

# Ein mechanisches Rechengerät zur Behandlung des ebenen Dreikörperproblems

Von P. CURTI, Zürich

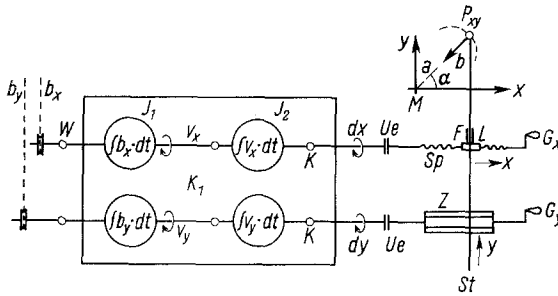
## Kraft und Weg

Wir betrachten zunächst nur einen Massenpunkt  $P_{xy}$  unter dem Einfluss einer Kraft, die ständig nach dem festen Zentrum  $M$  zeigt (Zentralbewegung, Figur 1) und deren Grösse eine Funktion der Entfernung  $a$  ist ( $a = \overline{MP_{xy}}$ ). Es kann dies zum Beispiel die Kraft eines gespannten Gummifadens sein (elastische Kräfte) oder die Schwerkraft, die stets durch das Erdzentrum geht.

Handelt es sich speziell um eine Gravitationskraft, so übt die Masse  $M$  auf  $P_{xy}$  eine Anziehung aus, deren Beschleunigung nach NEWTON

$$b_M = -k \frac{M}{a^2} \quad (k = \text{Gravitationskonstante})$$

ist. Der Index von  $b_M$  bezieht sich auf diejenige Masse  $M$ , welche die Beschleunigung ausübt; angesetzt wird der Pfeil am Punkt  $P_{xy}$ , welcher die Beschleunigung erleidet.



Figur 1  
Integrieranlage  $K_1$       Aufzeichnung der Bahn

Mit den Komponenten von  $b_M$  ergeben sich die Bewegungsgleichungen für den Punkt  $P_{xy}$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = b_x = -k \frac{M}{a^2} \cos \alpha = -k \frac{M}{a^2} \frac{x}{a}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = b_y = -k \frac{M}{a^2} \sin \alpha = -k \frac{M}{a^2} \frac{y}{a}. \tag{2}$$

Durch zweimalige Integration nach der Zeit ergeben sich daraus die Wege  $s$ :

$$\int b \, dt = v, \quad \int v \, dt = s.$$

Wir betrachten zunächst  $b_x$  und  $b_y$  als gegeben und integrieren mechanisch wie folgt:

a) Wir setzen  $b_x$  um in die Drehung einer Welle  $W$  (Analogierechner); diese führen wir zum Integrator  $J_1$ , der – durch den Zeitmotor unter dem Tisch angetrieben – die Integration  $\int b_x \cdot dt = v_x$  besorgt. Demnach tritt rechts  $v_x$  aus dem Integrator  $J_1$  heraus und geht in  $J_2$  hinein, wo die zweite Integration  $\int v_x \cdot dt$  erfolgt, so dass rechts  $dx$  aus  $J_2$  austritt. Analog liefert der Eingangswert  $b_y$  die Weg-komponente  $dy$  am Ende rechts des Kastens  $K_1$ .

Summarisch ausgedrückt: Wenn wir links die Beschleunigungskomponenten  $b_x$  und  $b_y$  in den Kasten  $K_1$  hineingeben, dann kommen rechts die Wegkomponenten  $dx$  und  $dy$  heraus.

Das Detail der Integration übergehen wir, die Kreise können sowohl Scheibenintegratoren als auch Kugelintegratoren darstellen, wie solche in letzter Zeit von der Firma Amsler bedeutend verbessert worden sind. Verstärker sind weggelassen, der Zeitmotor, der die vier Integratoren antreibt, befindet sich, wie schon erwähnt, unter dem Tisch.

$Ue$  sind Übersetzungsgetriebe für den Wechsel der Maßstäbe und Verzerrungen,  $K$  Kupplungen.

b) Die  $x$ -Welle endigt in einer Spindel  $Sp$ , die den Läufer  $L$  nach rechts oder links bewegt.

