DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Zehnter Jahrgang. 13. Januar 1922. **Heft 2.**

Über die gegenwärtige Krise der Mechanik.

Von R. v. Mises, Berlin[1]).

Es sind erst wenige Jahrzehnte her, da galt die Mechanik der sichtbaren Körper, die Mechanik der wirklich beobachtbaren Bewegungen und Kräfte, als der vollendetste, jedenfalls als ein vollkommen sichergestellter Teil unseres physikalischen Weltbildes. So stark war das Vertrauen zu dem festgefügten Aufbau der klassischen Mechanik, daß man einen beliebigen physikalischen Vorgang erst dann als völlig geklärt ansehen wollte, wenn er auf einen mechanischen zurückgeführt war. Die Philosophen, die bekanntlich gerne die Ergebnisse einer Wissenschaft, sobald sie sichergestellt erscheinen, zu übertreiben pflegen, taten auch hier ein übriges, und so setzte *Wilhelm Wundt* an die Spitze seiner Axiome der Physik den Ausspruch: Alle Ursachen in der Natur sind Bewegungsursachen. Gerade dieser enge Zusammenhang zwischen den Grundbegriffen der Mechanik und der Gestaltung unseres Ursachbegriffes berührt sich mit dem, was uns hier beschäftigen wird.

1. *Die Mechanik der Relativitätstheorie.* Den ersten ernsthaften Anstoß erhielt die Mechanik, die man fälschlich die Newtonsche nennt — denn sie stützt sich auf drei unabhängige Grundpfeiler, die Newtonsche Mechanik freier Punkte, den Euler-Lagrangeschen Systembegriff und den Cauchyschen Begriff der inneren Spannung —, den ersten Anstoß erhielt die klassische Mechanik vor etwa zwei Jahrzehnten von der Elektrodynamik her, als man sich genötigt sah, Massen anzunehmen, deren Größe von der Geschwindigkeit abhing. Bekanntlich hat die weitere Verfolgung dieses Problemkreises nach einigen Umwegen zur speziellen und dann zur allgemeinen *Relativitätstheorie* geführt. Als sich vor rund zehn Jahren die Grundgedanken der speziellen Relativitätstheorie allmählich in weiteren Kreisen durchsetzten, begann man auch viel von der „Neuen Mechanik" zu reden, die durch jene Theorie bedingt sei. Und wenn ich heute einen Vortrag über die gegenwärtige Krise der Mechanik angekündigt habe, bin ich vielleicht auch dem Mißverständnis ausgesetzt, als meinte ich damit die Relativitätsmechanik. Dem ist aber nicht so. Von dem Standpunkt, den ich hier zur Geltung bringen möchte und der den unmittelbaren Zusammenhang *rein mechanischer Beobachtungen mit bestimmten grundsätzlichen Fragen* betrifft, von diesem Standpunkt aus erscheint die Mechanik der Relativitätstheorie durchaus nicht als revolutionär; viel eher möchte ich sie als eine „überklassische Mechanik" bezeichnen, denn als eine fortschrittliche Entwicklung der alten Mechanik. Wie das gemeint ist, soll gleich etwas ausführlicher erläutert werden, da dies auch die passendste Überleitung zum eigentlichen Gegenstand meines Vortrages bildet.

