

Mouvements périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle rectiligne

Par Henri Cabannes, Laboratoire de Mécanique Théorique associé au C.N.R.S.,
Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

1. Introduction

Si l'étude des mouvements des cordes vibrantes est un problème fort ancien, l'étude des mouvements en présence d'un obstacle sur lequel la corde peut rebondir a été étudié seulement dans les dernières années. L. Amerio et G. Prouse [1] ont considéré le cas d'un obstacle rectiligne et ont démontré l'existence globale de la solution; M. Schatzmann [2] a étendu ce résultat au cas d'un obstacle concave. C. Reder [3] a étudié des mouvements en présence d'obstacles ponctuels; C. Citrini et B. d'Acunto [4] ont envisagé le cas de deux cordes vibrantes qui peuvent se heurter au cours de leur mouvement.

Lorsque la corde, supposée de longueur finie, est fixée à ses deux extrémités, le mouvement, en l'absence d'obstacle, est périodique. En présence d'un obstacle fixe donné, le caractère périodique ou non du mouvement dépend des conditions initiales; l'étude générale de cette question est un problème ouvert qui est très compliqué. L'objet de cet article est l'étude de ce problème dans des conditions suffisamment simples pour que sa solution soit possible. La corde ne peut se déplacer que dans un plan, et l'obstacle qu'elle peut heurter est une droite fixe parallèle au segment qui joint les extrémités de la corde. A l'instant initial, la corde est au repos, placée suivant une certaine courbe; nous démontrons que, suivant le choix de cette courbe, le mouvement est périodique ou non, et, dans le cas d'un mouvement périodique, nous calculons la période. La démonstration est faite d'abord dans le cas où la position initiale de la corde est une sinusoïde; elle est ensuite étendue à des cas plus généraux par deux méthodes. Une des méthodes est une démonstration directe, comme dans le cas de la sinusoïde, l'autre méthode utilise un certain changement de variable. Dans un prochain article, nous traiterons un problème analogue, lorsque l'obstacle est ponctuel, placé au milieu du segment qui joint les extrémités de la corde. La différence essentielle entre deux cas est que, pour un obstacle ponctuel, le contact de la corde et de l'obstacle persiste pendant un temps borné, en général non nul, tandis que, sur un obstacle rectiligne, la corde rebondit instantanément.

2. Équations du problème

Nous considérons une corde qui peut vibrer dans un plan $x - u$; le frottement et la pesanteur sont négligés. La corde est fixée à ses deux extrémités ($x = \pm \frac{1}{2}, u = 0$); dans sa position d'équilibre elle est située sur l'axe des abscisses ($u = 0$). Lorsqu'elle est écartée de cette position, l'ordonnée de ses points est une fonction $u(x, t)$ solution de l'équation [1], à laquelle il y a lieu d'ajouter les conditions aux limites [2] et les conditions initiales [3].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$$u(\pm \frac{1}{2}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \alpha(x) & \alpha(\pm \frac{1}{2}) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x) & \beta(\pm \frac{1}{2}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Le problème [1]–[3] est le problème de l'oscillation libre de la corde; nous désignerons par $w(x, t)$ sa solution; celle-ci est périodique en t , de période 2. Nous supposons maintenant que la corde soit astreinte à rester au-dessus d'un obstacle d'équation $u = \varphi(x)$ sur lequel elle peut rebondir suivant les lois de la réflexion spéculaire. Pour résoudre ce nouveau problème, il convient d'ajouter aux relations [1]–[3], les relations suivantes:

$$u(x, t) \geq \varphi(x) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t^+) = -\frac{\partial u}{\partial t}(x, t^-) \quad \text{pour } u(x, t) = \varphi(x). \quad (5)$$

Nous étudierons l'existence et les propriétés des solutions périodiques du problème [1]–[5], dans le cas où l'obstacle est une droite fixe $u = -1$, et lorsque la corde est initialement au repos dans la position $u(x, 0) = 1/h \cos \pi x$. On peut toujours remplacer u par uh , ce qui revient à considérer que la position initiale est toujours la même, tandis que l'obstacle a pour ordonnée $-h$. On doit donc résoudre le problème [1]–[5], avec:

$$u(x, 0) = \alpha(x) = \cos \pi x \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x) = 0 \quad (6)$$

$$u(x, t) \geq -h \quad (0 \leq h \leq 1). \quad (7)$$

Dans les deux cas limites on obtient:

$$\begin{cases} \text{pour } h = 1 & u(x, t) = w(x, t) = \cos \pi x \cdot \cos \pi t \\ \text{pour } h = 0 & u(x, t) = |w(x, t)| = \cos \pi x \cdot |\cos \pi t|. \end{cases} \quad (8)$$