Am Ende der  $y$ -Welle ist ein gezahnter Zylinder  $Z$ , welcher den Stab  $St$  (dessen untere Fläche gezahnt ist) entsprechend  $y$  in den Führungen  $F$  des Läufers  $L$  verschiebt. Die Spitze des Stabes  $St$  steht momentan auf  $P_{xy}$ , sie beschreibt die gestrichelte Bahnkurve.

### Prinzip der mechanischen Lösung

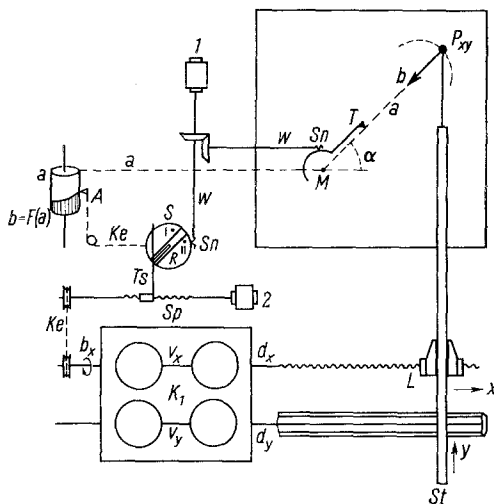
Die vorstehend beschriebene Apparatur zur mechanischen Integration ist bekannt und kein Problem. Schwieriger ist es, ihre Eingangswerte  $b_x$  und  $b_y$  zu bilden, da diese vom Ort  $P_{xy}$  abhängen, also von Endwerten  $x$  und  $y$ , die zu ermitteln wir erst im Begriffe sind.

Es kommt hinzu, dass wir später einen zweiten Körper mit ins Spiel bringen werden, so dass dann vier Differentialgleichungen *simultan integriert* werden müssen.

Wir betreten deshalb den Weg einer *mechanischen* Lösung, da bei einer solchen das Prinzip der Rücksteuerung (im Gegensatz zu den graphischen und rechnerischen Methoden) uns erlaubt, Endwerte spontan wieder als Ausgangs-

werte in einen Kreislauf laufend einzusetzen, und dies mit beträchtlichem Zeitgewinn.

1. Wir führen in Figur 2 von  $P_{xy}$  aus über  $M$  einen Faden auf den (nach  $a$  geteilten) Umfang eines Funktionszylinders  $A$ . Dessen Mantellinien (Ordinaten) geben uns dann laufend die Grösse des variablen Wertes  $b = F(a)$  an. Wir tasten sie bei  $A$  ab, um sie durch eine Kette  $Ke$  von unten in die Rille  $R$  der Richtungsscheibe  $S$  überzuführen. Auf der Unterseite der Scheibe  $S$  liegen



Figur 2

Prinzip der mechanischen Lösung.

parallel zu  $R$  zwei Zylinderfedern, die sich in den Punkten I und II abstützen und den Endpunkt der Kette nach aussen drücken.

2. Die Richtung von  $a$  (Linie  $\overline{P_{xy}M}$ ) nehmen wir mit dem Tastarm  $T$  ab. Ein Motor 1 dreht die Wellen  $w$  und ihre Schnecken  $Sn$  und damit die Richtungsscheibe  $S$  sowie den Tastarm  $T$ . Berührt der letztere den Metallfaden  $\overline{P_{xy}M}$ , so schaltet ein Relais den Strom zum Motor 1 ab; so wird auf der Richtungsscheibe  $S$  die Beschleunigung  $b$  stets zu  $\overline{P_{xy}M}$  gleichlaufend gehalten (Kreisnachlaufwerk). Wir haben damit  $b$  nach Grösse und Richtung.

3. Schliesslich zerlegen wir den Vektor  $b$  auf der Richtungsscheibe  $S$  in seine Komponenten  $b_x$  und  $b_y$ :

Die Spindel  $Sp$ , angetrieben durch den Motor 2, verschiebt den Tastarm  $Ts$  nach links. Erfolgt Kontakt, so schaltet ein Relais den Strom des Motors 2 ab. Die Zahl der Drehungen von  $Sp$  ist ein Mass für  $b_x$ ; sie wird der Integrieranlage  $K_1$  durch eine Kette  $Ke$  zugeführt.