Überlegen wir uns einmal, welchen Eigenschaften die klassische Mechanik ihre außerordentlich starke Stellung innerhalb der Gesamtheit der physikalischen Wissenschaften verdankt, so müssen wir erkennen, daß die ursprünglichen Ansätze sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen entwickelt haben und daß demnach auch zwei ganz verschiedene Seiten an ihnen gewertet werden. Der *Physiker* hat eine Mechanik ausgebildet, wie sie allenthalben als erstes Kapitel in jedem Lehrgang der theoretischen Physik auftritt, und die ich für den Augenblick etwa als die „gebundene" Mechanik bezeichnen möchte. Sie erblickt das Entscheidende und Wertvolle in den Aufstellungen von *Newton*, *Euler-Lagrange* und *Cauchy* darin, daß durch sie zum erstenmal die *Zusammenfassung eines großen Erscheinungsgebietes* in eine enge Gruppe von Differentialgleichungen oder noch besser die Unterordnung unter ein einziges Variationsprinzip geleistet wird, ein Vorgang, der dann zum Muster für die Ausbildung der übrigen Teile der theoretischen Physik geführt hat. Aber jene alten Aufstellungen besitzen noch einen ganz andersartigen Vorteil und man wird den Verhältnissen durchaus nicht gerecht, wenn man meint, daß nur ein *methodischer* Unterschied bestünde zwischen der eben gekennzeichneten „gebundenen" Mechanik und der andern, die ich jetzt die „freie" nennen will. Für sie ist der hauptsächlichste Wert der klassischen Ansätze darin gelegen, daß sie einen sehr *lockeren, losen Rahmen* bilden, bei dessen Ausfüllung noch sehr viel Freiheit bleibt: Man kann für das, was *Newton* die vis impressa, die eingeprägte Kraft, nennt, für das, was in der Euler-Lagrangeschen Mechanik die Konstitution des mechanischen Systems ausmacht, endlich für die von *Cauchy* eingeführte Spannungsdyade in weitestem Umfang *willkürliche Funktionen* einführen, um sich der großen Mannigfaltigkeit der natürlichen Erscheinungen anzupassen, und vermag damit inhaltlich weit über die „gebundene" Mechanik hinauszugreifen. Um nur ein konkretes Beispiel zu nennen: Wenn man in einem System starrer Körper die gewöhnliche Berührungsrei-

[1]) Vortrag, gehalten auf der Jahresversammlung der deutschen Mathematiker-Vereinigung in Jena am 20. September 1921.

bung mit den in der technischen Mechanik üblichen Ansätzen als wirksam ansieht, so bleibt man noch im Rahmen der Newtonschen Mechanik, aber weder die sog. Bewegungsgleichungen zweiter Art, noch das Hamiltonsche Prinzip liefern eine Lösung. In anderen Fällen, wenn man etwa die bleibenden Formänderungen eines riemenartigen Bandes oder dergleichen untersuchen will, spielen die schönen Variationsprinzipe der „gebundenen" Mechanik die Rolle leer laufender Räder einer Maschine: sie drehen sich mit, wenn man sie nicht ausschaltet, aber sie fördern das Ziel der Untersuchung nicht. Ich will also zusammenfassen: Die Gesamtheit der wirklich beobachtbaren Bewegungs- und Kräfteerscheinungen wird *bei weitem nicht durch die Mechanik erfaßt,* die der Physiker als Einleitungskapitel der theoretischen Physik zu behandeln pflegt, aber der ursprüngliche, durch *Newton, Euler, Lagrange* und *Cauchy* geschaffene Rahmen ist ein so weiter und dehnbarer, daß man mit Recht bisher annahm, er würde ausreichen, um ein Schema für die Erklärung *aller* beobachtbaren mechanischen Vorgänge abzugeben. — Dieser *inhaltliche* Unterschied zwischen den beiden Richtungen der rationellen Mechanik ist natürlich nicht ganz unbekannt, aber er wird nicht immer genügend deutlich hervorgehoben.

