Beiträge zur allgemeinen Topologie. I.

Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs.

Von

Heinrich Tietze in Erlangen.

Der Begriff der stetigen Abbildung und damit der Begriff der „topologischen“, d. h. eineindeutigen umkehrbar stetigen Abbildung läßt sich bekanntlich nicht nur im Bereich der in einem n-dimensionalen Raum gelegenen Mengen[1]) entwickeln, sondern auch im Bereich allgemeiner Mengen, sofern für ihre Elemente nur gewissen Axiomen genügende Festsetzungen über Limes-, Umgebungs- oder Abstandsbeziehungen getroffen sind. Hieraus erwächst eine *„allgemeine Topologie“* als Lehre von den bei topologischen Abbildungen invarianten Eigenschaften solcher als „topologische Räume“ bezeichneter Mengen[2]). Damit verbindet sich die Untersuchung verschiedener Axiomensysteme für die genannten Limes-, Umgebungs- oder Abstandsbeziehungen[3]) hinsichtlich ihrer Tragweite und ihres gegenseitigen Zusammenhanges. Hierzu sollen im folgenden Beiträge geliefert werden.

Speziell für die *Umgebungs*beziehungen hat F. Hausdorff l. c. [2]) eine ausgedehnte Theorie auf der Grundlage eines im folgenden wiedergegebenen Axiomensystems entwickelt. Jedes System von Beziehungen, das zufolge von (als willkürlich getroffen anzusehenden) Festsetzungen „Umgebungen“ festlegt, die diesen Axiomen genügen, ordnet sich dieser Theorie unter. Statt der „Umgebungen“ werden häufig mit Vorteil „offene Mengen“ und

---

[1]) Und analog für „n-dimensionale Mannigfaltigkeiten“ in dem allgemeineren in der Analysis situs heute üblich gewordenen Sinn.

[2]) Im Anschluß an F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (1914), S. 213.

[3]) Auch der Begriff des Häufungspunktes ist zum Ausgangspunkt genommen worden. Vgl. drei Postulate für „Verdichtungsstellen“ von F. Riesz, Atti del IV. congresso dei Matematici, Roma 1908, t. 2, p. 19. Über ein viertes von W. Groß aufgestelltes Postulat für Häufungspunkte vgl. die kürzlich erschienene Arbeit von L. Vietoris, Monatshefte f. Math. u. Phys. 31 (1921), S. 176.

„umgebende Mengen“ benützt. Für diese Begriffe werden in Abschnitt A dieses Beitrages I Axiomensysteme aufgestellt[4]). Zu den diesen Axiomen genügenden „topologischen Räumen“ gehören aber noch recht exotische Bildungen, wie dies Beispiele zeigen, die zur Beantwortung von Unabhängigkeitsfragen — ad hoc und natürlich nicht um ihrer selbst willen — konstruiert wurden. Es werden im Abschnitt B gewisse „Trennbarkeitsaxiome“ besprochen, — von denen eines (nur in etwas anderer Formulierung) bereits von L. Vietoris, l. c. [3]) aufgestellt wurde, — dazu angetan, den Bereich der zu betrachtenden „Räume“ einzuengen[5]).

Von diesen Trennbarkeitsaxiomen wird übrigens auch in einem Beitrag II Gebrauch zu machen sein, der sich mit der *Einführung uneigentlicher Elemente* vom Standpunkt einer allgemeinen Topologie beschäftigen soll.

Die Untersuchung der genannten Unabhängigkeitsfragen führte auf eine Art von Verteilungsproblemen, auf die wegen ihres selbständigen Interesses etwas näher eingegangen wird, als für die Erledigung jener Fragen unbedingt nötig wäre. Ein solches Verteilungsproblem, auf das ein (der Untersuchung unzugänglich gebliebenes) Beispiel eines topologischen Raumes führte, ist das folgende: Gibt es eine in der ganzen xy-Ebene definierte eindeutige Funktion $f(x, y)$, die nur der Werte 0 und 1 fähig ist und die auf jeder Geraden $x =$ constans in allen Punkten, höchstens abzählbar unendlich viele ausgenommen, gleich 0, andererseits auf jeder Geraden $y =$ const. in allen Punkten mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler gleich 1 ist? Dieses Problem hat schon W. Sierpiński behandelt[6]) und unter Bezugnahme auf die Theorie der transfiniten Ordnungszahlen gezeigt, daß es gleichwertig ist mit der Frage, ob das Kontinuum die Mächtigkeit „Aleph eins“ hat. Die betreffenden Überlegungen von Sierpiński sind als Sonderfall in jenen der Nr. 18 enthalten, die mir Herr H. Hahn brieflich mitgeteilt hat, und lassen sich auch noch auf etwas allgemeinere Fälle ausdehnen (Nr. 19, 20). Verschärft man die Forderungen des obgenannten Verteilungsproblems (in unsymmetrischer Weise) dahin, daß auf jeder Geraden $y =$ const. in höchstens endlich vielen Punkten $f(x, y) = 0$ sein darf, so läßt sich die Un-

---

[4]) Auf diese Axiomensysteme wurde schon gelegentlich hingewiesen, Jahresber. der Deutsch. Math. Ver. **29** (1920), S. 112, Anm. 20.

[5]) Auf andere Weise hat Hausdorff durch Abzählbarkeitsaxiome solche Einengungen vorgenommen. Die Beziehungen dieser Abzählbarkeitsaxiome zu den Trennbarkeitsaxiomen werden nur gelegentlich (Nr. 23) gestreift.

[6]) Sur un théorème équivalent à l'hypothèse du continu, Bull. Acad. Scienc. Cracovie, 1919. Den Hinweis auf diese Arbeit und Auskunft über ihren Inhalt verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn F. Hausdorff.

möglichkeit einer solchen Verteilung, und zwar ohne Heranziehung der Theorie der transfiniten Ordnungszahlen[7]) leicht nachweisen (Nr. 16).

A. Umgebungen von Elementen. — Offene Mengen. — Umgebende Mengen.

1. F. Hausdorff bezeichnet als „topologischen Raum" eine Menge $\mathfrak{R}$, deren Elementen („Punkten") x gewisse Teilmengen $\mathfrak{U}(x)$, „Umgebungen von x" genannt, zugeordnet sind, und zwar derart, daß diese Zuordnungen folgenden „Umgebungsaxiomen" genügen[8]):

(A) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung $\mathfrak{U}(x)$; jede Umgebung $\mathfrak{U}(x)$ enthält den Punkt x (Existenzaxiom).

(B) Sind $\mathfrak{U}(x)$, $\mathfrak{V}(x)$ zwei Umgebungen desselben Punktes x, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{W}(x)$, die Teilmenge von beiden ist (Axiom vom Durchschnitt).

(C) Liegt der Punkt y in $\mathfrak{U}(x)$, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(y)$, die Teilmenge von $\mathfrak{U}(x)$ ist (Offenheitsaxiom).

(D) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen $\mathfrak{U}(x), \mathfrak{U}(y)$ ohne gemeinsamen Punkt (Trennbarkeitsaxiom).

2.[9]) Ist $\mathfrak{A}$ eine in einem topologischen Raum $\mathfrak{R}$ gelegene Punktmenge, d. h. eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$, so heißt x ein innerer Punkt von $\mathfrak{A}$, wenn es eine Umgebung $\mathfrak{U}(x)$ gibt, die Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist. Ist $\mathfrak{A}_i$ die Menge der inneren Punkte von $\mathfrak{A}$, — die wegen (A) Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist, — so heißt $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_i$ die Menge der Randpunkte von $\mathfrak{A}$. Eine Menge, deren jeder Punkt ein innerer ist, heißt *offen*[10]) (genauer „in $\mathfrak{R}$

---

[7]) Dementsprechend lassen sich auch jene Unabhängigkeitsfragen ohne Heranziehung dieser Theorie erledigen.