Ähnlich wird die Komponente  $b_y$  abgetastet; wir wollen aber damit die kleine Figur nicht überlasten.

4. Schalten wir zuletzt den Zeitmotor ein, so zeichnet das obere Ende der Stange *St* automatisch die Bahnlinie auf. Der ganze Ablauf der Apparatur wird *einzig und allein durch das Newtonsche Gesetz* regiert; wir brauchen nicht zu wissen, dass die Bahn eine Ellipse, der Hodograph ein Kreis ist und *M* der Brennpunkt.

Vorerst allerdings ist der Apparat keine Notwendigkeit, da wir den Bewegungsvorgang rechnerisch durchaus beherrschen.

Die Anforderungen an die Genauigkeit sind beträchtlich: Das Ende der Bahn muss genau und tangential in den Anfangspunkt einlaufen, um den Umlauf auf der aufgezeichneten geschlossenen ersten Umlaufung zu wiederholen (später, beim Dreikörperproblem, sind die Bahnen nicht immer geschlossen).

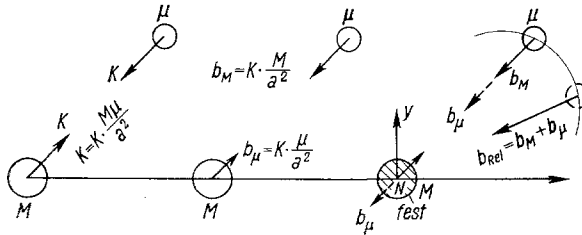
### Zwei Körper *M* und $\mu$

Grösse der Beschleunigung *b* (Figur 3):

1. Die Kräfte *K*, mit denen zwei Massen *M* und  $\mu$  sich anziehen (Figur 3a) sind gleich, nämlich

$$K = k \frac{M \mu}{a^2}. \quad (\text{Newton})^1$$

2. Dagegen sind die Beschleunigungen ungleich Figur 3b; die grosse Masse *M* übt auf jedes Teilchen der kleinen eine grosse Beschleunigung aus, die kleine Masse  $\mu$  vermag den grossen Körper *M* nur wenig zu beschleunigen.



Figur 3

a Kräfte

b Beschleunigungen

c Zusatzbeschleunigung  $b_\mu$

<sup>1)</sup> Aus dem Getriebeplan ist ersichtlich, wie unser Analogiegerät ein übersichtliches Modell des Bewegungsvorganges ist: wir sehen auf dem Reissbrett die drei Massen *M*,  $\mu$ , *m* ihre Bahnen ziehen, ferner auf dem Brett der sechs Richtungsscheiben *S* laufend Grösse und Richtung der sechs Beschleunigungskomponenten sich ändern.

Nun ist das Dreieck *M*  $\mu$  *m* allerdings eine Darstellung von begrenzter Grösse, welche hinsichtlich grösserer Genauigkeit keine bedeutende Steigerung erlaubt. Um eine solche zu erreichen, müssen wir die Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* und die Richtungen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ebenfalls als Drehungen von Wellen (Analogierechner) darstellen und auf engem Raum sozusagen aufspulen. Das führt auf eine sehr umfangreiche Apparatur.

Ist  $M$  die beschleunigende Masse, so übt diese eine Beschleunigung aus:

$$b_M = k \frac{M}{a^2}, \quad \text{ebenso} \quad \dots \quad b_\mu = k \frac{\mu}{\gamma^2}.$$

3. Beide Massen  $M$  und  $\mu$  sind in Bewegung. Wollen wir  $M$  zum Stillstand bringen (Figur 3c), so müssen wir in  $M$  eine gleichgrosse, in der Richtung entgegengesetzte Zusatzbeschleunigung  $b_\mu$  anbringen, und (damit das System der beiden Massen in sich ungestört bleibt) ebenso in  $\mu$  (Figur 3c).

Betrachten wir also die Bahn von  $\mu$  in bezug (relativ) auf die feststehende Masse  $M$  (im Koordinatennullpunkt  $N$ ), so haben wir ihr nach Figur 3c eine zentrale Relativbeschleunigung

$$b_{Rel} = b_M + b_\mu = k \frac{M + \mu}{a^2} = F(a)$$

zuzuteilen; sind die Massen gegeben, so legen wir

$$b_{Rel} = F(a)$$

um den Funktionszylinder  $A$  von Figur 2. Die vom Apparat Figur 2 aufgezeichnete Kurve ist dann die Relativbahn von  $\mu$ , betrachtet vom festen Standort  $M$  aus.

