex T besteht aus drei Kanten, die eine Ecke (= Spitze von T) gemeinsam haben. Keine Kante von K_1 verbindet zwei der Ecken e_1, e_2 und e_3 (= Fußpunkte von T).

Beweis: Nach VI. gilt die Zerlegung $K_v^* = K_1 + K_2$, wobei K_1 und K_2 genau entweder zwei Ecken e und e' oder drei Ecken e_1, e_2 und e_3 (und eventuell die diese Ecken verbindenden Kanten) gemeinsam haben. Im ersten Falle sei k die Kante ee'. Nach dem Hilfssatz I' können wir K_1 wie K_2 auf k, also K_v^* auf $K_1 + k$ und $K_2 + k$ zusammenziehen. Nach dem Hilfssatz I läßt sich mithin die Summe

$$K_1 + K_2 + k = K_v^* + k$$

auf keinen K_a zusammenziehen, d. h. k gehört zu K_v^*. Also gilt (1). Im zweiten Falle sei D das Dreieck mit den Ecken e_1, e_2 und e_3. Wir nehmen dann zunächst an,

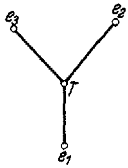

Fig. 13.

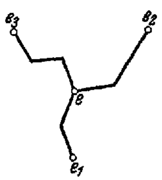

Fig. 14.

daß sich sowohl K_1 wie K_2 auf D, d. h. K_v^* auf $K_1 + D$ und $K_2 + D$ zusammenziehen läßt. Aus dem Hilfssatz I folgt dann: D gehört zu K_v^*, mithin (2). Andernfalls können wir annehmen, daß sich K_2 nicht auf D zusammenziehen läßt. Da nach VI. die Eckenzahl von $K_2 > 3$ ist, gibt es in K_2 eine von e_1, e_2 und e_3 verschiedene Ecke. Wir können annehmen, daß wir diese Ecke mit e_1, e_2 und e_3 durch drei Polygonzüge in K_2 verbinden können, da der Fall (1) erledigt ist. Also liegt in K_2 die Fig. 14. $(e e_1]$ läßt sich mit $(e e_2]$ oder $(e e_3]$ nicht durch einen Polygonzug in K_2 verbinden, der die Ecke e meidet, da wir andernfalls K_2 auf D zusammenziehen könnten. Also folgt entweder der Fall (1) oder $[e e_1] = k_1$ (Kante), desgleichen $[e e_2] = k_2$, $[e e_3] = k_3$; d. h. $K_2 = T$, w. z. b. w.

Nach dem Hilfssatz II des § 1 erhalten wir durch Zusammensetzung der Dreieckkomplexe K_3 lauter K_v^*. Wir wollen einen solchen Komplex mit K_3^* bezeichnen. Es sei also $K_3^* = \sum_{i=1}^{n} K_3^{(i)}$ mit $K_3^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} K_3^{(j)} = D_i$ (= Dreieck), $i = 2, 3, \ldots, n$[23]).

---

[23]) K_3^* ist also in bestimmtem Sinne ein verallgemeinerter Dreieckkomplex.

VIII. Voraussetzung: 1. $K_v^* = K_1 + T$; $K_1 \cdot T = e_1 + e_2 + e_3$ (Fig. 13); keine Kante von K_1 verbindet zwei der Ecken e_1, e_2 und e_3 (entsprechend dem 3. Fall des Hilfssatzes VII.),

2. K_v^* enthält keinen anderen von 0, k und D verschiedenen K_v^* als echten Teilkomplex, d. h. K_v^* gehört zur Basis der K_v^*,

3. k_1 und k_2 seien zwei Kanten des Dreiecks durch die drei Fußpunkte von T (= gemeinsame Ecken von T und K_1). $K_1 + k_1 + k_2$ ist Teilkomplex eines K_3^*.

Behauptung: $K_v^* = K_0$, wobei K_0 der Komplex der Fig. 15 ist.