Betrachten wir nun von diesem Standpunkt aus die „Neue Mechanik" der Relativitätstheorie, so kann kein Zweifel bestehen, daß sie noch „gebundener" ist, als die bisherige Mechanik der theoretischen Physik. Solange nur die spezielle Relativitätstheorie in Betracht kam, ließ sich noch, wie *Minkowski* gezeigt hat, die „neue" Mechanik ganz auf die Form der alten bringen; man mußte nur die Definitionen und Axiome etwas verallgemeinern. Gewiß hat *Minkowski,* was ja von seinem Standpunkt aus nahe lag, den Hauptvorzug der relativistischen Mechanik darin gefunden, daß ihre Herleitung noch einheitlicher geschehen kann, indem auch die Kontinuitätsgleichung aus dem verallgemeinerten Energiegesetz folgt; aber es hat, denke ich, keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, die Minkowskische Mechanik in der Richtung auszubauen, wie ich sie früher als die der „freien" Mechanik gekennzeichnet habe. Ganz anders steht es, wenn wir von der allgemeinen Relativitätstheorie ausgehen. Diese ist von vornherein auf die Schwerefelder zugeschnitten, und wenn man anfänglich das sog. Äquivalenzprinzip auch beliebigen Kräften gegenüber aussprach, so ist es heute doch zumindest sehr zweifelhaft, ob *diese* neue Mechanik dieselbe Allgemeinheit von Kraftgesetzen zuläßt wie die alte. Es scheint, daß die Mechanik der Relativitätstheorie viel absoluter oder „absolutistischer" ist als die gewöhnliche, in unserer Ausdrucksweise „gebundener"; sie ist weit weniger anpassungsfähig, und dies mag in gewissem theoretischen Sinn auch eine Stärke sein. Die ganze Frage ist natürlich noch nicht im geringsten untersucht, hat man sich doch kaum eingehender damit beschäftigt, welchen Einschränkungen die zulässigen Kraftgesetze innerhalb der klassischen Mechanik unterworfen sind. Vielleicht liegt aber hier ein Teil der Gründe, die *Ernst Mach* in seiner hinterlassenen „Optik" zu so entschiedener Ablehnung der Relativitätstheorie, vor allem vom Standpunkt der Erfahrung aus, veranlaßt haben. — Freilich darf man nie vergessen, daß die Einsteinsche Theorie die Anpassung der Mechanik an das älteste und bedeutendste Erscheinungsgebiet, die Bewegung der Himmelskörper, erst vollendet hat, und alles, was ich hier gesagt habe, soll durchaus kein Urteil, noch weniger eine Aburteilung der Relativitätstheorie sein, sondern nur ihr Verhältnis zu der Frage kennzeichnen, mit der ich mich eigentlich beschäftigen will.

2. Entwicklung des Hauptproblems. Diese Frage, in deren negativer Beantwortung ich das Kritische in dem heutigen Zustande der Mechanik erblicke, lautet, auf die kürzeste Form gebracht, so: Können wir noch annehmen, daß alle Bewegungs- und Gleichgewichtserscheinungen, die wir an sichtbaren Körpern beobachten, *sich in dem Rahmen des Newtonschen und der daran anknüpfenden Ansätze erklären lassen?* Mit anderen Worten: Läßt sich jede Bewegung eines beliebig abgegrenzten Massenteils in ihrem zeitlichen Ablauf dadurch eindeutig bestimmen, daß man den Anfangszustand gibt und irgendwelche Kraft- oder Spannungsgesetze als wirksam ansieht? Vor wenigen Jahren noch hätte man kaum gezögert, die Frage mit einem glatten „Ja" zu beantworten. Auch heute sind wir nicht so weit, sie entschieden verneinen zu können, noch viel weniger können wir in allen Einzelheiten sehen, was zu den alten Begriffsbildungen neu hinzuzutreten hat. Allein ich will hier doch zu zeigen versuchen, daß der Tatsachenbestand, den wir heute besitzen, es als in hohem Maße *unwahrscheinlich* erkennen läßt, daß jenes Ziel der klassischen Mechanik je erreicht werden könnte, und daß ganz bestimmte andere, übrigens nicht mehr ungewohnte Überlegungen den starren Kausalaufbau der klassischen Theorie abzulösen oder zu ergänzen berufen sind.