[8]) Wie schon gesagt, treten diese Zuordnungen hier als im übrigen ganz *willkürliche Festsetzungen* auf. Werden z. B. für die Punkte x einer euklidischen Ebene als $\mathfrak{U}(x)$ alle Kreisflächen mit dem Mittelpunkt x genommen (= Mengen aller Punkte x' mit einem Abstand $\overline{xx'} < $ als ein $\varrho > 0$) oder alle x enthaltenden Dreiecksflächen oder dergl., so werden diese Festsetzungen von uns als Sonderfälle der allgemeinen Theorie angesehen, *weil* sie den Axiomen (A) bis (D) genügen, — und *nur* aus diesem Grunde (vgl. übrigens Nr. 3). Im Wesen liegt darin keine höhere Willkür als in der Festsetzung des Abstandes bei rein analytischem Aufbau der Geometrie: Punkt x = geordnetes Zahlenpaar (ξ_1, ξ_2), Abstand $\overline{xx'} = \sqrt{(\xi_1 - \xi_1')^2 + (\xi_2 - \xi_2')^2}$ (vgl. etwa H. Beck, Koordinatengeometrie (1919), S. 2, 18), — oder in der Setzung eines (nicht weiter erklärten) Grundbegriffes „zwischen" bei axiomatischem Aufbau.

[9]) Zu dieser Nummer vgl. F. Hausdorff, l. c. [2]), Kap. VII, §§ 2, 3.

[10]) Vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (1918), S. 40. Daß für den wichtigen Begriff der offenen Menge ein eigenes Substantiv erwünscht wäre, hatte F. Hausdorff, l. c. [2]), S. 215 mit Recht hervorgehoben und dafür das Wort

offen"[11]). Ein Punkt x von $\mathfrak{R}$ heißt ein Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, wenn in jeder Umgebung $\mathfrak{U}(x)$ unendlich viele Punkte von $\mathfrak{A}$ liegen. $\mathfrak{A}$ heißt abgeschlossen (genauer: „in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen"[11])), wenn die Menge $\mathfrak{A}_\beta$ der Häufungspunkte von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten ist ($\mathfrak{A}_\beta \subseteqq \mathfrak{A}$)[12]). Als „abgeschlossene Hülle" von $\mathfrak{A}$ bezeichnet man[13]) die Vereinigung (Vereinigungsmenge) $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{A}_\beta$ der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_\beta$. Es gelten die Sätze:

(a) Jede Umgebung $\mathfrak{U}(x)$ eines Punktes x ist eine offene Menge (folgt aus (C)).

(b) Wenn x nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist, dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(x)$, die keinen von x verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}$ enthält (folgt aus (B) und (D)).

(c) Die „Komplementärmenge" $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$, d. h. die Menge aller nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{R}$, ist abgeschlossen, wenn $\mathfrak{A}$ offen ist und umgekehrt (folgt aus (b)).

(d) Jede Menge, die aus allen Punkten von $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme eines einzigen besteht, ist offen (folgt aus (c)).

3. Jede neue den Axiomen genügende Zuordnung von Umgebungen $\mathfrak{U}(x)$ zu den Elementen x derselben Menge schafft nach der bisherigen Definition einen neuen topologischen Raum. Man spricht jedoch weiterhin von einem und demselben topologischen Raum $\mathfrak{R}$, wenn die beiden Systeme von Umgebungen „gleichwertig" sind[14]), worunter verstanden werden soll, daß jede Menge in $\mathfrak{R}$, die eine offene Menge bezüglich des einen Umgebungssystems ist, auch offen ist bezüglich des anderen und umgekehrt, — eine Gleichwertigkeitsdefinition, der man auch die Fassung geben kann: Für jeden Punkt x ist in jeder Umgebung von x des einen Systems eine Umgebung des anderen als Teilmenge enthalten und umgekehrt (wie im Beispiel der Kreis- und der Dreiecksflächen in Anm. [8])).

Gebiet gebraucht. Doch sind ihm spätere Autoren hierin nicht gefolgt. Tatsächlich scheint mir dieses Wort weit eher auf etwas Zusammenhängendes als auf ein „Inneres" hinzuweisen.

[11]) Wenn nämlich das Relative dieser Eigenschaft zum Raum betont werden soll, vgl. Nr. 6.

[12]) Eine Menge $\mathfrak{A}$ kann zugleich offen und abgeschlossen sein, in einem zusammenhängenden Raum $\mathfrak{R}$ (vgl. Nr. 6) jedoch nur, wenn $\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{R}$ oder gleich der leeren (keinen Punkt enthaltenden) Menge ist.

[13]) Nach C. Carathéodory, l. c. [10]), S. 57. Die Bezeichnungen $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{A}_\beta$ nach Hausdorff, l. c., S. 219, 220. Über Vereinigung $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ und Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ (= Vereinigung zueinander punktfremder Mengen) vgl. C. Carathéodory, l. c., S. 22, 23; H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, I. (1921), S. 2. Über Summen- und Produktbildung von *Räumen* vgl. Nr. 6.

[14]) F. Hausdorff, l. c., S. 261, mit etwas anderem Ausgangspunkt für die Definition.

Danach ist es leicht, aus einem System von Umgebungen oder aus mehreren gleichwertigen weitere gleichwertige zu bilden, z. B.:

Ist $\mathfrak{U}(x)$ ein System, so behalte man von allen Umgebungen eines jeden Punktes x nur jene bei, die Teilmengen einer bestimmt gewählten Umgebung von x desselben oder eines gleichwertigen Systems sind; oder:

Zu den Umgebungen $\mathfrak{U}(x)$ eines jeden Punktes x füge man noch beliebige Umgebungen von x aus beliebigen anderen gleichwertigen Systemen hinzu, z. B. alle in einer bestimmten Menge von Systemen vorkommenden Umgebungen von x.

Dem Übergang von einem Umgebungssystem zu einem gleichwertigen gegenüber sind die in Nr. 2 erklärten Begriffe „innerer Punkt", „offene Menge" usw. invariant.

4. In der Gesamtheit aller Umgebungssysteme eines topologischen Raumes, d. h. aller mit einem System gleichwertigen Systeme ist eines ausgezeichnet: das System aller offenen Mengen, jede derselben als Umgebung jedes ihrer Punkte genommen. Dies legt nahe, von vornherein von diesem System von Umgebungen auszugehen[15]. Wie alle anderen Systeme genügt natürlich auch dieses den Forderungen (A), (B), (C), (D). Es ist aber nicht schwer, die Frage nach besonderen, verschärften Forderungen zu beantworten, derart, daß einerseits diesen Forderungen jedes aus allen offenen Mengen $\mathfrak{G}$ eines topologischen Raumes bestehende System genügt und daß andererseits jedes System von Teilmengen einer Menge $\mathfrak{R}$, das diesen Forderungen genügt, gerade das System aller offenen Mengen eines aus den Punkten von $\mathfrak{R}$ gebildeten topologischen Raumes ist. Eine derartige Charakterisierung der Systeme, die aus allen offenen Mengen eines topologischen Raumes bestehen, leisten nämlich die folgenden Forderungen:

(A°) Jeder Punkt x (des betrachteten topologischen Raumes $\mathfrak{R}$) ist in mindestens einer offenen Menge $\mathfrak{G}$ enthalten.

(B°) Haben zwei offene Mengen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ wenigstens einen Punkt gemein, so ist auch ihr Durchschnitt (Menge der gemeinsamen Punkte) $\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2$ eine offene Menge.

(C°) Gibt es zu jedem in der Menge $\mathfrak{A}$ enthaltenen Punkt x eine offene Menge, die x enthält und Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist, so ist $\mathfrak{A}$ selbst eine offene Menge.

(D°) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei offene Mengen ohne gemeinsamen Punkt, von denen die eine x, die andere y enthält.