Ces mouvements sont périodiques en t , de période 2 et 1 respectivement. En dehors de

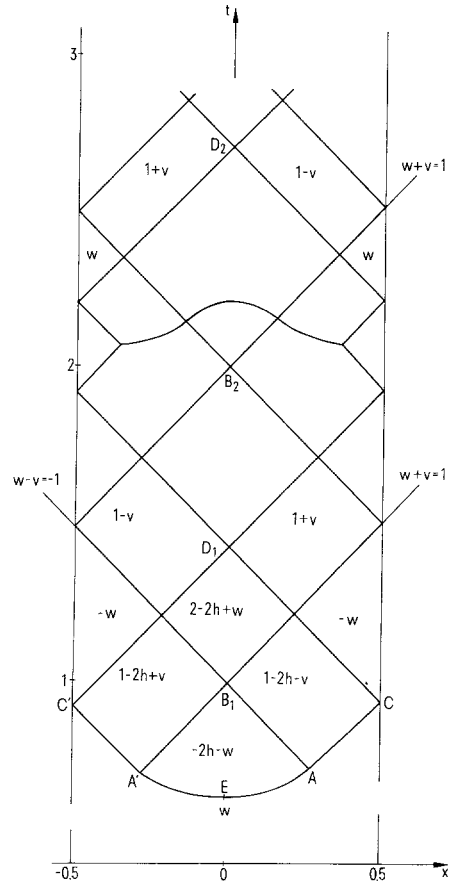


Figure 1

ces deux cas limites la solution peut être construite de proche en proche, comme cela est indiqué dans [1] par exemple. Aussi longtemps que l'obstacle n'a pas été heurté, le mouvement de la corde est l'oscillation libre $u = w$; cette solution est valable jusqu'à la première ligne d'influence, qui comprend un arc AA' non caractéristique défini par

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi t = -h, \quad \left| \frac{\partial t}{\partial x} \right| \leq 1 \tag{9}$$

et deux arcs caractéristiques AC et $A'C'$.

Cette ligne est représentée sur la figure 1; les points A et A' ont pour coordonnées $\pm x_A$ et $t_A = 1 - |x_A|$ avec $\cos \pi x_A = \sqrt{h}$; la partie caractéristique est constituée par les tangentes AC et $A'C'$ à l'arc AA' , tangentes issues des points A et A'

$$\text{sur } AC \begin{cases} x - t = 2x_A - 1 \\ \cos \pi(x - t) = 1 - 2h \end{cases}$$

$$\text{sur } A'C' \left\{ \begin{array}{l} x + t = 1 - 2x_A \\ \cos \pi(x + t) = 2h - 1. \end{array} \right.$$

Au-delà de la première ligne d'influence, le mouvement de la corde s'exprime uniquement en fonction de la solution libre $w(x, t)$ et de la solution adjointe

$$v(x, t) = \sin \pi x \cdot \sin \pi t. \quad (10)$$

Sur les caractéristiques parallèles à AC la somme $w + v = \cos \pi(x - t)$ demeure constante; sur les caractéristiques parallèles à $A'C'$ la différence $w - v = \cos \pi(x + t)$ demeure constante. Les caractéristiques autres que AC et $A'C'$ issues des points A et A' se coupent sur l'axe des temps au point B_1 , d'ordonnée 1, et après réflexions successives sur les droites $x = \pm \frac{1}{2}$, elles se recourent aux points B_2, B_3, \dots d'ordonnées entières. Sur ces caractéristiques, issues des points B_n on a

$$\left\{ \begin{array}{l} w + v = (-1)^n \quad \text{si elles sont parallèles à } AC \\ w - v = (-1)^n \quad \text{si elles sont parallèles à } A'C' \end{array} \right.$$

on démontre ce résultat en partant des valeurs en A et A' , et en remarquant que sur les droites $x = \pm \frac{1}{2}$, w s'annule. En outre la traversée de la deuxième ligne d'influence et des suivantes n'altère pas la somme $w + v$ (sur l'une des familles de caractéristiques) ou la différence $w - v$ (sur l'autre famille de caractéristiques). En effet, d'un côté de la caractéristique $x - t = -2$ par exemple, on a $u = k + w$, de l'autre côté, $u = k' - v$, et, au-delà de la ligne d'influence, $u = -k - w - 2h$ et $u = -k' + v - 2h$; donc, avant et après la ligne d'influence, $w - v = k' - k$.

