Ein Erweiterungssatz für monotone Mengen

Von

HANS DEBRUNNER und PETER FLOR

Im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über monotone Operatoren hat MINTY [6, 8] gewisse Mengen in Hilberträumen untersucht, die er „totally-M-related sets" nennt. Wir schlagen für sie die Bezeichnung „monotone Mengen" vor. Für diese Mengen hat zunächst MINTY [7] einen Erweiterungssatz bewiesen; dieser wurde später von GRÜNBAUM [4] verallgemeinert. Eine weitere Verallgemeinerung dieser Sätze ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Es seien X und Y zwei Vektorräume über den reellen Zahlen. Auf $X \times Y$ sei eine Bilinearfunktion gegeben, die wir mit $[.,.]$ bezeichnen. Wir nennen eine Teilmenge M von $X \times Y$ *monoton*, wenn für je zwei beliebige Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) von M gilt: $[x_2 - x_1, y_2 - y_1] \geqq 0$. Wir beweisen nun folgenden

Satz. *Es seien X und Y topologische Vektorräume über den reellen Zahlen; X sei lokalkonvex und Hausdorffsch. M sei eine bezüglich einer auf $X \times Y$ stetigen Bilinearfunktion monotone Teilmenge von $X \times Y$ mit der Eigenschaft, daß die erste Projektion von M* (also die Menge aller $x \in X$, zu denen es mindestens ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in M$ gibt) *in einer kompakten konvexen Teilmenge A von X enthalten ist. Ferner sei eine stetige Abbildung φ von A in Y gegeben. Dann existiert $x \in A$ derart, daß die erweiterte Menge $M \cup (x, \varphi x)$ auch noch monoton ist.*

Der Satz von GRÜNBAUM ist jener Spezialfall, in dem $X = Y$, M eine endliche Menge und φ eine Homothetie ist.

Man kann unsere Behauptung auch als Fixpunktsatz für eine mengenwertige Funktion formulieren. Für $y \in Y$, $\zeta = (\xi, \eta) \in M$ möge $Q_\zeta(y)$ die Menge aller $x \in X$ bezeichnen, für die $[x - \xi, y - \eta] \geqq 0$ gilt. Ferner setzen wir $T(y) = A \cap \bigcap_{\zeta \in M} Q_\zeta(y)$. Mit diesen Bezeichnungen ist der formulierte Satz offenbar gleichwertig mit der Aussage: *es gibt ein x mit $x \in T\varphi x$.*

In dieser Fassung wollen wir den Satz beweisen. Wir leiten ihn aus dem Fixpunktsatz von FAN-GLICKSBERG [2, 3] her. Dieser Satz lautet:

Ist X ein Hausdorffscher lokalkonvexer topologischer Vektorraum, A eine kompakte und konvexe Teilmenge von X, ist auf A eine Funktion f definiert, deren Werte konvexe in A enthaltene nichtleere Teilmengen von X sind, und ist f oberhalb stetig (in dem Sinn, daß in $A \times X$ der Graph von f abgeschlossen ist), *dann besitzt f auf A einen Fixpunkt*, d. h. es existiert $x \in A$ mit $x \in fx$.

Unser A und unser X entsprechen den Bedingungen dieses Satzes. Wir wollen zeigen, daß auch unsere Funktion $T \circ \varphi$ den f im Satz auferlegten Bedingungen genügt. Zunächst hat $T \circ \varphi$ tatsächlich die Menge A als Definitionsbereich und Teilmengen von A als Werte. Wir zeigen als nächstes, daß diese Funktion oberhalb stetig ist. Sei $(x_1, x_2) \in A \times X$ ein Punkt, der nicht dem Graphen von $T \circ \varphi$ angehört. Dann liegt entweder x_2 nicht in A oder es existiert ein $\zeta = (\xi, \eta)$ in M, für welches x_2 nicht in $Q_\zeta(\varphi x_1)$ liegt. Im ersten Fall ist die Menge $A \times (X - A)$ eine zum Graphen von $T \circ \varphi$ fremde Umgebung von (x_1, x_2) in $A \times X$. Im zweiten Fall ist $[x_2 - \xi, \varphi x_1 - \eta] < 0$; die Menge aller $(x, x') \in A \times X$ mit $[x' - \xi, \varphi x - \eta] < 0$ ist wegen der Stetigkeit von $[.,.]$ und von φ eine offene Umgebung von (x_1, x_2), und es ist für solche (x, x') stets $x' \notin T\varphi x$; also gehören diese (x, x') nicht zum Graphen von $T \circ \varphi$. Damit ist gezeigt, daß das Komplement des Graphen offen, dieser selbst daher abgeschlossen ist; $T \circ \varphi$ ist also oberhalb stetig.

Wir zeigen nun, daß sämtliche Bildmengen von T konvex sind. Zunächst sind alle $Q_\zeta(y)$ konvex; denn ist $x \in Q_\zeta(y)$, $x' \in Q_\zeta(y)$, so ist für $0 \leqq \lambda \leqq 1$ auch $\lambda x + (1 - \lambda) x' \in Q_\zeta(y)$; es gilt ja $[\lambda x + (1 - \lambda) x' - \xi, y - \eta] = \lambda [x - \xi, y - \eta] + (1 - \lambda)[x' - \xi, y - \eta]$. Ferner ist auch A konvex; also ist $T(y)$ als Durchschnitt konvexer Mengen konvex.