Das umfassendste und geläufigste Erscheinungsgebiet, das man mit den Differentialgleichungen der Mechanik bisher nicht in Einklang zu bringen vermocht hat, stellt die *Bewegung der Flüssigkeiten* in zahllosen, der unmittelbaren Beobachtung zugänglichen Fällen dar. Wenn wir Wasser durch ein zylindrisches Rohr gleichförmig fließen lassen, so müssen wir dabei, je nach den Abmessungen, zehn-, hundert- oder tausendmal mehr Druck aufwenden, als dem Poiseuilleschen Gesetz entspricht, das eine unmittelbare Folgerung der Theorie zäher Flüssigkeiten ist. Man weiß schon seit *Poncelet* und *Saint-Venant,* daß diese Unstimmigkeit daher rührt, daß die Bewegung des Wassers gar keine gleichförmige ist, sondern sich zahllose kleine, unregelmäßige Pulsationen über eine verhältnismäßig ruhige Grundbewegung lagern. Die mechanischen Differentialgleichungen können aber ihrem ursprünglichen Sinn nach nur für die wirklichen Bewegungen aller Einzelteilchen gelten und besagen nichts über die *Scheinwerte* von Druck und Geschwindigkeit, die durch eine unbeabsichtigte Mittelwertbildung nach Ort und Zeit zustande kommen. Vom praktischen Standpunkt aus lag es nahe zu untersuchen, ob sich nicht unmittelbar Gesetze für die Grundbewegung auffinden lassen. Dies hat zuerst *Boussinesq* unternommen, indem er ein System von Differentialgleichungen gab, das sich von dem klassischen für zähe Flüssigkeiten dadurch unterschied, daß an Stelle des konstanten Reibungskoeffizienten ein passend veränderlicher „Turbulenzkoeffizient" trat. Die Integrale dieser Gleichungen sollten Druck und Geschwindigkeit der Grundbewegung darstellen, doch sind sie der mathematischen Schwierigkeiten wegen kaum auch nur in *einem* entscheidenden Fall aufgefunden worden. Eine weit einfachere Theorie habe ich im Jahre 1908 entwickelt[2]) und ich glaube, daß sie durch alle bisherigen Erfahrungen nur bestätigt worden ist. Ihr Grundgedanke ist der: Die Geschwindigkeitsverteilung der Grundbewegung eines turbulenten Zustandes genügt dem Differentialgleichungssystem, das man aus dem Eulerschen Ansatz für ideale Flüssigkeiten erhält, wenn man daraus den Druck eliminiert (und das man das Helmholtzsche nennen kann, da es inhaltlich mit den Helmholtzschen Wirbelsätzen übereinstimmt). Daß dieses Gleichungssystem nicht eindeutig ist und daß für die Druckverteilung noch weitere Annahmen erforderlich sind, gibt nur die willkommene Gelegenheit zur Anpassung der Theorie an die Beobachtungen. Ich möchte von neueren Ergebnissen besonders die mit der Beobachtung so gut übereinstimmende Lehre vom Tragflächenauftrieb und die von der Wirbelbildung hinter einem in eine Strömung eingetauchten Körper als Bestätigungen meiner Auffassung in Anspruch nehmen.

Aber wie dem auch sei, ob die Boussinesqsche Theorie oder meine — eine dritte ist bisher nicht bekannt geworden — die Erscheinungen besser wiedergibt, mit der eigentlichen Mechanik im klassischen Sinne hat das nichts zu tun. Denn diese erhebt den Anspruch, gerade die vielfältig verwirrte Bewegung der *Einzelteilchen* erklären, also vor allem in ihrem zeitlichen Ablauf darstellen zu können; der Verlauf der verhältnismäßig ruhigen Grundbewegung müßte sich daneben von selbst, jedenfalls ohne weitere Annahmen, wie sie die vorgenannten Theorien brauchen, ergeben. Es ist bekannt, in welcher Weise sich hier, da man ja in erster Linie stationäre oder quasi-stationäre Zustände untersuchen will, das ursprüngliche Anfangswertproblem der Integration in ein Randwertproblem verwandelt, dessen mathematische Behandlung äußerst schwierig ist, dessen Erledigung noch in weiter Ferne zu liegen scheint . . . Zwei Zugänge hat man zunächst zu bahnen versucht. Lord *Kelvin*, dann Lord *Rayleigh* und zuletzt *Sommerfeld* haben die Methode der kleinen Schwingungen herangezogen, das Ergebnis war, wie man weiß, ein negatives. Und *Prandtl* meinte, wenigstens in dem Randgebiet der turbulenten Bewegung in der Nähe der begrenzenden festen Körper, der sog. „Grenzschicht", in der die Geschwindigkeit der Grundbewegung fast unvermittelt auf Null herabfällt, die Verhältnisse mit den klassischen Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeit beherrschen zu können; aber auch hier zeigte sich, daß man quantitative Übereinstimmung nicht erhält, ohne zu Annahmen zu greifen, wie sie das Wesen der beiden angeführten, phänomenologischen Theorien ausmachen. Es steht heute so, und die noch nicht abgeschlossenen Arbeiten *Oseens* dürften daran kaum etwas ändern: Die kleinen, mit freiem Auge beobachtbaren, außerordentlich wechselvollen, unregelmäßig schwankenden, fast zitternden Bewegungen der Einzelteilchen einer im Ganzen ruhig strömenden Flüssigkeit *entziehen sich der Verfolgung und Darstellung im Sinne der klassischen Mechanik*. Sie weisen gebieterisch hin auf eine ganz andere, in den letzten Jahrzehnten auf vielen Gebieten der Physik immer mehr zur Geltung kommende Betrachtungsweise: auf die sog. physikalische oder, wie wir hier sagen wollen, die *mechanische Statistik*.