Les caractéristiques AC et $A'C'$ se réfléchissent sur les droites $x = \pm \frac{1}{2}$ et sur les lignes d'influence, et se recourent sur l'axe des temps aux points D_1, D_2, \dots . La détermination de la fonction $u(x, t)$ dans les diverses régions définies par ces caractéristiques est une suite de problèmes de Cauchy et de Goursat. Dans la région $AA'B_1$, on a $u = -w + \text{const.}$, de façon à satisfaire sur AA' la loi de réflexion (changement de signe de la vitesse); la constante vaut $-2h$, puisque sur AA' , on doit avoir à la fois $u = -h$ et $w = -h$. Sur la caractéristique AC , on a $v + w = \cos \pi(x - t) = 1 - 2h$, d'où la solution dans le rectangle $AB_1C \dots$: $u = 1 - 2h - v$; on calcule ainsi la solution partout. Dans les régions traversées par les droites $x = \pm \frac{1}{2}$, $u = \pm w$ et par suite dans les régions aboutissant aux points D_i et situées de part et d'autre de l'axe des temps on a $u = 1 \pm v$, donc aux points D_i : $u(0, t) = 1$. Dans les régions aboutissant aux points D_i et traversées par l'axe des temps on a $u = \pm w + \text{constante}$.

Le mouvement du milieu de la corde est donc défini par une suite de fonctions de la forme

$$u(0, t) = k_n + (-)^n w(0, t);$$

le changement de constante k_n se fait aux points B_i qui correspondent aux valeurs entières du temps, si bien qu'en ces points le sens de variation de la fonction $u(0, t)$ ne change pas; il se fait aussi sur les lignes d'influence qui correspondent aux

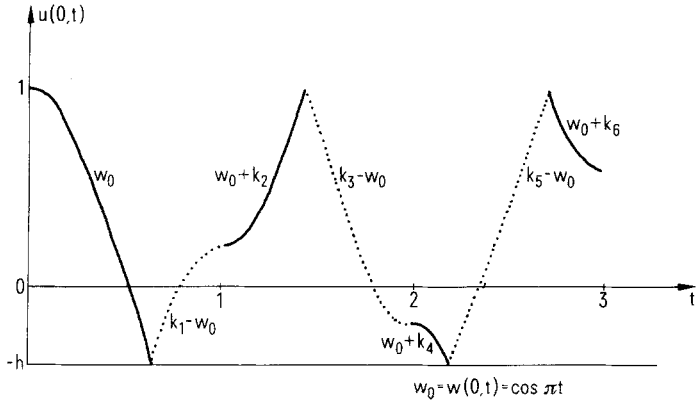


Figure 2
Mouvement du milieu de la corde

rencontres de la corde avec l'obstacle, soit pour $u(0, t) = -h$ en ces points la vitesse change de signe. Il se fait enfin aux points D_i en lesquels on a $u(0, t) = 1$, et en lesquels la vitesse change également de signe. Ce mouvement est représenté sur la figure 2. Les constantes k_n se déterminent de proche en proche. Le mouvement du milieu de la corde peut ainsi être déterminé sans qu'il soit nécessaire de connaître le mouvement de toute la corde.

3. Mouvements périodiques : cas de la sinusoïde

Lorsque le mouvement de la corde est périodique il en est de même du mouvement du milieu; réciproquement si la fonction $u(0, t)$ est périodique, la fonction $u(x, t)$ est périodique en t avec la même période. Ce résultat est une conséquence du fait que la détermination du mouvement de la corde à partir de la fonction $u(0, t)$ est une suite de problèmes de Cauchy et de Goursat. Ces remarques nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. Si le nombre h est irrationnel, le mouvement de la corde n'est pas périodique; si ce nombre est le quotient de deux entiers: $h = p/q$, le mouvement est périodique de période $T = p + q$.