Der Schlüsselpunkt des Beweises ist, daß $T(y)$ für kein $y \in Y$ leer ist. $T(y)$ ist der Durchschnitt abgeschlossener Mengen, von denen eine, nämlich A, kompakt ist. Wäre dieser Durchschnitt leer, so müßte es ein endliches Teilsystem des Mengensystems $\{A, Q_\zeta(y)\ (\zeta \in M)\}$ geben, dessen Durchschnitt leer ist. Mit anderen Worten: wir können für den Rest des Beweises ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, M sei endlich. In diesem Fall lautet die Behauptung, ausführlich hingeschrieben:

Es seien Punkte $x_1, \ldots, x_k$ in X, $y_1, \ldots, y_k$ und y in Y gegeben; es gelte

$$[x_j - x_i, y_j - y_i] \geqq 0$$

für alle Paare i, j. Dann gibt es ein $x \in X$, das die Ungleichungen $[x - x_i, y - y_i] \geqq 0$ für alle i erfüllt; und x kann sogar in der konvexen Hülle der x_i gewählt werden. (Mit Ausnahme der letzten Bemerkung ist das gerade der eingangs erwähnte Satz von MINTY [7].)

Die Elemente der konvexen Hülle der x_i sind die Punkte der Gestalt $\sum \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \geqq 0$ und $\sum \lambda_i = 1$. Wir haben also zu zeigen, daß das folgende System von linearen Gleichungen und Ungleichungen lösbar ist:

$$(1) \qquad \begin{aligned} [\textstyle\sum \lambda_i x_i - x_j, y - y_j] &\geqq 0 \qquad (j = 1, \ldots, k), \\ \lambda_i &\geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, k), \\ \textstyle\sum \lambda_i &= 1. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, (1) sei unlösbar. Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der linearen Ungleichungen [1, theorem 3; 5, theorem III] kann man dann aus (1) durch Linearkombination eine widerspruchsvolle Beziehung herleiten (also eine von den Unbekannten freie und falsche Ungleichung oder Gleichung). Es muß also Zahlen $\alpha_j\ (j = 1, \ldots, k)$, $\beta_i\ (i = 1, \ldots, k)$ und γ geben, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$
(2)\qquad \begin{aligned}
\alpha_i \geqq 0, \quad \beta_i \geqq 0 & \qquad (i = 1, \ldots, k), \\
\sum_j \alpha_j [x_i, y - y_j] + \beta_i + \gamma = 0 & \qquad (i = 1, \ldots, k), \\
\sum_j \alpha_j [x_j, y - y_j] + \gamma > 0 . &
\end{aligned}
$$

Durch Elimination von γ und β_i entsteht

$$\sum \alpha_j [x_j - x_i, y - y_j] > 0 \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Multipliziert man mit α_i und summiert über i, so erhält man

$$(3)\qquad \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j [x_j - x_i, y] > \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j [x_j - x_i, y_j].$$

Die linke Seite von (3) ist aus Symmetriegründen Null; die rechte läßt sich aus denselben Gründen wie folgt umformen:

$$\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j [x_j - x_i, y_j] = - \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j [x_j - x_i, y_i] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j [x_j - x_i, y_j - y_i] \geqq 0,$$

letzteres, weil M monoton ist und die α_i nichtnegativ sind. Aus (3) ergibt sich also der Widerspruch $0 > 0$; damit ist die Annahme, (1) sei unlösbar, widerlegt.

Es sind somit alle Voraussetzungen für die Anwendung des Fixpunktsatzes von Fan-Glicksberg erfüllt; und diese Anwendung ergibt den zu Anfang behaupteten Satz.

Literaturverzeichnis

[1] W. B. Carver, Systems of linear inequalities. Ann. of Math., II. Ser. **23**, 212–220 (1921/22).
[2] K. Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38**, 121–126 (1952).
[3] I. L. Glicksberg, A further generalization of the Kakutani fixed-point theorem, with applications to Nash equilibrium points. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 170–174 (1952).
[4] B. Grünbaum, A generalization of theorems by Kirszbraun and Minty. Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 812–814 (1962).
[5] H. W. Kuhn, Solvability and consistency for systems of linear equations and inequalities. Amer. Math. Monthly **63**, 217–232 (1956).
[6] G. J. Minty, On the maximal domain of a "monotone" function. Michigan Math. J. 8, 135 to 137 (1961).
[7] G. J. Minty, On the simultaneous solution of a certain system of linear inequalities. Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 11–12 (1962).
[8] G. J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. Duke Math. J. **29**, 341–346 (1962).

Eingegangen am 7. 10. 1963

Anschrift der Autoren:

Hans Debrunner
Mathematisches Institut der Universität
Bern, Sidlerstraße 5, Schweiz

Peter Flor
Mathematisches Institut der Universität
Wien IX, Strudlhofgasse 4, Österreich