In der Tat kann man sich auf Grund von (A, B, C, D) unmittelbar überzeugen, daß für das System der offenen Mengen eines topologischen Raumes (A°, B°, C°, D°) erfüllt sind. Sei andererseits ein (A°) bis (D°)

---

[15]) Diese Auffassung des Umgebungsbegriffes für die jeweils betrachteten (euklidischen oder metrischen) Räume findet man bei C. Carathéodory, l. c. [10]), S. 37; H. Hahn, l. c. [13]), S. 65.

erfüllendes System von Teilmengen $\mathfrak{G}$ einer Menge $\mathfrak{R}$ gegeben, so ist es leicht, den Punkten x von $\mathfrak{R}$ ein System von Umgebungen $\mathfrak{U}(x)$, das (A) bis (D) erfüllt, so zuzuordnen, daß die gegebenen Mengen $\mathfrak{G}$ in ihrer Gesamtheit zusammenfallen mit der Gesamtheit der für das System der $\mathfrak{U}(x)$ gemäß Nr. 2 definierten offenen Mengen. Hierzu genügt es, als Umgebungen $\mathfrak{U}(x)$ von x alle den Punkt x enthaltenden Mengen $\mathfrak{G}$ zu wählen, ein System, das zufolge (A°, B°, C°, D°) offenbar (A, B, C, D) erfüllt. Die Menge der für dieses System der $\mathfrak{U}(x)$ definierten offenen Mengen fällt nun tatsächlich mit der Menge aller $\mathfrak{G}$ zusammen. Denn jede in diesem Sinn offene Menge ist zufolge (C°) eine Menge $\mathfrak{G}$ und umgekehrt ist jede Menge $\mathfrak{G}$ als Umgebung $\mathfrak{U}(x)$ jedes ihrer Punkte zufolge (a) offen.

Da jedes (A°) bis (D°) erfüllende System (System offener Mengen) auch als System von Umgebungen angesehen werden kann, indem man jede offene Menge jedem ihrer Punkte als Umgebung zuordnet, so kann man nach Nr. 3 die Gleichwertigkeit zweier Systeme von offenen Mengen definieren und aus dem Vorstehenden ergibt sich: Zwei Systeme von offenen Mengen sind gleichwertig nur dann, wenn sie vollständig übereinstimmen.

5. Bei Untersuchung eines topologischen Raumes ist es bisweilen nützlich, alle jene Mengen als einem Punkt zugeordnet zu betrachten, die eine Umgebung $\mathfrak{U}(x)$ als Teilmenge enthalten[16]) und die als „x umgebende Mengen" $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ bezeichnet werden mögen[17]). Wir wollen zeigen, daß die folgenden Forderungen ($\bar{A}$), ($\bar{B}$), ($\bar{C}$), ($\bar{D}$) nicht nur von jedem System umgebender Mengen eines topologischen Raumes erfüllt werden, sondern diese Systeme auch vollständig kennzeichnen:

($\bar{A}$) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine $\overline{\mathfrak{U}}(x)$; jede $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ enthält x.

($\bar{B}$) a) Der Durchschnitt zweier x umgebender Mengen ist selbst eine x umgebende Menge; desgleichen b) jede Menge, die eine $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ als Teilmenge hat.

($\bar{C}$) Für jede $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ bildet die Menge aller Punkte y, für welche $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ eine y umgebende Menge ist, selbst eine x umgebende Menge.

($\bar{D}$) Ist $x \neq y$, so gibt es eine $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ und eine $\overline{\mathfrak{U}}(y)$ ohne gemeinsamen Punkt.

---

[16]) Die Definition dieser Mengen ist ersichtlich unabhängig von der Wahl des Systems von Umgebungen aus einer Gesamtheit gleichwertiger Systeme. Mit Hilfe der offenen Mengen könnte man die Mengen $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ definieren als Mengen mit einer x enthaltenden offenen Menge als Teilmenge.

[17]) Vgl. Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 288. Die gleichzeitige Betrachtung dieser allgemeineren Umgebungen und der Umgebungen im ursprünglichen durch Hausdorffs Theorie festgelegten Sinn machte für die ersteren eine besondere Bezeichnung notwendig.

Daß das System der $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ diesen Forderungen genügt, ist unmittelbar zu bestätigen. — Seien andererseits in einer Menge $\mathfrak{R}$ den Punkten x Mengen $\overline{\mathfrak{U}}(x)$, die $(\overline{A})$ bis $(\overline{D})$ erfüllen, zugeordnet. Um zu zeigen, daß es einen aus den Punkten von $\mathfrak{R}$ gebildeten topologischen Raum gibt, für den die $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ gerade mit den umgebenden Mengen der Punkte x zusammenfallen, wollen wir in $\mathfrak{R}$ „offene Mengen" definieren durch die Festsetzung: Jede Menge, die für alle ihre Punkte umgebende Menge ist, heiße eine offene Menge. Wir haben zu zeigen, daß diese offenen Mengen (A°) bis (D°) erfüllen. Sei x ein beliebiger Punkt; zu ihm gehört nach $(\overline{A})$ eine $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ und nach $(\overline{C})$ eine $\overline{\mathfrak{U}}_1(x)$, bestehend aus allen Punkten y, für welche $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ umgebende Menge von y ist. Sei y_0 irgendeiner dieser Punkte, also $\overline{\mathfrak{U}}(x) = \overline{\mathfrak{B}}(y_0)$, so muß $\overline{\mathfrak{U}}_1(x)$ nach $(\overline{C})$ auch eine y_0 umgebende Menge sein. $\overline{\mathfrak{U}}_1(x)$ ist also eine x enthaltende offene Menge: (A°) ist erfüllt. Zugleich sieht man:

(e) In jeder $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ gibt es eine x enthaltende offene Menge.

Hieraus und aus $(\overline{D})$ folgt (D°); ferner folgt (B°) aus $(\overline{B}\,a)$, (C°) aus $(\overline{B}\,b)$. Unsere Definition offener Mengen erfüllt also (A°) bis (D°), d. h. liefert einen topologischen Raum im früheren Sinn. Daß nun für jeden Punkt x die Gesamtheit der in diesem topologischen Raum den Punkt x umgebenden Mengen, — d. h. die Gesamtheit der Mengen mit einer x enthaltenden offenen Menge als Teilmenge (vgl. Anm. [16])) — zusammenfällt mit der Gesamtheit aller $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ des gegebenen Systems, folgt ohne weiteres mittels $(\overline{B}\,b)$ und (e).

6. Wenn man bei Einführung topologischer Räume statt von Umgebungen von offenen Mengen oder von umgebenden Mengen ausgeht, so kann man sofort direkt mittels dieser Grundbegriffe die in Nr. 2 mittels des Umgebungsbegriffes eingeführten Begriffe „innerer", „Rand"- oder „Häufungspunkt", „in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen" definieren. Man hat, wie man leicht sieht, in den Definitionen nur statt „Umgebung $\mathfrak{U}(x)$" überall „x enthaltende offene Menge" bzw. „x umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x)$" zu setzen. Auch ist aus dem Bisherigen klar, wie von den drei Begriffen des „Umgebungssystems", der „offenen" bzw. der „umgebenden Menge" aus jedem von ihnen die beiden anderen herzuleiten sind.

Sei bemerkt, daß alle in Nr. 2 eingeführten Begriffe Beziehungen einer Menge $\mathfrak{A}$ *relativ* zum Raum $\mathfrak{R}$ darstellen, in den $\mathfrak{A}$ eingebettet ist. Andererseits kann man $\mathfrak{A}$ auch für sich allein als einen topologischen Raum ansehen, wenn man als Umgebungen (in $\mathfrak{A}$) eines Punktes x von $\mathfrak{A}$ die Durchschnitte von $\mathfrak{A}$ mit den Umgebungen von x in $\mathfrak{R}$ definiert[18]). Ist nun eine Menge $\mathfrak{A}$ gemeinsame Teilmenge verschiedener Mengen $\mathfrak{R}$, von denen

[18]) Vgl. Hausdorff, l. c. [3]), S. 242.