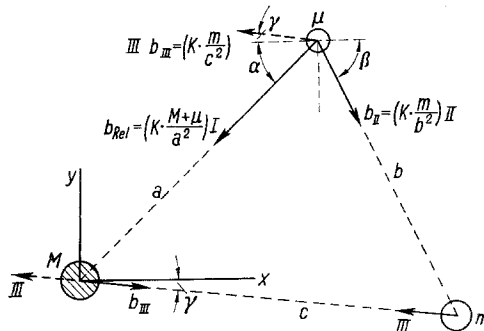
### Drei Körper

*Die Beschleunigungen:*

Die drei Massen sind  $M$ ,  $\mu$ ,  $m$ ; über ihr Grössenverhältnis wird keine vereinfachende Annahme gemacht.

Die Seitenlängen des Dreiecks sind  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Wir halten jetzt die Masse  $M$  fest und betrachten von ihr aus die Bewegung der Masse  $\mu$  und nachher die Bewegung der dritten Masse  $m$ .



Figur 4  
Bewegung der Masse  $\mu$ .

Für die Masse  $\mu$  gilt nach Figur 3c:

$$b_{Rel} = \left( k \frac{M + \mu}{a^2} \right) \quad \text{I}$$

Nun tritt aber die dritte Masse  $m$  als Störmasse hinzu und erteilt der Masse  $\mu$  eine Beschleunigung

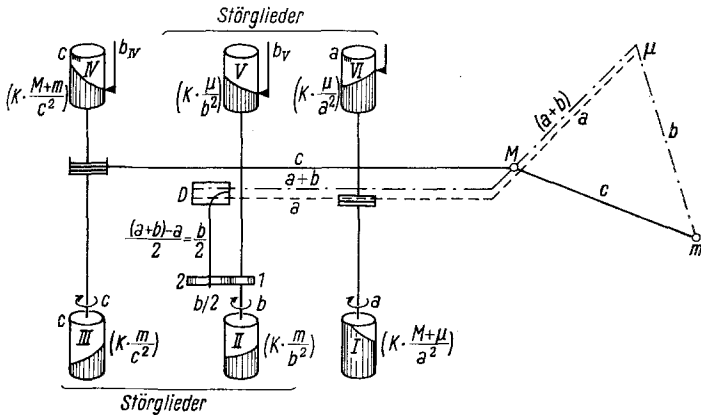
$$b_{II} = \left( k \frac{m}{b^2} \right) \quad \text{II}$$

und der Masse  $M$  eine Beschleunigung

$$b_{III} = \left( k \frac{m}{c^2} \right) \quad \text{III}$$

Da wir aber  $M$  festhalten wollen, muss dort zu  $b_{III}$  in entgegengesetzter Richtung eine gleichgrosse Zusatzbeschleunigung III (punktiert) angesetzt werden und ebenso (damit das System der drei Massen in sich nicht gestört wird) bei  $\mu$  und bei  $m$ .

Für jede der drei Beschleunigungen benötigen wir einen Funktionszylinder (I, II, III); ändern die Massen, so sind die Funktionslinien neu aufzuzeichnen.



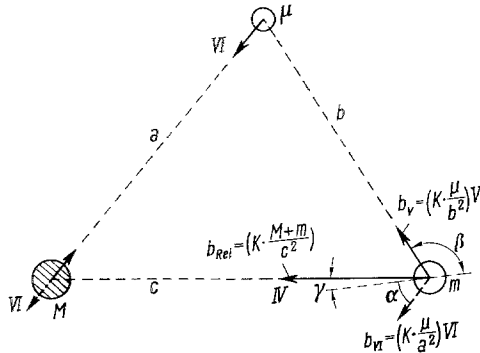
Figur 5

Übertragung der Distanzen  $a, b, c$  (Fadenlängen) auf den Umfang der Funktionszylinder.