Ich muß, ehe ich zu einer genaueren Umgrenzung dieses Begriffes komme, kurz einen Punkt berühren, der mich selbst lange Zeit gehindert hat, die allgemeine Bedeutung der hier vorliegenden Verhältnisse zu erkennen. Es sieht so aus, als würde es sich bei der eben beschriebenen Erscheinung der Turbulenz um einen ganz vereinzelt dastehenden Fall innerhalb oder im Gegensatz zu der ganzen übrigen Mechanik handeln. Man denkt unwillkürlich an die vortreffliche Übereinstimmung der *Elastizitätstheorie* mit dem wirklichen Verhalten der meisten festen Körper. Und gewiß sind an den Leistungen dieser Theorie die Forderungen erwachsen, die man an die Lehre von den Flüssigkeiten stellt, ohne sie dort befriedigt zu finden. Aber, wenn man näher zusieht, erkennt man, daß die Dinge hier gar nicht so sehr anders liegen. Denn die wirklichen Körper verhalten sich doch nur in gewissen Grenzen elastisch, bis zu bestimmten, ihnen eigentümlichen Höchstspannungen — darin liegt eine, wenn auch unvollkommene Analogie zu jener vielgesuchten, noch wenig aufgeklärten kritischen Grenze, bei der die laminare Flüssigkeitsbewegung in die turbulente umschlägt. Das Wesentliche aber scheint mir dies zu sein: Ist die sog. Elastizitätsgrenze beim festen Körper überschritten, tritt der sog.

[2]) Vgl. meinen Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Köln 1908, Jahresber. d. deutsch. Mathemat.-Ver. *17*, 1908, S. 319—320, oder Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1909; ferner Elemente der techn. Hydromechanik, *I*, Leipzig 1914, S. 29—33.