jede vermöge eines in ihr eingeführten Umgebungssystems einen topologischen Raum darstellt, so können sehr wohl die dadurch in $\mathfrak{A}$ definierten Umgebungssysteme übereinstimmen oder miteinander gleichwertig sein. Dann erscheint ein und derselbe *Raum* $\mathfrak{A}$ in verschiedene Überräume $\mathfrak{R}$ eingebettet, die Eigenschaften von $\mathfrak{A}$ relativ zu diesen verschiedenen Räumen $\mathfrak{R}$ können aber jedesmal andere sein[19]). Hingegen nennt man *absolut*[20]) solche topologische Eigenschaften eines Raumes $\mathfrak{A}$ (oder Beziehungen von $\mathfrak{A}$ zu seinen Elementen und Teilmengen), die $\mathfrak{A}$ zukommen, unabhängig von jeder etwaigen Einbettung in einen Überraum. Als Beispiele hierfür mögen dienen: *Zusammenhängend* heißt[21]) ein Raum $\mathfrak{A}$, wenn er keine Zerlegung in zwei punktfremde, nicht leere, in $\mathfrak{A}$ abgeschlossene Teile $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$) gestattet. Ersetzt man hier das Wort *abgeschlossen* durch *offen*, so erhält man zufolge (c) eine völlig gleichwertige Definition, die sich bei Zugrundelegung des Axiomensystems ($A^\circ \ldots D^\circ$) unmittelbar auf den Grundbegriff der offenen Menge stützt. — *Im Punkte x zusammenhängend* werde ein Raum $\mathfrak{A}$ genannt, wenn es in $\mathfrak{A}$ eine zusammenhängende x umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ gibt. — *Im Punkte x zusammenhängend im kleinen* heißt ein Raum $\mathfrak{A}$, wenn jede x umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ in x zusammenhängend ist, wenn also in jeder $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ eine zusammenhängende, x umgebende Menge $\overline{\mathfrak{V}}(x)$ enthalten ist[22]). — *Zusammenhängend im kleinen*[22]) heißt ein Raum $\mathfrak{A}$, wenn er in jedem seiner Punkte zusammenhängend im kleinen ist. — *Komponente* eines Raumes $\mathfrak{A}$ heißt (nach Hausdorff, l. c.) eine zusammenhängende in $\mathfrak{A}$ enthaltene Menge, wenn sie in keiner zusammenhängenden, in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Menge als *echte* Teilmenge enthalten ist.

---

[19]) Z. B. ist die Menge $\mathfrak{A}$ der Punkte (ξ, η, ζ), für die $\zeta = 0$, $\xi^2 + \eta^2 < 1$ ist, offen im Raum $\mathfrak{R}'$ aller Punkte $\zeta = 0$, hingegen abgeschlossen im Raum $\mathfrak{R}''$ aller Punkte $\xi^2 + \eta^2 < 1$. [Nur scheinbar führen wir $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{A}$ als Teilmengen des dreidimensionalen Raumes *aller* Punkte (Koordinatentripel) (ξ, η, ζ) ein. Tatsächlich handelt es sich nur um die Mengen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{A}$ und um eine möglichst einfache Beschreibung der in ihnen festzusetzenden Umgebungsbeziehungen; vgl. [8]).]

[20]) Nach F. Klein, Math. Ann. **9** (1876), S. 478.

[21]) Vgl. Hausdorff, l. c.[2]), S. 244; ebenso schon (für speziellere Räume) N. J. Lennes, Am. Journ. of Math. **33** (1911), S. 303; analog schon früher für *abgeschlossene* Mengen C. Jordan, Cours d'analyse, 2. éd. (1893), t. 1, p. 25 (d'un seul tenant).

[22]) Der Begriff wurde (für metrische Räume) eingeführt von H. Hahn, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **23** (1914), S. 318, Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss. **123** (1914), S. 2433 und in anderer Ausdrucksweise von St. Mazurkiewicz, vgl. Fundamenta mathematicae, **1**, S. 166 und weitere dort angegebene Zitate, ein verwandter Begriff vorher von Pia Nalli, Rend. d. Circ. Mat. di Palermo **32** (1911), S. 392. Vgl. ferner H. Hahn, Fund. math. **2**, S. 189. Die zweite Form obiger Definition für allgemeine topologische Räume wurde l. c. [17]) gegeben.

Sei eine Menge punktfremder Räume $\mathfrak{R}_i$ gegeben. Als *Summenraum* $\Sigma\mathfrak{R}_i$ dieser Räume werde der Raum bezeichnet, der aus der Menge der Punkte aller $\mathfrak{R}_i$ entsteht, wenn als umgebende Menge eines jeden Punktes x_i von $\mathfrak{R}_i$ jede Menge erklärt wird, die eine den Punkt x_i im Raum $\mathfrak{R}_i$ umgebende Menge als Teilmenge enthält (Beispiel bei Übertragung des gewöhnlichen Umgebungsbegriffes der $\xi\eta$-Ebene auf ihre hier betrachteten Teilmengen: i alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufend; $\mathfrak{R}_i$ die Gerade $\xi = i\pi$, $\mathfrak{R}$ die Geradenmenge $\sin\xi = 0$). Sei bemerkt, daß ein Raum $\mathfrak{R}$ keineswegs immer der Summenraum seiner Komponenten ist[23]). Auf die Frage, wann dies der Fall ist, kommen wir an anderer Stelle (Beiträge II, Nr. 16) zurück. — Sei eine geordnete Menge punktfremder Räume $\mathfrak{R}_i$ gegeben (m. a. W. es wird die Indexmenge der i geordnet vorausgesetzt). Als *Produktraum* $\Pi\mathfrak{R}_i$ der $\mathfrak{R}_i$ wird — in naheliegender Verallgemeinerung von Steinitz und Fréchet angegebener Bildungen — der folgendermaßen gebildete Raum bezeichnet: Elemente sind alle geordneten Mengen $x = (\ldots x_i \ldots)$, die entstehen, wenn man aus jedem Raum $\mathfrak{R}_i$ ein Element x_i nimmt und die x_i entsprechend ihren Indizes ordnet; als umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x^0)$ von $x^0 = (\ldots x_i^0 \ldots)$ wird jede Menge von Elementen x erklärt mit folgender Eigenschaft: es gibt zu jedem x_i^0 eine umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}_i(x_i^0)$ in $\mathfrak{R}_i$, so daß $\overline{\mathfrak{U}}(x^0)$ alle Elemente $x = (\ldots x_i \ldots)$ enthält, für die jedes x_i in $\overline{\mathfrak{U}}_i(x_i^0)$ liegt. (Beispiele: Die $\xi\eta$-Ebene ist der Produktraum zweier Geraden, der ξ-Achse und der η-Achse, eine Torusfläche der Produktraum zweier Kreislinien, eine Kreiszylinderfläche der Produktraum einer Geraden und einer Kreislinie.) *Welche* Anordnung der Indexmenge bei der Produktbildung verwendet wird, ist für den Produktraum, abgesehen von der Bezeichnung seiner Elemente, unwesentlich: kommutatives Gesetz, speziell also $\prod_{i=1,2}\mathfrak{R}_i \equiv \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1$; es gilt aber auch distributiv $\mathfrak{R} \times (\Sigma\mathfrak{R}_i) = \Sigma(\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_i)$.[24])

Über den Relativbegriff der offenen Menge beweisen wir noch zwecks späterer Verwendung den

Satz. *Wenn $\mathfrak{B}$ eine im Raum $\mathfrak{A}$ offene Menge ist, wobei $\mathfrak{B}$ also selbst hierdurch als Raum definiert ist, wenn ferner $\mathfrak{C}$ eine im Raum $\mathfrak{B}$ offene Menge ist, dann ist $\mathfrak{C}$ im Raum $\mathfrak{A}$ offen.*

Bezeichnen wir nämlich mit $\overline{\mathfrak{U}}(x|\mathfrak{R})$ eine umgebende Menge des

---

[23]) Z. B. ist dies nicht der Fall, wenn $\mathfrak{R}$ aus allen Punkten der Geraden $\xi = 0$ und $\xi = 1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) besteht, wie die Betrachtung der Umgebung eines Punktes auf $\xi = 0$ zeigt. Komponenten sind dabei die einzelnen Geraden.

[24]) Man kann auch, wie Frl. E. Noether gelegentlich bemerkte, die Frage nach der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren stellen, von deren Beantwortung wir aber wohl noch recht entfernt sind.