Beweis: Wir überzeugen uns zunächst davon, daß K_0 ein K_v^* ist. Erstens läßt sich K_0 auf keinen K_a zusammenziehen; denn gleichgültig, wie wir K_0 auf einen Komplex mit 5 Ecken zusammenziehen, so hat dieser höchstens 9 Kanten, da K_0 aus 8 Ecken und nur 12 Kanten besteht, entgegen der Kantenzahl des K_a der Fig. 1a. Zweitens können wir $K_0 + k$ [24]) auf einen K_a zusammenziehen. Denn Fig. 15 ist der Fig. 15′ homöomorph. Wie ersichtlich besteht letztere, mithin K_0 aus der Kontur 1, 2, 3, ..., 8, 1 eines Möbiusschen Bandes, sowie den vier Kanten [15], [26], [37] und [48], die das Möbiussche Band in vier Rechtecke zerlegen. Aus Symmetriegründen brauchen wir also nur die beiden Fälle $k = [13]$ und $k = [14]$ zu untersuchen. In beiden Fällen können wir aber an Hand der Fig. 15 leicht $K_0 + k$ auf einen K_a zusammenziehen. Also ist K_0 ein K_v^*. Aus V. folgt dann, daß K_0 ein Element der Basis ist. — Wir beweisen zunächst die Behauptung für den speziellen Fall, daß in der Voraussetzung 3. $K_3^* = K_3$ ist. Also:

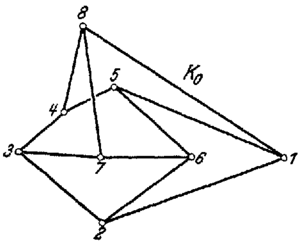

Fig. 15.

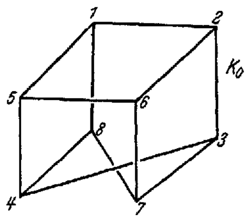

Fig. 15′.

Annahme: $K_3^* = K_3$, d. h. $K_1 + k_1 + k_2$ ist eben.

b sei die Kante, die e_1 mit e_2 verbindet (Fig. 16). Dann ist

$$K_1 + k_1 + k_2 + b$$

nicht eben, da sonst nach dem Hilfssatz II des § 1 K_v^* nicht zur Basis gehören würde. Also liegt nach I. der Ein-

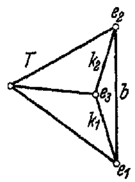

Fig. 16.

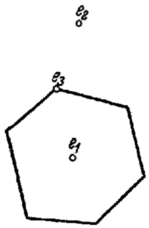

Fig. 16a.

24) k verbindet zwei beliebige, nicht durch eine Kante von K_0 bereits verbundene Ecken von K_0.

leitung in $K_1 + k_1 + k_2 + b$ entweder ein K_a oder K_b, der die Kante b enthält. In beiden Fällen gibt es demnach in K_1 ein e_1 und e_2 trennendes Polygon durch e_3 (Fig. 16a). Denn K_a bzw. K_b liegt bis auf die Kante b in der Ebene. Nun besteht im ersten Falle K_a aus fünf Ecken, die paarweise durch Polygonzüge (= Polygonzüge von K_a) verbunden sind. Von jedem der beiden Endpunkte desjenigen Polygonzuges von K_a, der b enthält, gehen dann in der Ebene drei Polygonzüge von K_a aus. Die drei Endpunkte dieser sechs Polygonzüge sind durch drei weitere Polygonzüge von K_a in der Ebene verbunden, die zusammen das e_1 und e_2 trennende Polygon bilden. Zum zweiten Falle vergleiche man die Fig. 6. Die Schlüsse sind dem ersten Falle analog. Das e_1 und e_2 trennende Polygon geht durch e_3, da $e_1\, e_3$ und $e_2\, e_3$ durch die Kanten k_1 und k_2 verbunden sind. Es sei nun P das *kleinste* Polygon dieser Art (d. h. es gibt in K_1 kein anderes mit dem Äußeren von P fremdes Polygon, das e_1 und e_2 trennt). K' sei die Gesamtheit der Kanten von K_1, die wir von e_1 aus in K_1 erreichen können, ohne eine Ecke von P zu passieren. Analog sei im Äußeren von P der Komplex K'' definiert. K' und desgleichen K'' hat auf P mindestens zwei Ecken, da sonst nach dem Fall (1) von VII. K_v^* kein Element der Basis wäre. Wir behaupten nunmehr: Es gibt auf P zwei Punktepaare (eines aus K', das andere aus K''), die sich auf P trennen. Zum Beweis betrachten wir die Polygonzüge, in die P durch die Ecken von K'' zerlegt wird (Fig. 16b). Wäre die Behauptung nicht erfüllt, so müßten alle gemeinsamen Ecken von K' mit P auf einem dieser Polygonzüge — etwa auf P' — liegen. Denn in dem Falle, daß K' auf P eine Ecke hat, die nicht zu K'' gehört, ist dies selbstverständlich; im anderen Falle hat K' auf P höchstens, d. h. genau zwei Ecken, da sich sonst $K_1 + T = K_v^*$ auf einen K_a zusammenziehen ließe. Die beiden Ecken sind dann speziell die Endpunkte des gesuchten P'. P'' sei der komplementäre Polygonzug von P' auf P. Auf P'' liegen also alle gemeinsamen Ecken des K'' mit P. $K'' + P''$ hat mit $K_1 - (K'' + P'')$ nur die beiden Endpunkte von P'' gemeinsam, da P das kleinste Polygon war. Fügen wir nun die Kanten von T zu $K'' + P''$ oder $K_1 - (K'' + P'')$ hinzu, je nachdem der Endpunkt der Kante zu dem einen oder dem anderen Komplex gehört, so ist hiermit K_v^* in zwei Komplexe mit drei