Die drei Zylinder werden (siehe Figur 5 und auch Getriebeplan) durch die Metallfäden  $a, b, c$  gedreht. Ein Faden, der in  $m$  befestigt ist, ist über  $\mu$  und  $M$  auf das Differential  $D$  geführt, wo er das eine Sternrad gemäss  $(a + b)$  dreht; das andere Sternrad wird vom Faden  $a$  gedreht, so dass uns die Achse des Planetenrades im Differential die halbe Differenz  $[(a + b) - a]/2 = b/2$  gibt und hierauf die Übersetzung 2. 1 die verlangte Drehung  $b$  des Zylinders II.

Für die Masse  $m$  und  $\mu$  als Störungsmasse sind nach Figur 6 die Beschleunigungen im Punkt  $m$ :

$$b_{Rel} = \left(k \frac{M+m}{c^2}\right) \text{ IV}, \quad b_V = \left(k \frac{\mu}{b^2}\right) \text{ V}, \quad b_{VI} = \left(k \frac{\mu}{a^2}\right) \text{ VI}.$$

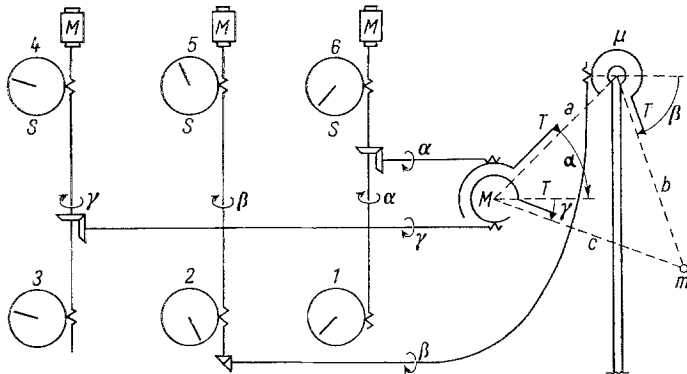


Figur 6  
Bewegung der Masse  $m$ .

Die Funktionszylinder sind IV, V, VI in Figur 5. Dabei sehen wir, dass I und VI vom Faden  $a$  gedreht werden, II und V vom Faden  $b$ , III und IV vom Faden  $c$ , weshalb je zwei auf dieselbe Achse gesetzt sind.

Von den Zylindern sind die Beschleunigungen durch eine Kette auf die Richtungsscheiben  $S$  zu übertragen (vergleiche die Prinzipskizze Figur 2).

Die Übertragung der Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  auf die Richtungsscheibe  $S$  zeigt Figur 7. Jeder Motor  $M$  treibt zwei Scheiben an und einen Tastarm  $T$ . Berührt



Figur 7

Übertragung der Richtungen  $\alpha, \beta, \gamma$  auf die Richtungsscheiben  $S$ . Diese zeigen laufend Grösse und Richtung der Beschleunigungen I bis VI.

die Spitze von  $T$  den Metallfaden, so schaltet ein Relais den Strom zum Motor ab.

Die Rillen der Scheiben  $S$  sind immer den Dreiecksseiten  $a, b, c$  parallel.

Mit den Hilfsfiguren 2, 5, 7 (zu Figur 9) dürfte nun der Getriebeplan am Schluss verständlich sein.

### Die Bewegungsgleichungen<sup>2)</sup>

können jetzt aus den Figuren 4 und 6 abgelesen werden.

Für die Masse  $\mu$ , deren Relativbewegung wir von  $M$  aus verfolgen wollen, sind die Komponenten in der  $X$ - und  $Y$ -Richtung mit  $m$  als Störmasse nach Figur 4.

$$\left| \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{\mu} = b_x = - \left( k \frac{M + \mu}{a^2} \right) \cos \alpha + \left( k \frac{m}{b^2} \right) \cos \beta - \left( k \frac{m}{c^2} \right) \cos \gamma, \quad (1)$$

$$\left| \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{\mu} = b_y = - (\text{I}) \sin \alpha - (\text{II}) \sin \beta + (\text{III}) \sin \gamma. \quad (2)$$

Die ersten Summanden dieser beiden Gleichungen bezeichnet man als die Kepler-Gleichung, den zweiten und dritten zusammen als die Störfunktion. Die Klammerwerte finden wir auf den Funktionszylindern I, II, III, Figur 5.