Punktes x im Raum $\mathfrak{R}$, so sind die $\overline{\mathfrak{U}}(x|\mathfrak{B})$ definiert als Durchschnitte $\mathfrak{B}\cdot\overline{\mathfrak{U}}(x|\mathfrak{A})$ und nach Voraussetzung gibt es für jeden Punkt x von $\mathfrak{C}$ eine $\overline{\mathfrak{B}}(x|\mathfrak{A})\subseteqq\mathfrak{B}$ und eine $\overline{\mathfrak{U}}(x|\mathfrak{B})=\mathfrak{B}\cdot\overline{\mathfrak{U}}(x|\mathfrak{A})\subseteqq\mathfrak{C}$, woraus folgt: $\overline{\mathfrak{B}}(x|\mathfrak{A})\cdot\overline{\mathfrak{U}}(x|\mathfrak{B})=(\overline{\mathfrak{B}}(x|\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{B})\cdot\overline{\mathfrak{U}}(x|\mathfrak{A})=\overline{\mathfrak{B}}(x|\mathfrak{A})\cdot\overline{\mathfrak{U}}(x|\mathfrak{A})=\overline{\mathfrak{W}}(x|\mathfrak{A})\subseteqq\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$, d. h. $\overline{\mathfrak{W}}(x|\mathfrak{A})\subseteqq\mathfrak{C}$ und damit die Behauptung.

7. Der Übergang, der von jedem der drei betrachteten Axiomensysteme zu jedem anderen möglich ist, zeigt, daß diese drei Systeme im Wesen die gleiche Abgrenzung des Begriffes des topologischen Raumes geben. Wenn wir das Wort „Umgebung" für den Augenblick in allgemeinerer, sowohl die offenen wie die umgebenden Mengen mitumfassender Bedeutung nehmen, so können wir sagen, daß die drei betrachteten Axiomensysteme verschiedene Auffassungen des Begriffes Umgebung darstellen. Hierbei wird im besonderen, wenn das System aller offenen Mengen an die Stelle eines beliebigen Umgebungssystems tritt, die Forderung (C) durch eine *schärfere* ersetzt und zugleich der Umstand beseitigt, daß die Mengen $\mathfrak{U}(x)$ nur einzelnen ihrer Punkte zugeordnet sind, während andererseits beim Übergang zu den umgebenden Mengen die Forderung (C) *fallen gelassen* wird. Beide Male vereinfacht sich gegenüber (B) die auf den Durchschnitt bezügliche Forderung (B°) bzw. $(\overline{\mathrm{B}})$. Im dritten Axiomensystem ist $(\overline{\mathrm{C}})$ das ausschlaggebende Axiom. Dieses Axiom finde ich bereits in älteren Aufzeichnungen (von Anfang Sept. 1913) über ein Axiomensystem für „Umgebungen", zu dem Hilberts Charakterisierung von Umgebungen in der Ebene und Fréchets allgemeine Limesuntersuchungen die Anregung gegeben hatten[25]) und wobei die Frage ins Auge gefaßt war, — auf die ich noch hoffe, zurückkommen zu können, — nach einem Axiomensystem für Umgebungen und einem *gleichwertigen* für Limiten (eventuell auch unter Erweiterung auf allgemeinere Folgen, etwa mit transfiniter wohlgeordneter Indexmenge[26])) derart, daß nicht nur in der üblichen Weise aus den Umgebungen die Limiten, sondern auch umgekehrt jene aus diesen ableitbar sind[27]). Für gewöhnliche Limiten wurde ich auf ein dem ersten Abzählbarkeitsaxiom (E) von Hausdorff analoges Axiom geführt[28]). Mit solchen Abänderungen des Axiomensystems sind natürlich

[25]) D. Hilbert, Math. Ann. **56** (1902) = Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl. (1909), S. 179; M. Fréchet, Rend. d. Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), S. 1.

[26]) Man vgl. die Räume, die nach Hausdorff, l. c. [3]), Kap. 7, § 1, S. 214 durch transfinite geordnete Mengen dargestellt werden; siehe auch diese Beiträge II das Beispiel in § 4.

[27]) Außer den beiden primitiven Fréchetschen Forderungen für Limes-Räume („classes L") — vgl. l. c. [25]), S. 5, 6 — genügen *aus Umgebungen abgeleitete* Limiten eo ipso einer Reihe weiterer Forderungen, so: daß jede aus einer Folge mit dem Limes x durch Umordnen, Hinzufügen endlich vieler Elemente, endlich oftmaliges Setzen der Elemente gebildete Folge ebenfalls den Limes x hat, desgleichen jede aus endlich vielen Folgen mit dem Limes x durch Vereinigung gebildete Folge; ferner, falls das erste Abzählbarkeitsaxiom (E) — vgl. [28]) — gilt, daß zu jeder Folge von Folgen mit x als Limes der Limites: $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots;\ \lim\limits_{h=\infty} x_h^{(n)} = x^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n=\infty} x^{(n)} = x$, Zahlen k_n gehören, so daß $\lim\limits_{n=\infty} x_{h_n}^{(n)} = x$ stets, wenn $h_n \geqq k_n$ für jedes n.

[28]) Vgl. Hausdorff, l. c. [2]), Kap. 8. Im übrigen scheint mir für die erwähnte Frage nützlich, die Axiome, die die Umgebungen nur *eines* Punktes (bzw. die Folgen mit *demselben* Punkt als Limes) betreffen, zu unterscheiden von jenen, die sich auf mehrere Punkte beziehen.

Abänderungen des Begriffes des topologischen Raumes verbunden, die nicht immer bloß in spezialisierenden Einengungen bestehen. So hat ein solches etwas abweichendes System L. Vietoris in der schon zitierten (z. T. vor dem Krieg, seit 1913, entstandenen) Arbeit angegeben und als gleichwertig mit einem auf F. Riesz und W. Groß zurückgehenden Axiomensystem für Häufungspunkte nachgewiesen[29]).

B. Umgebungen von Mengen. — Trennbarkeitsaxiome.

8. Man kann den Begriff der Umgebung, bzw. umgebenden Menge in folgender Weise verallgemeinern: Ist $\mathfrak{A}$ eine Punktmenge eines topologischen Raumes $\mathfrak{R}$, so heiße jede Menge, welche umgebende Menge eines jeden Punktes x von $\mathfrak{A}$ ist, eine $\mathfrak{A}$ umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$. Ferner heiße jede offene, $\mathfrak{A}$ als Teilmenge enthaltende Menge eine Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$[30]); m. a. W.: $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ enthält zu jedem Punkt x von $\mathfrak{A}$ (in jedem zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Umgebungssystem) eine Umgebung von x als Teilmenge. Besteht $\mathfrak{A}$ aus einem einzigen Punkt x, ist also $\mathfrak{A} = \{x\}$, so fällt $\overline{\mathfrak{U}}(\{x\})$ mit dem bisherigen $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ zusammen und jede $\mathfrak{U}(\{x\})$ ist (wenn nicht im ursprünglichen Umgebungssystem, dann in einem gleichwertigen) eine $\mathfrak{U}(x)$. Es gilt der eine Verallgemeinerung des Axioms $(\overline{C})$ darstellende Satz:

(f) Ist eine die Menge $\mathfrak{A}$ umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ gegeben, so bildet die Menge $\mathfrak{O}$ aller Punkte y, für welche $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ eine y umgebende Menge ist, selbst eine $\mathfrak{A}$ umgebende Menge, und zwar ist $\mathfrak{O}$ eine offene Menge.