Fließzustand ein, den wir mit einem von *Saint-Venant* begründeten Gleichungsansatz noch einigermaßen zu beherrschen glauben, da zeigt sich doch dem Beobachter, daß innerhalb der zahllosen, endlich ausgedehnten und unter dem Mikroskop deutlich erkennbaren Kristalle oder Kristallite des Körpers Lagen- und Richtungsänderungen vor sich gehen, die *nicht anders als statistisch* zu erfassen sind. Die Saint-Venantsche Plastizitätstheorie spielt also hier eigentlich nur die Rolle der beiden früher genannten phänomenologischen Theorien für die *Grund*bewegung einer turbulenten Strömung. Und diese Kristallite sind nicht etwa hypothetische Atome oder Moleküle oder gar nur die Bausteine von solchen, wie die moderne Physik sie gerne und erfolgreich handhabt, sondern durchaus sichtbare Körper mit durchwegs endlichen, bestimmbaren Massen. Kein Mensch denkt daran, daß sich die Bewegungen dieser Kristalle beim Fließen des festen Körpers eindeutig nach den Gesetzen der Mechanik, etwa aus Randbedingungen und Anfangszustand bestimmen lassen. Und was ist es schließlich anderes mit der vieldurchforschten, seit bald hundert Jahren bekannten Brownschen Bewegung? Wir haben uns längst damit abgefunden, bei dieser offenkundig mechanischen Erscheinung die Forderung des eindeutig kausal bestimmten Geschehens fallen zu lassen und uns mit einer Theorie zufrieden gegeben, bei der die Gesetze der klassischen Mechanik zwar nicht völlig ausgeschaltet, aber doch zu einer sehr bescheidenen Rolle von beschränkter Tragweite verurteilt erscheinen. In der Tat steht es also so, daß nicht mehr die Frage, ob überhaupt statistische Betrachtungsweisen zur Erklärung grobsinnlich wahrnehmbarer Bewegungen heranzuziehen seien, erörtert werden muß, sondern das weit schwierigere Problem eröffnet sich: Wo ist die Grenze zwischen den Geltungsbereichen der beiden Anschauungsweisen und in welchem Verhältnis stehen die Voraussetzungen und die Ableitungen der mechanischen Statistik zu den Grundlagen, Sätzen und Ergebnissen der Newton-Euler-Lagrange-Cauchyschen Mechanik?

3. Die mechanische Statistik. Es ist außerordentlich schwierig, über diesen Punkt etwas Hinreichendes und zugleich Verständliches zu sagen. Denn leider ist die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in den letzten Jahrzehnten sehr vernachlässigt oder zumindest auf höchst abwegige Bahnen gelenkt worden. Man ist, teilweise unter dem Einflusse *Poincarés,* der in seinem schönen Buche, dem berühmten „cours de probabilité“ eine Fülle hübscher Aufgaben in geistreicher Weise behandelte, allmählich dahin gelangt, die Wahrscheinlichkeitsrechnung beinahe in das Gebiet der „Mathematischen Unterhaltungen und Spiele“ zu verweisen, und hat ganz das Gefühl dafür verloren, daß es sich hier um eine ernsthafte naturwissenschaftliche Theorie für eine bestimmte Klasse beobachtbarer Erscheinungen handelt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein *Teil der theoretischen Physik,* ebenso wie die klassische Mechanik oder die Optik, sie ist eine völlig in sich geschlossene Theorie gewisser Phänomene, der sog. Massenerscheinungen, gleichgültig ob diese nun mechanischer, elektrischer oder anderer Natur sind; sie arbeitet, genau wie jede andere physikalische Theorie, mit bestimmten Voraussetzungen, die sich in klar formulierbare, die Grundbegriffe definierende Axiome zusammenfassen lassen, und leitet aus diesen deduktiv ihre Schlüsse ab. Zwei entscheidende Grundtatsachen muß ich hier hervorheben: Erstens, die Wahrscheinlichkeitsrechnung vermag ihre Resultate immer nur *aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten* zu errechnen, so wie etwa die Mechanik nur aus gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten die späteren Geschwindigkeiten eines Körpers bestimmt; diese Ausgangswerte der Rechnung erscheinen in der Regel, aber nicht immer, in der Form von Annahmen über sog. „gleichmögliche Fälle“. Zweitens, die Wahrscheinlichkeitstheorie kann aus den Daten, die ihr in einem konkreten Falle geboten werden, *niemals etwas anderes als Wahrscheinlichkeiten* ableiten, also Grenzwerte von relativen Häufigkeiten innerhalb unbegrenzt gedachter Folgen von Vorgängen oder Erscheinungen; insbesondere führt sie niemals zu einer *bestimmten* Aussage über den zeitlichen Ablauf eines Einzelvorganges und kann so niemals in unmittelbare Konkurrenz treten mit einem Ergebnis der Mechanik oder der übrigen deterministischen Physik. Ihre Rechtfertigung erhält die Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die Übereinstimmung ihrer Folgerungen mit der Erfahrung, eine Übereinstimmung, die in allen bisher durchgeführten Fällen mindestens so gut ist wie die irgendeiner sonstigen physikalischen Theorie.