Für die Masse  $m$  mit Störmasse  $\mu$  sind die beiden entsprechenden Gleichungen aus Figur 6 ( $\beta$  nach Figur 4):

$$\left| \frac{d^2x}{dt^2} \right|_m = b_x = - \left( k \frac{M + m}{c^2} \right) \cos \gamma - \left( k \frac{\mu}{b^2} \right) \cos \beta - \left( k \frac{\mu}{a^2} \right) \cos \alpha, \quad (3)$$

$$\left| \frac{d^2y}{dt^2} \right|_m + b_y = + (\text{IV}) \sin \gamma + (\text{V}) \sin \beta - (\text{VI}) \sin \alpha. \quad (4)$$

Diese vier Gleichungen (1) bis (4), die längst bekannt sind, werden also durch unseren Apparat körperlich dargestellt und – wenn wir den Zeitmotor laufen lassen – als System simultan integriert. Als Resultat erhalten wir die Relativbahnen der beiden Körper  $\mu$  und  $m$  in bezug auf die feststehende Masse  $M$ .

*Beispiel* (Spezialfall):

Die drei Massen  $M, m, \mu$  bedeuten der Reihe nach Erde, Mond, Satellit.

a) Für den Mond  $m$  gilt Gleichung (3);  $\mu$  als Störmasse ist jetzt verschwindend klein, so dass die zwei Störglieder mit  $\mu$  in der Gleichung (3) wegfallen. Die Zylinder V und VI drehen sich zwar (weil die Fadenlängen  $a, b, c$  laufend sich ändern); da aber die Ordinaten der Funktionslinien auf den Zylindern Null sind, bleiben die Abtaster  $A$  stehen. So bleibt in Gleichung (3) nur der erste Summand.

<sup>2)</sup> Vergleiche Prof. W. SCHAUB, *Die himmelsmechanischen Grundlagen der Raumfahrt*, Gl. (78), S. 63, im Buche «*Raumfahrtforschung*» von H. GARTMANN (Oldenbourg-Verlag, München 1952).



b) Beim Satelliten  $\mu$  dagegen gelten in Gleichung (1) alle drei Summanden, nur im ersten ist  $\mu$  wegzustreichen. Alle drei Zylinder I, II, III arbeiten.

Der Satellit ist senkrecht gestartet in programmgesteuerter Aufstiegsbahn in das Perizentrum  $P$  der Fahrt-Ellipse eingefahren worden. Dort hat er jetzt einen Abstand  $\varrho_0$  vom Erdzentrum und eine Abgangsgeschwindigkeit  $v_0$ , deren Grösse zwischen der Kreis- und der Parabelgeschwindigkeit liegt und so gross sein muss, dass das Apogäum jenseits der Mondbahn sich befindet.

Mit  $v_0 \varrho_0$  ist die störungsfreie Ellipse bestimmt; aber die Pfeile 1, 2, 3 deuten an, wie der Mond die Tendenz hat, den Satelliten aus dieser Bahn zu zerren (Störungsmasse  $m$  des Mondes in der Satelliten-Gleichung (1)).

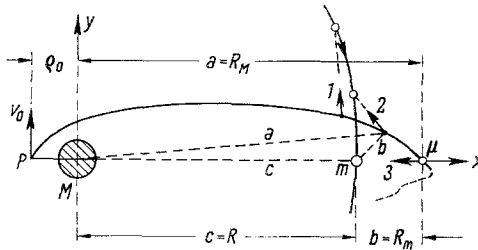
Wir kuppeln jetzt aus und stellen am untern Rand rechts des Getriebeplanes ein:

Am Zeit-Indikator des Zeitmotors:  $t = 0$ .

Mit Kurbel  $G_x$  an der Spindel  $Sp$ :  $-x = \varrho_0$  und  $v_x = 0$  am Integrator  $J_2$ .

Mit Kurbel  $G_y$  am gezahnten Zylinder  $Z$ :  $\pm y = 0$  und  $v_y = v_0$  am Integrator  $J_4$ .

Ebenso ist am oberen Rand des Getriebeplanes, exakt zur selben Zeit  $t = 0$ , die Konstellation des Mondes  $m$  nach Ort  $(x, y)$  und Geschwindigkeit  $(v_x, v_y)$  einzustellen.