9. Wie bekannt und auch aus Beispielen ersichtlich, die wir im folgenden betrachten, fallen unter den Begriff des topologischen Raumes nach der gegebenen Hausdorffschen Definition manche ziemlich seltsame Gebilde, so daß für viele Betrachtungen eine engere Abgrenzung des Raumbegriffs erwünscht wird. Hausdorff erreicht solche Einschränkungen durch seine beiden Abzählbarkeitsaxiome. In anderer Richtung liegen die im folgenden betrachteten Einschränkungen. Sie knüpfen an das Axiom (D) an, das wir im folgenden als „*erstes Trennbarkeitsaxiom*" bezeichnen und dahin aussprechen können, daß es zu zwei punktfremden Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ stets dann punktfremde Umgebungen $\mathfrak{U}(\mathfrak{A}), \mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ gibt, wenn jede der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur aus einem einzigen Punkt besteht. Für die wichtigsten Beispiele topologischer Räume $\mathfrak{R}$ sind solche punktfremde Umgebungen $\mathfrak{U}(\mathfrak{A}), \mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ aber noch in viel allgemeineren Fällen zweier Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ vorhanden. Insbesondere gilt dies, sobald $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene punktfremde (nicht leere) Mengen sind, für alle „metrischen" Räume[31]), desgleichen auch für alle durch einen Ordnungstypus (einer einfach geordneten Menge) bei entsprechender Umgebungs-

---

[29]) l. c. [3]), S. 176.

[30]) Vgl. Carathéodory, l. c.[10]); Hahn, l. c.[15]).

definition[32]) dargestellten Räume $\mathfrak{R}$. Darüber hinaus gilt, wie wir zeigen werden (vgl. Nr. 24) für die genannten Raumtypen die Existenz punktfremder Umgebungen $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ überhaupt stets dann, wenn von den punktfremden nicht leeren Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keine einen Häufungspunkt der anderen enthält.

Diese Aussagen stellen eine so wesentliche Kennzeichnung des Raumcharakters der wichtigsten topologischen Räume dar, daß sie als besondere „Axiome" (besser wäre vielleicht zu sagen: „Postulate") für Umgebungen aufgestellt und in ihren Folgerungen untersucht zu werden verdienen. Einen Sonderfall zweier punktfremder abgeschlossener Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, mit dem wir uns noch besonders beschäftigen werden, stellt der Fall dar, daß die eine der Mengen, etwa $\mathfrak{B}$, nur einen einzigen Punkt x enthält: $\mathfrak{B} = \{x\}$. Danach gelangen wir zur Aufstellung von Axiomen, die wir der Reihe nach als *„zweites"*, *„drittes"* und *„viertes Trennbarkeitsaxiom"* bezeichnen und in denen die *Existenz punktfremder Umgebungen* $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ gefordert wird:

(g) *wenn x ein beliebiger Punkt, $\mathfrak{B} = \{x\}$ und $\mathfrak{A}$ eine beliebige abgeschlossene, nicht leere, den Punkt x nicht enthaltende Menge ist*; bzw.

(h) *für irgend zwei punktfremde nicht leere abgeschlossene Mengen* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; bzw.

(i) *für irgend zwei punktfremde nicht leere Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, deren keine einen Häufungspunkt der anderen enthält.*

Jedes dieser drei Axiome umfaßt das vorhergehende[33]). Wenn wir eines dieser Axiome dem Axiomensystem (A ... D) für Hausdorffsche Systeme von Umgebungen, oder dem Axiomensystem ($A^\circ \dots D^\circ$) für offene Mengen oder dem Axiomensystem ($\bar{A} \dots \bar{D}$) für umgebende Mengen hinzufügen, so ist es dabei nur nötig, den Begriff „abgeschlossen" bzw. „Häufungspunkt" auf den betreffenden Grundbegriff „Umgebung" bzw. „offene Menge" bzw. „umgebende Menge" zurückzuführen (vgl. Nr. 2, 6). Je nachdem wir unsere drei Trennbarkeitsaxiome für den Grundbegriff der Umgebung, der offenen Menge oder der umgebenden Menge ausgesprochen denken, wollen wir sie der Reihe nach mit (G), (H), (J) oder (G°), (H°), (J°) oder ($\bar{G}$), ($\bar{H}$), ($\bar{J}$) bezeichnen[34]).

---

[31]) Das sind Räume mit einer der „Dreiecksungleichung" $\overline{xy} + \overline{yz} \leqq \overline{xz}$ genügenden Definition des Abstands $\overline{xy} = \overline{yx} \geqq 0$ irgend zweier Punkte x, y ($\overline{xy} = 0$ gleichbedeutend mit $x = y$). Vgl. Hausdorff, l. c. [2]), S. 211.

[32]) Nach Hausdorff, l. c. S. 214.

[33]) Daß jedes dieser Axiome wirklich immer wieder eine stärkere Einschränkung des Raumbegriffs bewirkt, wird in Nr. 11, 14, 15 gezeigt.

[34]) Die Buchstaben (E), (F) mögen den von Hausdorff so bezeichneten Abzählbarkeitsaxiomen vorbehalten bleiben.

10. Wir führen zunächst das dritte Trennbarkeitsaxiom in der besonders einfachen Fassung an, die man erhält, wenn man es für den Grundbegriff der offenen Menge ausspricht:

(H°) Sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ zwei offene Mengen, deren Vereinigung gleich dem Gesamtraum ist: $\mathfrak{G} \dotplus \mathfrak{H} = \mathfrak{R}$, dann gibt es zwei punktfremde offene Mengen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1$, so daß $\mathfrak{G} \dotplus \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H} \dotplus \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{R}$ ist.

Daß ein *beliebiger* topologischer Raum diesem Axiom nicht genügt, d. h. daß (H°) keine Folgerung aus (A°) ... (D°) ist, ist etwa an dem von Hausdorff, l. c.[2]), S. 264 angeführten (im folgenden etwas spezialisiert wiedergegebenen) Beispiel zu ersehen (Beispiel $\mathfrak{B}_1$): Man betrachte alle Punkte x einer Geraden und definiere als offene Mengen alle Mengen, die im gewöhnlichen Sinn offen sind oder aus einer im gewöhnlichen Sinn offenen Menge durch Weglassung einer abzählbaren Punktmenge entstehen. Ist in dem so definierten topologischen Raum $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}$ gleich der Menge aller Punkte mit Ausnahme von $x = 0$, bzw. mit Ausnahme aller Punkte $x = 1 : n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), so ist (H°) nicht erfüllt.

11. Aus (H°) erhält man das zweite Trennbarkeitsaxiom (G°), wenn man darin $\mathfrak{H}$ durch eine Menge ersetzt, die aus allen Punkten von $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme eines einzigen Punktes x besteht: $\mathfrak{H} = \mathfrak{R} - \{x\}$. Man erhält:

(G°) Ist $\mathfrak{G}$ eine offene, den Punkt x enthaltende Menge des Raumes $\mathfrak{R}$, dann gibt es zwei punktfremde offene Mengen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1$, so daß $\mathfrak{G} \dotplus \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{R}$ ist und $\mathfrak{H}_1$ den Punkt x enthält.

(G°) ist eine Folge von (H°) — und den Axiomen (A°, B°, C°, D°) —, da eine Menge $\mathfrak{R} - \{x\}$ nach Satz (d) offen ist. Daß (G°) ebensowenig wie (H°) eine Folgerung von ($A^\circ \ldots D^\circ$) ist, zeigt das gleiche oben angeführte Beispiel $\mathfrak{B}_1$, in welchem ja gerade ein Fall betrachtet wurde, wo $\mathfrak{H}$ alle Punkte mit Ausnahme eines einzigen umfaßt (vgl. auch Anm. 35).

12. Für manche Betrachtungen ist es nützlich, an Stelle der Aussagen (G°) bzw. (H°) die folgenden mit ihnen völlig gleichwertigen (G^1) bzw. (H^1) zu verwenden:

(G^1) Zu jeder einen Punkt x umgebenden Menge $\overline{\mathfrak{V}}(x)$ gibt es eine in ihr enthaltene, abgeschlossene, x umgebende Menge $\overline{\mathfrak{W}}(x)$.

(H^1) Ist $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene, nicht leere Menge, so gibt es zu jeder $\mathfrak{A}$ umgebenden Menge $\overline{\mathfrak{V}}(\mathfrak{A})$ eine in ihr enthaltene abgeschlossene, $\mathfrak{A}$ umgebende Menge $\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{A})$.