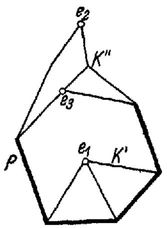

Fig. 16 b.

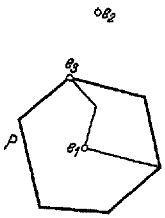

Fig. 16 c.

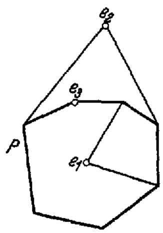

Fig. 16 d.

gemeinsamen Ecken zerlegt. Die Kantenzahl eines jeden der beiden Komplexe ist > 3. Dann ist aber nach VII. K_v^* kein Element der Basis, entgegen der Voraussetzung 2. Hiermit ist die letzte Behauptung bewiesen. Es folgt nun, daß sowohl K' wie K'' höchstens, also genau zwei Ecken auf P haben. Denn hätten K' und K'' beide drei Ecken auf P, so ließe sich unter Berücksichtigung der letzten Behauptung $K' + K'' + P + T$, also K_v^* auf einen K_a zusammenziehen. Hätte etwa K' zwei Ecken, dagegen K'' drei Ecken auf P, so müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, je nachdem e_3 zu K' gehört oder nicht. Der erste Fall (Fig. 16c) scheidet aus, da dann, wie man mit VII. feststellt, K_v^* kein Element der Basis wäre. Im zweiten Falle wäre die Spitze von T mit e_3 und über e_1 in K' mit zwei weiteren Ecken von P und desgleichen e_2 in K'' mit drei Ecken von P verbunden. $K' + K'' + P + T$ ließe sich dann aber auf einen K_a zusammenziehen. Wir sehen also, daß K' wie K'' genau zwei Ecken auf P hat, die von e_3 verschieden sind. Mithin liegt in K_1 die Fig. 16d, die zusammen mit T den Komplex K_0 (bis auf eine Unterteilung der Kanten von K_0) liefert. Also folgt unter Berücksichtigung von VII. (1. Fall) aus der Vollständigkeit von K_0: $K_v^* = K_0$, womit der Spezialfall bewiesen ist.

Im allgemeinen Falle liegt $K_1 + k_1 + k_2$ in einem K_3^*. Wir wollen einmal K_3^* aus seinen K_3, entsprechend dem Hilfssatz II, zusammenheften und dabei versuchen, K_3^* in die Ebene einzubetten. Nach Konstruktion des K_3^* gibt es darin einen K_3, der $k_1 + k_2$ enthält. Wir legen zunächst diesen K_3 in die Ebene (großes Dreieck in Fig. 17). Es bietet keine Schwierigkeit, hierzu einen weiteren K_3 des K_3^* in die Ebene einzubetten, falls das Dreieck in der Ebene, an das K_3 geheftet werden soll, im Inneren oder Äußeren frei von Ecken und Kanten ist. Sonst müssen wir zwei Fälle unterscheiden: 1. das Dreieck in der Ebene, an das K_3 zu heften ist, enthält $k_1 + k_2$ entweder im Inneren (inklusive Dreieck) oder im Äußeren (inklusive Dreieck); 2. das Dreieck enthält k_1 im Inneren und k_2 im Äußeren oder umgekehrt. Der 1. Fall führt zu einem Widerspruch, da K_v^* durch das Dreieck in zwei Teilkomplexe geteilt wird, die Eckenzahl eines jeden der beiden > 4 ist, mithin nach VII. K_v^* kein Element der Basis wäre im Widerspruch zur Voraussetzung 2. Mit den Schlüssen des 1. Falles folgt im 2. Falle, daß K_3 außer dem Dreieck, das an das Dreieck in der Ebene geheftet