Es fragt sich nun, in welcher Weise diese Grundsätze einer rationellen statistischen Theorie auf mechanische Vorgänge anzuwenden sind. Ich will dabei ausdrücklich betonen, daß ich nicht an hypothetische Moleküle, Elektronen, α-Teilchen oder dgl. denke, sondern nur Bewegungs- und Gleichgewichtserscheinungen an sinnlich wahrnehmbaren Massen im Auge habe. Wir können uns die Verhältnisse an einem bekannten Beispiel aus der Mechanik der starren Körper veranschaulichen. Das sog. Galtonsche Brett besteht aus einem durch Nägel gebildeten, regelmäßigen Gitter, in dem Kugeln, oder besser kreisrunde Scheibchen, deren Größe gerade dem Nägelabstand entspricht, herabfallen. Läßt man alle Scheibchen aus *einer* Zelle der obersten Reihe fallen, so kommen sie bekanntlich in der letzten Reihe in einer Verteilung an, die mehr oder weniger genau dem Gaußschen Fehlergesetz entspricht. Dieses Ergebnis läßt sich aus den Sätzen der klassischen Mechanik in keiner Weise folgern, ja es fehlt uns jede Vorstellung davon, wie eine solche Ableitung aussehen könnte. Man kann vom Standpunkt der Mechanik nur zweierlei versuchen: Entweder man idealisiert die Aufgabe so weit, daß man alle Abstände als völlig exakt, alle Scheibchen als ideal kreisförmig ansieht usf., dann erhält man überhaupt gar keine Auskunft darüber, wie ein solcher Körper sich bewegt, jeder der geometrisch möglichen Wege liefert auch eine Lösung der Differentialgleichungen. Oder man sucht seinen Trost darin, daß beim Einschlagen der Nägel, bei Herstellung der einzelnen Scheibchen, bei ihrer Einführung in die Ausgangszelle usw. Unregelmäßigkeiten vorkommen und daß diese, zusammen mit äußeren Störungen, wie Luftbewegungen oder dgl. die Bahnen eindeutig bestimmen. Der Trost ist ein nur schwacher, denn praktisch bleiben die Bahnen nach wie vor unbestimmt, da es kein Mittel gibt, die einflußnehmenden Elemente zu bestimmen. Es ist ganz gleichgültig, ob wir an der Annahme festhalten, die Bahnen *wären* bestimmt, wenn wir die genauen Anfangsbedingungen und alle Einflüsse kennten; denn da wir keine Aussicht haben, die Kenntnis je zu erlangen, so ist es eine Annahme, von der sich nie entscheiden läßt, ob sie richtig ist oder nicht, also eine nicht wissenschaftliche. Das allein Wesentliche ist: Die Methoden der klassischen Mechanik versagen dem Problem gegenüber vollständig, die der Wahrscheinlichkeitsrechnung liefern hingegen ein ganz klares, mit der Erfahrung übereinstimmendes Resultat. Dieses hat nicht etwa die Form einer Aussage der Mechanik oder überhaupt der deterministischen Physik, d. h. es legt nicht den Ablauf der Erscheinung eindeutig fest, sondern lautet nur: Ist die Zahl der Einzelkörper und die Zahl der Nägelreihen hinreichend groß, so ist *in der übergroßen Mehrheit der Fälle* eine Verteilung nach dem Gaußschen Gesetz zu erwarten. Dies Resultat gewinnt man natürlich nur auf Grund bestimmter Annahmen über die Ausgangswahrscheinlichkeiten, Annahmen, die, wie schon erwähnt, in der statistischen Theorie dieselbe Rolle spielen wie die „willkürlichen" Kraftgesetze oder die Anfangsbedingungen der Newtonschen Mechanik. Es sei nur nebenbei bemerkt, daß man im Falle des Galtonschen Brettes keineswegs einer so engen Voraussetzung bedarf, wie der in elementaren Ableitungen zugrunde gelegten, es bestände jedesmal die Wahrscheinlichkeit ½ für das Ausweichen nach der einen oder andern Seite — diese Voraussetzung ist in der Regel gar nicht erfüllt.