Wir wollen den Beweis der Gleichwertigkeit von (H^1) mit (H°) ausführen. Der entsprechende für (G^1) und (G°) verläuft ganz gleichartig. — Sei also (H°) erfüllt. Dann ist $\mathfrak{H}_1$ (als zu $\mathfrak{G}_1$ punktfremd) in $\mathfrak{R} - \mathfrak{G}_1$ und daher in $\mathfrak{G}$ enthalten: $\mathfrak{H}_1 \subseteqq \mathfrak{R} - \mathfrak{G}_1 \subseteqq \mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{R} - \mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{G}_1 \subseteqq \mathfrak{R} - \mathfrak{H}_1$. Demnach ist $\mathfrak{G}_1$ (als offene Menge) und also auch $\mathfrak{R} - \mathfrak{H}_1$ umgebende

Menge von $\mathfrak{R}-\mathfrak{G}$. Analog ist $\mathfrak{H}_1$ umgebende Menge von $\mathfrak{R}-\mathfrak{H}$. Beim Beweis von (H^1) kann man nun $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ offen annehmen, da es zu $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ stets eine (gemäß Satz (f) zu bildende) offene $\mathfrak{A}$ umgebende Teilmenge von $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ gibt, die an Stelle von $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ genommen werden kann. Sind dann $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$ Mengen, wie sie dem Axiom (H^0) für $\mathfrak{G}=\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{R}-\mathfrak{A}$ entsprechen, so sei $(\mathfrak{H}_1)_a=\overline{\mathfrak{H}}_1$ die „abgeschlossene Hülle" (vgl. Nr. 2) von $\mathfrak{H}_1$, also $(\mathfrak{R}-\mathfrak{H}_1)_i=\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{H}}_1$ die (offene) Menge aller Punkte, für die $\mathfrak{R}-\mathfrak{H}_1$ umgebende Menge ist. Da nun nach dem oben gesagten $\mathfrak{R}-\mathfrak{H}_1$ umgebende Menge von $\mathfrak{R}-\mathfrak{G}$ ist, so folgt $\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{H}}_1 \supseteqq \mathfrak{R}-\mathfrak{G}$, d. h. die abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{H}}_1$ ist in $\mathfrak{G}$ enthalten: $\overline{\mathfrak{H}}_1 \subseteqq \overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$. Nach dem oben Gesagten ist aber $\mathfrak{H}_1$ und daher auch $\overline{\mathfrak{H}}_1 \supseteqq \mathfrak{H}_1$ umgebende Menge von $\mathfrak{R}-\mathfrak{H}=\mathfrak{A}$. Setzt man also $\overline{\mathfrak{H}}_1=\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{A})$, so ist (H^1) erfüllt. — Sei umgekehrt (H^1) erfüllt und seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ zwei offene Mengen und $\mathfrak{G}+\mathfrak{H}=\mathfrak{R}$. Setzen wir $\mathfrak{R}-\mathfrak{H}=\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{G}\supseteq\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{A}$ umgebende Menge. Wir wenden (H^1) auf $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})=\mathfrak{G}$ an und bezeichnen mit $\mathfrak{H}_1$ eine offene $\mathfrak{A}$ enthaltende Teilmenge von $\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{A})$ (eine solche läßt sich gemäß Satz (f) stets bilden). Es ist also $\mathfrak{H}_1 \supseteqq \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}_1=\mathfrak{R}$. Ferner ist $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{A})$ eine offene Menge $\supseteq \mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})=\mathfrak{R}-\mathfrak{G}$, d. h. $\mathfrak{G}+\mathfrak{G}_1=\mathfrak{R}$ und somit (H^0) erfüllt.

13. Wie bereits erwähnt, ist eines der besprochenen Trennbarkeitsaxiome, nämlich (G^0) völlig gleichwertig mit einem von L. Vietoris aufgestellten Umgebungsaxiom, das, ausgesprochen für umgebende Mengen, (in unserer Terminologie) so lautet:

(G^2) Zu jeder den Punkt x umgebenden Menge $\overline{\mathfrak{B}}(x)$ des Raumes $\mathfrak{R}$ gibt es eine in ihr enthaltene, x umgebende Menge $\overline{\mathfrak{W}}(x)$, so daß $\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{W}}(x)$ umgebende Menge von $\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{B}}(x)$ ist.

Ganz analog ist mit (H^0) gleichwertig die Aussage:

(H^2) Zu jeder die abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}$ umgebenden Menge $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ gibt es eine in ihr enthaltene $\mathfrak{A}$ umgebende Menge $\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{A})$, so daß $\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{A})$ umgebende Menge von $\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ ist.

Es genüge der Nachweis der Gleichwertigkeit von (H^2) mit (H^1) (und daher mit (H^0)). Ist in der Tat (H^1) erfüllt und $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ eine die abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}$ umgebende Menge, dann genügt die gemäß (H^1) vorhandene abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{A})$ zugleich der Aussage (H^2), wie daraus ersichtlich ist, daß $\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{W}}(\mathfrak{A})$ offen und $\supseteqq \mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ ist. Ist umgekehrt (H^2) erfüllt und $\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ eine die abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}$ umgebende Menge, ferner $\overline{\mathfrak{W}}_0(\mathfrak{A}) \subseteqq \overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ gemäß (H^2) von der Art, daß $\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{W}}_0(\mathfrak{A})$ und daher auch $(\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{W}}_0(\mathfrak{A}))_i=\mathfrak{R}-\overline{\overline{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{A})$, — unter $\overline{\overline{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{A})$ die abgeschlossene Hülle von $\overline{\mathfrak{W}}_0(\mathfrak{A})$ verstanden —, umgebende Menge von $\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ ist, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{A}) \subseteqq \overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ und (H^1) erfüllt.

14. Es wurde schon gezeigt, daß das zweite Trennbarkeitsaxiom (G°) von den Axiomen (A°, B°, C°, D°) unabhängig ist[35]). Andererseits ist das dritte Trennbarkeitsaxiom (H°) von (A°, B°, C°, D°, G°) unabhängig, wie durch folgendes Beispiel belegt werde.

Beispiel $\mathfrak{B}_2$: Die Gesamtheit der Punkte des Raumes $\mathfrak{R}$ sei durch die Menge der Punkte des Ebenenpaares $\zeta^2 = 1$ im reellen euklidischen dreidimensionalen $\xi\,\eta\,\zeta$-Raum dargestellt. Jeder Punkt x von $\mathfrak{R}$, für den $\eta \gtrless 0$ ist (wir wollen diese Punkte „Nebenpunkte" nennen), gelte als isoliert, d. h. jede x enthaltende Menge, speziell die Menge $\{x\}$ gelte als eine x umgebende Menge. Für einen „Hauptpunkt" $x = (\xi_0, 0, \zeta_0)$ (wo $\zeta_0 = \pm 1$) werde aber als umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ jede Menge bezeichnet, für welche es eine ganze positive Zahl m gibt, so daß in der Menge enthalten sind:

1. der Punkt $(\xi_0, 0, \zeta_0)$ sowie, mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler, alle übrigen Punkte der Geraden $\zeta = \zeta_0$, $\xi = \xi_0$;

2. für jedes $n > m$ alle Punkte der Geraden $\zeta = -\zeta_0$, $\eta = 1: (n\pi + \operatorname{arccot} \xi_0) = \varphi_n(\xi_0)$, höchstens endlich viele Punkte auf jeder dieser Geraden ausgenommen.

An der unter 2. getroffenen Festsetzung, bei der arccot den zwischen 0 und π gelegenen Hauptwert bedeutet, ist wesentlich nur, daß zu jedem ξ_0 abzählbar viele Gerade $\eta = \text{const.}\ (\neq 0)$ gehören, zu verschiedenen Werten ξ_0 aber immer wieder andere. Z. B. wäre die Festsetzung $\varphi_n(\xi) = n\pi + \operatorname{arccot} \xi$ (oder $= 4n + \operatorname{arccot} \xi$) ebensogut brauchbar.