On peut démontrer ce résultat en définissant un procédé de construction globale de la fonction $u(0, t)$. Dans ce but, on introduit d'abord la fonction $\tilde{w}(t)$ et la suite t_m définies par les formules

$$\tilde{w}(t) = -2n + (-)^n \cos \pi t \quad \text{pour } n \leq t \leq n + 1 \tag{11}$$

$$\tilde{w}(t_m) = 1 - m(1 + h) \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots \tag{12}$$

la fonction $\tilde{w}(t)$, représentée sur la figure 3, est monotone décroissante; donc la suite t_m est une suite croissante. Les valeurs entières de t_m : $t_m = N$ correspondent aux valeurs

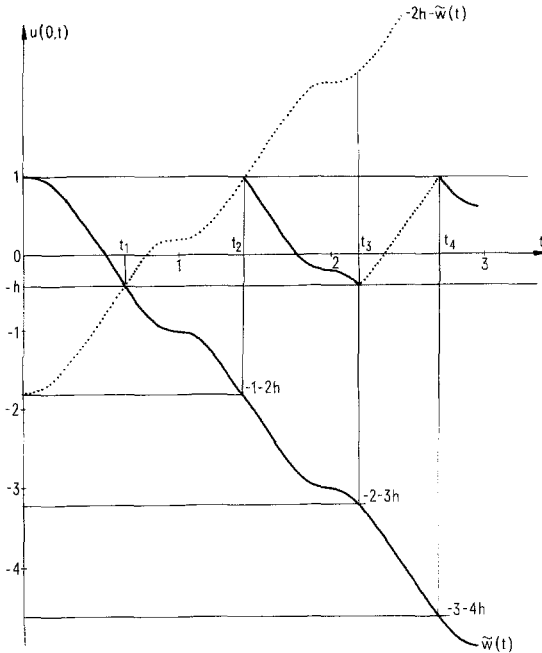


Figure 3
Mouvement du milieu de la corde

du second membre égales à $1 - 2N$; la valeur de h est alors rationnelle, égale à $(2N/m) - 1$.

A partir de la fonction $\tilde{w}(t)$, on obtient le mouvement du milieu de la corde par les formules :

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= \tilde{w}(t) + 2m(1 + h) && \text{pour } t_{2m} \leq t \leq t_{2m+1} \\
 u(0, t) &= -\tilde{w}(t) - 2h - 2m(1 + h) && \text{pour } t_{2m+1} \leq t \leq t_{2m+2}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Ainsi, pour que le mouvement soit périodique, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $1 - m(1 + h)$ soit égal à un entier négatif impair $1 - 2N$; la période T est alors égale à la valeur correspondante de t_m , soit $T = N$. Si h est irrationnel, une telle éventualité est impossible, et le mouvement n'est pas périodique. Si h est rationnel, égal à p/q (p et q entiers), la condition est satisfaite pour $m = 2q$ si bien que la période a pour valeur

$$T = p + q.
 \tag{14}$$

4. Mouvements périodiques : cas général

Les résultats de la section précédente peuvent être étendus au cas où la corde est initialement au repos dans une position $u(x, 0) = \alpha(x)$, lorsque la fonction $\alpha(x)$ est paire, croissante pour x négatif, donc décroissante pour x positif, et telle que $\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Le résultat peut être obtenu par deux méthodes différentes.

a) *méthode directe*

Supposant la fonction $\alpha(x)$ deux fois continûment dérivable, il est possible de reprendre tous les raisonnements de la section 3. Pour cela on prolonge la fonction $\alpha(x)$ sur tout l'axe réel, par antisymétrie par rapport à l'une quelconque des extrémités de la corde $x = \pm \frac{1}{2}$ et ensuite par périodicité de période 2 :

$$\begin{cases} \alpha(1-x) = -\alpha(x) \\ \alpha(x+2) = \alpha(x). \end{cases} \tag{15}$$

On pose ensuite :

$$w(x, t) = \frac{1}{2}\{\alpha(x+t) + \alpha(x-t)\} \tag{16}$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2}\{\alpha(x-t) - \alpha(x+t)\}. \tag{17}$$

La fonction $w(x, t)$ représente l'oscillation libre ; la fonction $v(x, t)$ est la solution adjointe. Nous supposons $\alpha(0) = 1$, ce qui est toujours possible. La première ligne d'influence, $w(x, t) = -h$, $|dt/dx| \leq 1$ (cf. [1]) coupe l'axe des temps au point E d'ordonnée t_E , tel que $\alpha(t_E) = -h$ figures 4 et 5. Comme h est compris entre 0 et 1, t_E positif est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Puisque $w(x, t)$ est constant sur la partie caractéristique $A'EA$ de la ligne d'influence, on a sur cette partie $t = \tau(x)$ et

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\alpha'(\xi) + \alpha'(\eta)}{\alpha'(\eta) - \alpha'(\xi)} \tag{18}$$

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} = 4 \frac{\alpha''(\xi)\alpha'^2(\eta) + \alpha''(\eta)\alpha'^2(\xi)}{\{\alpha'(\eta) - \alpha'(\xi)\}^3}. \tag{19}$$

La fonction $\tau(x)$ est paire, donc la dérivée première impaire et la dérivée seconde paire.