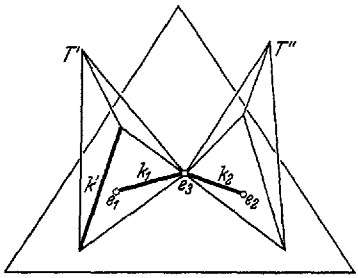

Fig. 17.

werden soll, aus einem Kantentripel T' mit einer gemeinsamen Ecke ($=$ Spitze von T') besteht (Fig. 17). Es folgt also, daß K_3^* bis auf einige Kantentripel T', T'', ... in der Ebene liegt. Hierbei sind die drei Fußpunkte von T', desgleichen von T'' ... die drei Ecken eines Dreiecks von K_3^* in der Ebene, das e_1 und e_2 trennt und durch e_3 geht (Fig. 17). Da der Spezialfall eines ebenen K_3^* erledigt ist, so können wir annehmen, daß es ein Kantentripel T' gibt. Wir wollen ferner annehmen, daß das Dreieck D' durch die drei Fußpunkte von T' e_1 im Inneren enthält und das *kleinste* dieser Art ist. Alle Fußpunkte von T'' ... liegen also auf D' oder im Äußeren von D'. Aus diesem Grunde wollen wir T'' ... im folgenden zum Äußeren von D' rechnen, so daß also $K_v^* - (T + T')$ in Inneres und Äußeres von D' aufgeteilt ist. k' sei die e_3 gegenüberliegende Kante von D'. Wir ziehen die an e_3 liegende Kante von T' auf 0 zusammen (Fig. 18). Wir behaupten, daß die in D' (analog im Äußeren von D') liegende Teilfigur von $K_v^* - T$ die Fig. 19 oder 19′ ist. Zum Beweis betrachten wir zunächst den speziellen Fall, daß wir e_1 auf $K_v^* - T$ im Inneren von D' (analog e_2 im Äußeren von D') nur mit zwei Ecken von D' verbinden können. Da e_1 mit e_3 durch keine Kante von K_v^* verbunden ist, so folgt mit den bereits mehrmals angewandten Schlüssen, daß die in D' liegende Teilfigur von $K_v^* - T$ die Fig. 19 ist.

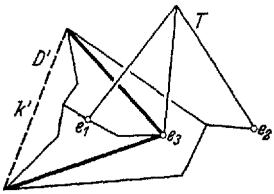

Fig. 18.

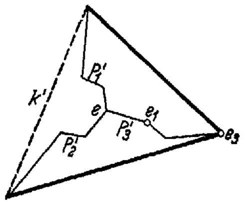

Fig. 18′.

Wir können also nunmehr annehmen, daß e_1 auf $K_v^* - T$ mit den drei Ecken von D' im Inneren von D' verbindbar ist (desgl. im Äußeren von D' für e_2, eventuell die analoge Fig. 19 für das Äußere von D'). Dann liegt also in D' die Fig. 18′. e_1 liegt auf einem der drei Polygonzüge P_1', P_2' oder P_3' (eventuell $e_1 = e$). Wir überzeugen uns zunächst davon, daß von P_1', P_2' und $P_3' = (e\,e_3]$ keine zwei durch einen Polygonzug in D' verbunden sind, der e meidet.

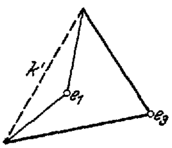

Fig. 19.

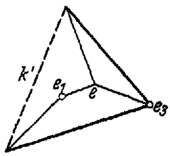

Fig. 19′.