Figur 8

$M$  Erde  $m$  Mond  $\mu$  Satellit.

d) Legen wir speziell die  $X$ -Achse in die Verbindungslinie der drei Massen  $M, m, \mu$  (Figur 8), dann haben wir in Figur 4 für den Satelliten  $\mu$  die drei Beschleunigungen I, II, III nach links in die Horizontale zu drehen; ihre Summe ist dann

$$\Sigma = \text{I} + \text{II} + \text{III} = -k \frac{M + \mu}{a^2} - k \frac{m}{b^2} - k \frac{m}{c^2}.$$

Die Richtungsrillen  $R$  aller Richtungsscheiben  $S$  liegen jetzt waagrecht und alle drei Fäden  $a, b, c$  liegen in der  $X$ -Achse. Bezeichnen wir noch (Figur 8):

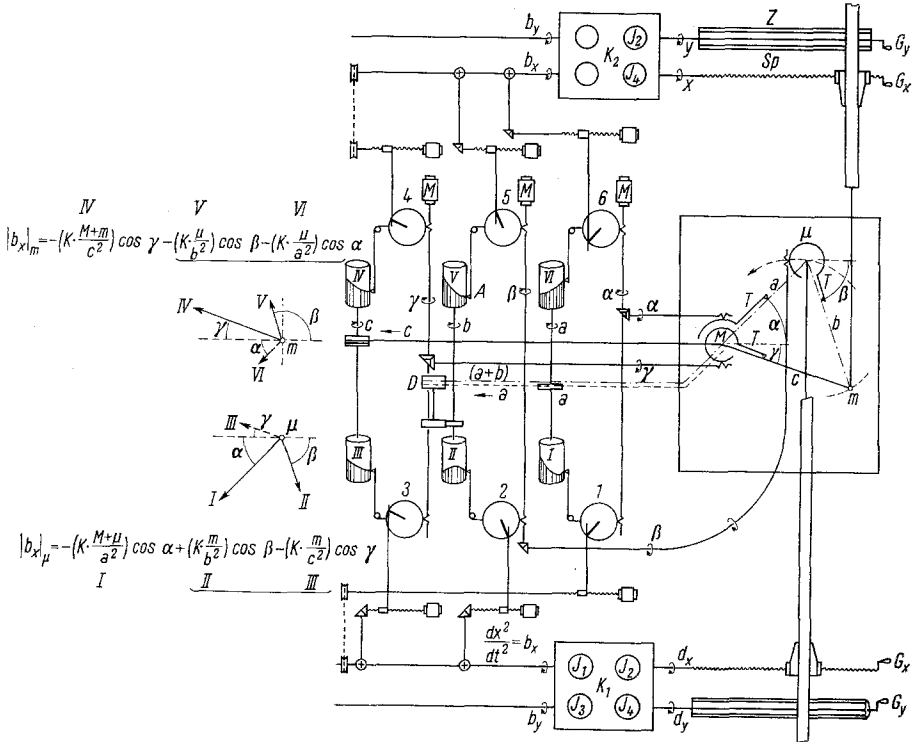
$$a = R_M, \quad b = R_m, \quad c = R,$$

so folgt:

$$\Sigma = |b|_{\mu} = -k \frac{M + \mu}{R_M^2} - k \frac{m}{R_m^2} - k \frac{m}{R^2},$$

wie bei SCHAUB, S. 86, Gleichung (122), Fall 2, wenn  $\mu = 0$ .

Die sekundären Einflüsse (Sonne, Erdbablattung) sind auf zusätzliche Beschleunigungen  $\epsilon_x \epsilon_y$  zurückzuführen und diese durch Differenziale auf den beiden Wellen für  $b_x$  und  $b_y$  zu addieren.



Figur 9  
Getriebeplan.

Summary

The project concerns the problem and principle of solving the three body problem by known mechanical means: function cylinders with a photoelectric follower, integrators, and adding machinery. The equations of motion each contain three terms (including the perturbation function); these are represented individually on the function cylinders, resolved along the axes  $x$  and  $y$ , and plotted in the working plane.

One of the three bodies is held firm, and the apparatus then records automatically the relative paths of the other two.

(Eingegangen: 23. August 1960.)