Pour $0 \leq \xi \leq 1$ on a $\alpha'(\xi) \leq 0$

Pour $-1 \leq \eta \leq 0$ on a $\alpha'(\eta) \geq 0$.

Ainsi dans la région (\mathcal{R}) du plan $x - t$, définie par $-1 \leq \eta \leq 0 \leq \xi \leq 1$, les dérivées $d\tau/dx$ et $d^2\tau/dx^2$ ont le signe du dénominateur des fractions qui figurent aux seconds membres des formules (18) et (19) respectivement. Sur l'arc EA , on a puisque $\alpha(\xi) + \alpha(\eta) = -h$, figure 4, $\alpha'(\eta) > -\alpha'(\xi)$, donc d'après (18)

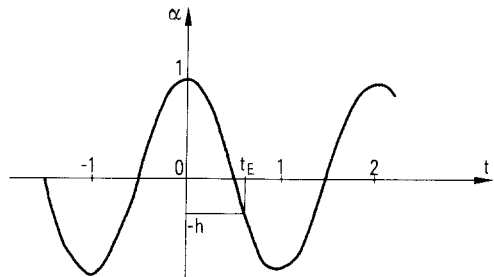


Figure 4
Fonction $\alpha(t)$

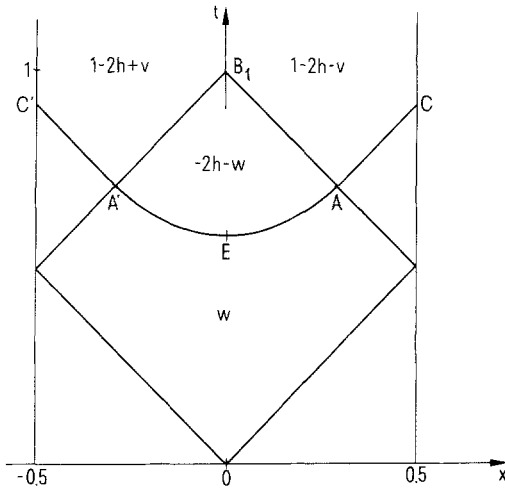


Figure 5

$$0 \leq \frac{d\tau}{dx} \leq 1. \tag{20}$$

Le point A , en lequel $d\tau/dx = 1$, est situé sur la caractéristique $\xi = 1$; en ce point a $\alpha(\xi) = 1$, et comme $w = -2h$, $\alpha(\eta) = 1 - 2h$. On en déduit les expressions de l'elongation $u(x, t)$ comme dans la section précédente; en particulier les valeurs indiquées sur la figure 1, sont encore valable, à condition de considérer que les fonctions v et w sont définies par les expressions (16) et (17). La figure 2 est également valable avec $w_0 = w(0, t) = \alpha(t)$, ainsi que la figure 3 avec

$$\tilde{w}(t) = -2n + (-)^n \alpha(t) \quad \text{pour } n \leq t \leq n + 1 \tag{21}$$

$$\tilde{w}(t_m) = 1 - m(1 + h) \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots \tag{22}$$

On en déduit que pour $h = p/q$ (p et q entiers) le mouvement est périodique de période $T = p + q$.

Si la position de la corde est affine par morceaux (corde pincée) on a

$$\alpha(x) = 1 - 2|x| \tag{23}$$

$$\tilde{w}(t) = 1 - 2t \tag{24}$$

et le mouvement est périodique quel que soit h (compris entre 0 et 1) de période $T = 1 + h$.

b) Méthode du changement de variable

Une seconde méthode, dite du changement de variable, permet à partir d'une fonction $u(x, t)$ représentant un mouvement de la corde en présence d'un obstacle $u(x) = -h$, d'en obtenir une infinité d'autres dépendant d'une fonction arbitraire et

représentant des mouvements de la corde en présence du même obstacle. Dans ce but, on considère le changement de variable défini par la fonction

$$X = F(x) \tag{25}$$

F désignant une fonction impaire, croissante, dérivable, vérifiant les formules

$$\begin{cases} F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ F(x + n) = F(x) + n. \quad n \text{ entier.} \end{cases} \tag{26}$$