Nach diesem Schema des Galtonschen Brettes habe ich zunächst eine vollständige Theorie der Brownschen Bewegung durchgeführt[3]). Sie gelangt zu Ergebnissen, die allerdings nicht identisch sind, aber leicht in Einklang gebracht werden können mit den Ergebnissen der älteren Theorien von *v. Smoluchowski* und *Einstein*. Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, daß bei mir ausdrücklich ganz bestimmte, explicit ausgesprochene Annahmen über Ausgangswahrscheinlichkeiten an die Spitze gestellt werden — Annahmen, die, wie gesagt, die Rolle der Kraftgesetze in den Problemen der gewöhnlichen Mechanik spielen —, daß ferner in keiner Weise, auch nicht versteckt, von der berüchtigten Ergodenhypothese Gebrauch gemacht wird, und daß endlich die Schlußsätze eine Form annehmen, in der sie nicht als deterministische Aussagen in der Art der klassischen Physik erscheinen. Darin lag ja, wie *Einstein* hervorgehoben hat, ein unerträglicher Widerspruch der früheren Theorie, daß man den Ablauf der Erscheinungen einmal durch physikalische oder mechanische Gesetze als eindeutig bestimmt ansah, dann aber von ganz anderer Seite her zu Aussagen über diesen Ablauf gelangen zu können meinte. Besonders offen tritt dieser Widerspruch in der Boltzmannschen Fassung der Gastheorie zutage (die allerdings mit den hypothetischen Molekülen und nicht mit beobachtbaren Massen zu tun hat, hier also nur als Analogie herangezogen werden kann), wo man zuerst die Geschwindigkeitsänderungen nach den Gesetzen des elastischen Stoßes berechnet und dann durch Überlegungen rein statistischer Art diese Rechnungen durchkreuzt.

Ich will nun auf Einzelheiten nicht weiter eingehen und auch nicht auf die Frage zurückkommen, in welcher Weise in den früher erwähnten Problemen der Turbulenz und des Fließens fester Stoffe die statistische Theorie aufzubauen wäre. Was ich mit meinen bisherigen Veröffentlichungen[4]) angestrebt habe, war nur, die begrifflichen Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen und ein logisch mögliches Schema mechanischer Statistik anzugeben. Gewiß erheben sich noch große und mannigfaltige Schwierigkeiten anderer Art und vor allem werden uns, davon bin ich überzeugt, gewisse Enttäuschungen nicht erspart bleiben: Viele Fragen, die uns heute ganz natürlich und selbstverständlich zu sein scheinen, werden sich als endgültig unbeantwortbar herausstellen, so etwa wie seinerzeit die Newtonsche Himmelsmechanik die Frage *Keplers* nach der Größe der Radien der Planetenbahnen nicht beantwortet, sondern aus der wissenschaftlichen Betrachtung ausgeschaltet hat. Aber wie dem auch sei, mag der Verzicht groß oder klein sein, uns schwer oder leicht fallen, es schien mir unausweichlich, einmal offen und klar auszusprechen, daß es innerhalb der rein empirischen Mechanik Bewegungs- und Gleichgewichtsvorgänge gibt, die sich einer Erklärung auf Grund der *mechanischen Differentialgleichungen* auf die Dauer entziehen und den Aufbau einer geschlossenen Theorie der *mechanischen Statistik* verlangen.

[3]) Physikalische Zeitschrift *21*, 1920, S. 225 bis 232 und 256 bis 262.

[4]) Vgl. insbesondere die oben angeführte Arbeit in der Physik. Zeitschr.; ferner: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. *5*, 1919, S. 52 bis 99 und eine leicht verständliche Darstellung in: Die Naturwissenschaften 7, 1919, S. 168 bis 175, 186 bis 192 und 205 bis 209.