Wir legen dazu der folgenden Betrachtung die Fig. 18′ zugrunde. Ist etwa $(e\ e_1]$ mit P_1' oder P_2' verbunden, so ändern wir P_1' und P_2' ab und verkürzen hiermit das Stück $[e\ e_1]$. Lägen die Endpunkte des Polygonzuges auf $(e_1\ e_3]$ und P_1' oder auf P_1' und P_2', so könnten wir den Polygonzug zusammen mit $P_1' + P_2' + P_3'$ und T' in jedem Falle auf $D' + P_1'' + P_2'' + P_3''$[25]) und somit K_v^* nach den bekannten Schlüssen auf einen K_a zusammenziehen. Unter Berücksichtigung des 1. Falles von VII. und der Voraussetzung 2. folgt hiermit unmittelbar, daß die Fig. 19' die in D' gelegene Teilfigur des K_v^* ist. Die letzte Behauptung ist damit bewiesen. Die im Inneren (analog im Äußeren) von D' gelegene Teilfigur von K_v ist also die Fig. 19 oder 19'. Wir erhalten damit für $K_v^* - (T + T')$ die drei Fälle: Fig. 20a, b und c.

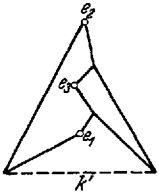

Fig. 20a.

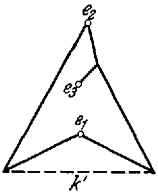

Fig. 20b.

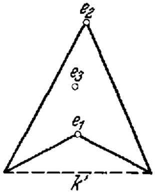

Fig. 20c.

Der 3. Fall (Fig. 20c) scheidet aus, da von e_3 aus nur zwei Kanten des K_v^* ausgehen würden. Die Fig. 20b bildet zusammen mit $T + T'$ den Komplex K_0. Wegen der Vollständigkeit des K_0 scheidet damit aber der 1. Fall (Fig. 20a) aus. Mit diesen drei Fällen ist der Hilfssatz VIII allgemein bewiesen[26]). — Aus den Hilfssätzen folgt der

Satz: *Die Basis der K_v^* ist mit K_0 und den einfachen K_3 (sowie den trivialen Elementen* 0 *und* k*) bereits erschöpft.*

Beweis: Andernfalls sei K ein weiterer Komplex der Basis der K_v^* *minimaler* Eckenzahl. Dann gilt nach VII. $K = K_1 + T$. $k_1 + k_2$ verbinde die drei Fußpunkte von T. Nach VIII. ist $K_1 + k_1 + k_2$ in keinem K_3^* enthalten. Also muß wegen der minimalen Eckenzahl $K_1 + k_1 + k_2$ in einem K_v^* liegen, der sich aus K_0 und den K_3 entsprechend den Hilfssätzen II und IV zusammensetzt. Falls dieser $K_v^* \neq K_0$ ist, so zerfällt also $K_1 + k_1 + k_2$ in zwei Teilkomplexe, die nur zwei Ecken gemeinsam haben (Fig. 21). Aus der Fig. 21 und dem Hilfssatz VII folgt aber sofort, daß dann K kein Element der Basis ist. Es bleibt also nur der Fall $K_v^* = K_0$ übrig, d. h. $K_1 + k_1 + k_2$ liegt in K_0. An der k_1 und k_2 gemeinsamen Ecke lägen dann aber nur zwei Kanten von K. Das ist unmöglich. Also gibt es keinen weiteren Komplex K der Basis, w. z. b. w.

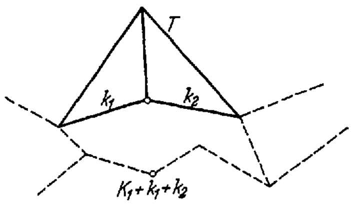

Fig. 21.

[25]) Wobei die drei Polygonzüge P_1'', P_2'' und P_3'' die Ecke e_1 gemeinsam haben, in D' liegen und in den drei Ecken von D' enden.

[26]) Wählen wir in der Fig. 15 das an der Ecke 8 gelegene Kantentripel als T, so erhalten wir für $k_1 = [14]$ und $k_2 = [47]$ einen ebenen $K_1 + k_1 + k_2$ ($K_1 = K_0 - T$), während für $k_1 = [47]$ und $k_2 = [71]$ der Komplex $K_1 + k_1 + k_2$ nicht eben ist. Man sieht also, daß in dem letzten Hilfssatz der Spezialfall eines ebenen K_3^* und der allgemeine Fall eines nichtebenen K_3^* beide tatsächlich auftreten.

(Eingegangen am 12. 1. 1937.)