Théorème. Si $u(X, T)$ représente le mouvement de la corde en présence de l'obstacle $u(X) = -h$, et correspondant aux conditions initiales paires $u(X, 0) = \alpha(X)$, $(\partial u / \partial T)(X, 0) = \beta(X)$, alors le mouvement de la corde en présence du même obstacle, à partir des conditions initiales (27) est défini par la formule (28)

$$\tilde{u}(x, 0) = \alpha\{F(x)\}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = \beta\{F(x)\} \cdot F'(x) \tag{27}$$

$$\tilde{u}(x, t) = u \left\{ \frac{F(x+t) + F(x-t)}{2}, \frac{F(x+t) - F(x-t)}{2} \right\}. \tag{28}$$

Pour démontrer ce théorème on considère les identités :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{F'(x+t) - F'(x-t)}{2} + \frac{\partial u}{\partial T} \frac{F'(x+t) + F'(x-t)}{2} \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = F'(x+t) \cdot F'(x-t) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}. \tag{30}$$

La relation (30) prouve que la fonction $\tilde{u}(x, t)$ vérifie l'équation des ondes ; la relation (29) prouve que cette fonction vérifie sur l'obstacle $\tilde{u} = -h$, la condition de réflexion

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, t^+) = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, t^-). \tag{31}$$

En effet si $\tilde{u} = -h$, on a aussi $u(X, T) = -h$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial T}(X, T^+) &= -\frac{\partial u}{\partial T}(X, T^-) \quad \text{et} \\ \frac{\partial u}{\partial X} &= -\frac{dT}{dX} \frac{\partial u}{\partial T} \end{aligned} \tag{32}$$

ce qui prouve que les deux dérivées partielles $\partial u / \partial X$, $\partial u / \partial T$ changent de signe, donc d'après la formule (29), il en est de même pour la dérivée $\partial \tilde{u} / \partial t$. Ce qui démontre le théorème.

Les formules (26) et (28) indiquent que si le mouvement défini par la fonction $u(X, T)$ est périodique de période entière, alors le mouvement défini par la fonction

$\tilde{u}(x, t)$ est périodique avec la même période. Dans le cas où la corde est initialement au repos dans la position $u(x, 0) = 1 - 2|x|$, un calcul direct montre que le mouvement est périodique de période $1 + h$ (pour h compris entre 0 et 1). Si h est rationnel égal p/q , le mouvement possède la période entière $p + q$, période qui se conserve donc par changement de variable. On retrouve ainsi le résultat de la section 4a et le résultat de la section 3 qui en est un cas particulier.

5. Conclusion

Les problèmes posés par les mouvements d'une corde vibrante en présence d'un obstacle concernent essentiellement l'existence des solutions et l'étude de leur périodicité éventuelle. En ce qui concerne l'existence, celle-ci a été démontrée pour des obstacles rectilignes ou concaves; le cas des obstacles convexes reste à traiter. L'étude du caractère périodique ou non périodique du mouvement est déjà avancée pour un obstacle ponctuel; le cas des obstacles non ponctuels semble plus difficile et le présent travail est une contribution à cette étude.

Bibliographie

- [1] L. AMERIO et PROUSE, *Study of the Motion of a String Vibrating against an Obstacle*. Rend. Matematica 8, 563–585 (1975).
- [2] M. SCHATZMANN, *An Hyperbolic Problem of Second Order with Unilateral Constraints: the Vibrating String with a Concave Obstacle*, Publ. Université Paris VI, n° 78 031.
- [3] C. REDER, *Étude qualitative d'un problème hyperbolique avec contrainte unilatérale*, Thèse de 3^e cycle, Université de Bordeaux (1979).
- [4] C. CITRINI et B. D'ACUNTO, *Sur le choc de deux cordes*. Compt. Rend. Acad. Sc. Paris, 289, A, 5–7 (1979).

Résumé

Une corde fixée à ses deux extrémités peut vibrer dans un plan en présence d'un obstacle rectiligne, fixe, parallèle au segment qui joint ses extrémités. La corde peut rebondir sur l'obstacle. La corde est initialement au repos, placée suivant une certaine courbe. On démontre que, suivant la choix de cette courbe, le mouvement est périodique ou non, et, lorsque le mouvement est périodique, on calcule la période.

Abstract

A string fixed at both ends oscillates in a plane in which there is a fixed straight line segment, parallel to the line joining the ends of the string. The string can rebound from the solid segment. The string is initially at rest, with prescribed shape. We prove that depending on the prescribed initial form of the string the motion is either periodic or aperiodic, and in the former case we compute the period.

(Reçu: 11 janvier 1980)