Daß diese Festsetzungen ($\overline{A}$), ($\overline{B}$), ($\overline{C}$) erfüllen, ist unmittelbar ersichtlich, bezüglich ($\overline{D}$) genüge es, da sich die anderen Fälle noch wesentlich einfacher erledigen, zwei Hauptpunkte in verschiedenen Ebenen zu betrachten: $x_1 = (\xi_1, 0, \zeta_1)$, $x_2 = (\xi_2, 0, \zeta_2)$, $\zeta_2 = -\zeta_1$. Bilden wir dann $\overline{\mathfrak{U}}(x_i)$ aus den Punkten der Geraden $\zeta = \zeta_i$, $\xi = \xi_i$, sowie aus allen Punkten jeder Geraden $\zeta = -\zeta_i$, $\eta = \varphi_n(\xi_i)$ mit Ausnahme des Punktes $\xi = \xi_1 + \xi_2 - \xi_i$, so sind $\overline{\mathfrak{U}}(x_1)$, $\overline{\mathfrak{U}}(x_2)$ offenbar punktfremde x_1 bzw. x_2 umgebende Mengen. Zugleich mit ($\overline{A}$) bis ($\overline{D}$) sind (A°) bis (D°) erfüllt.

Daß das Axiom (G°) erfüllt ist, ist gezeigt, wenn wir nachweisen, daß zu einem Punkt x und zu einer x nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A}\ (= \mathfrak{R} - \mathfrak{G})$ stets zueinander punktfremde umgebende Mengen $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ und $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ existieren. (Zufolge (e) und (f) gibt es dann offene umgebende Mengen $\mathfrak{H}_1 = \overline{\mathfrak{B}}(x) \subseteqq \overline{\mathfrak{U}}(x)$, $\mathfrak{G}_1 = \overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \subseteqq \overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$, die der Aussage ($G^\circ$) genügen). Ist x ein Nebenpunkt, so braucht man hierzu nur $\overline{\mathfrak{U}}(x) = \{x\}$, $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R} - \{x\}$ zu nehmen. Ist $x = (\xi_0, 0, \zeta_0)$ ein Hauptpunkt, so sei $\mathfrak{X}$ gleich der Menge aller nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Punkte der Geraden $\zeta = \zeta_0$, $\xi = \xi_0$, das sind alle bis auf höchstens abzählbar unendlich viele, da sonst x gegen die Voraussetzung Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ wäre. Ferner sei $\mathfrak{Y}$ die Menge aller nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Punkte aller Geraden $\zeta = -\zeta_0$, $\eta = \varphi_n(\xi_0)\ (n = 1, 2, \ldots)$. Hierbei muß es ein m geben, so daß für $n > m$ auf jeder dieser Geraden höchstens endlich viele Punkte zu $\mathfrak{A}$ gehören, da sonst x Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ wäre. Offenbar ist $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} = \overline{\mathfrak{U}}(x)$ eine umgebende Menge von x. Andererseits ist $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{U}}(x) = \mathfrak{Z}$ eine umgebende Menge von $\mathfrak{A}$. Für die Nebenpunkte von $\mathfrak{A}$ ist das klar, da $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ keinen dieser Nebenpunkte enthält, desgleichen für die Hauptpunkte $(\xi_1, 0, \zeta_0)$ mit $\xi_1 \neq \xi_0$, da $\mathfrak{Z}$ die ganze Gerade $\zeta = \zeta_0$, $\xi = \xi_1$ und alle Geraden $\zeta = -\zeta_0$, $\zeta = \varphi_n(\xi_1)$ völlig enthält. Ist aber $x_1 = (\xi_1, 0, -\zeta_0)$, so enthält $\mathfrak{Z}$ von der Geraden $\zeta = -\zeta_0$, $\xi = \xi_1$

---

[35]) Das zeigt auch ein Beispiel von L. Vietoris, l. c.[3]), S. 174/175, das (G^1) als unabhängig von ($A \ldots D$) nachweist.

alle Punkte höchstens mit Ausnahme der abzählbar unendlich vielen, für die $\eta = \varphi_n(\xi_0)$ ist, und $\mathfrak{Z}$ enthält weiter von jeder Geraden $\zeta = \zeta_0$, $\eta = \varphi_n(\xi_1)$ alle Punkte höchstens mit Ausnahme des einen, für den $\xi = \xi_0$ ist. $\mathfrak{Z}$ ist also umgebende Menge aller Hauptpunkte $x_1 \neq x_0$ und somit auch von $\mathfrak{A}$. Außerdem ist $\mathfrak{Z} = \bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ nach Konstruktion zu $\bar{\mathfrak{U}}(x)$ punktfremd, (G°) also erfüllt.

Hingegen ist (H°) *nicht* erfüllt. Hierzu nehmen wir für $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ die Menge aller Hauptpunkte der Ebene $\zeta = 1$ bzw. $\zeta = -1$, die offenbar beide abgeschlossen sind, und behaupten, daß es punktfremde umgebende Mengen $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ und $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{B})$ nicht geben kann. Für $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} - \mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{R} - \mathfrak{B}$ ist dann (H°) nicht erfüllt. In der Tat nehmen wir an, es gebe zwei punktfremde umgebende Mengen $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$, $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{B})$; indem wir $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ nötigenfalls durch $\mathfrak{R} - \bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ ersetzen, können wir voraussetzen, es sei $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A}) + \bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{R}$. In $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{B})$ ist dann (als zur Umgebung von $(\xi, 0, -1)$ gehörig) für *jeden* Wert von ξ eine Gerade $\zeta = 1$, $\eta = \varphi_n(\xi)$ (und sogar abzählbar unendlich viele) ganz oder bis auf endlich viele Punkte enthalten. Das ist im ganzen eine Menge Γ von Geraden $\eta =$ konst. von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums. Andererseits gibt es zu jedem Wert ξ_0 höchstens abzählbar viele Gerade der Menge Γ, so daß der Punkt $\xi = \xi_0$ der betreffenden Geraden zu $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{B})$ gehört. Denn auf jeder Geraden $\zeta = 1$, $\xi = \xi_0$ gehören alle Punkte bis auf abzählbar viele zur Umgebung von $(\xi_0, 0, 1)$ also zu $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$. Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{E}_1$ die Menge aller auf den Geraden aus Γ liegenden Punkte, ferner mit $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ die Menge jener Punkte von $\mathfrak{E}_1$, die zu $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ bzw. $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{B})$ gehören, so erhalten wir eine Zerlegung $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ von der Art, daß in $\mathfrak{E}_1$ auf jeder Geraden $\xi =$ konst. höchstens abzählbar unendlich viele Punkte zu $\mathfrak{Q}$, hingegen auf jeder Geraden $\eta =$ konst. höchstens endlich viele Punkte zu $\mathfrak{P}$ gehören. Dann müßte aber eine Zerlegung derselben Art wie für $\mathfrak{E}_1$ ebenso für die ganze $\xi\eta$-Ebene $\mathfrak{E}$ möglich sein, wie man sieht, wenn man die Menge Γ eineindeutig auf die gleichmächtige Menge *aller* Geraden $\eta =$ konst. der Ebene $\mathfrak{E}$ abbildet. Daß aber eine solche Zerlegung von $\mathfrak{E}$ nicht möglich ist, beweisen wir in Nr. 16.

15. Wir wollen nun noch zeigen, daß auch das vierte Trennbarkeitsaxiom von den anderen Trennbarkeitsaxiomen unabhängig, d. h. daß (J°) keine Folge von $(A^\circ, B^\circ, C^\circ, D^\circ, H^\circ)$ ist. Hierzu betrachten wir das

Beispiel $\mathfrak{B}_3$ eines Raumes $\mathfrak{R}_*$, den man aus dem Raum $\mathfrak{R}$ des Beispiels $\mathfrak{B}_2$ durch Hinzunahme eines weiteren Punktes x_* folgendermaßen erhält. Die Erklärung umgebender Mengen für alle Punkte x aus $\mathfrak{R}$ behält man bei; als umgebende Menge $\bar{\mathfrak{U}}(x_*)$ wird jede Menge erklärt, die x_* enthält und außerdem umgebende Menge aller Hauptpunkte (beider Ebenen) mit Ausnahme höchstens endlich vieler ist. Die Axiome $(A^\circ \dots D^\circ)$ sind dann wieder erfüllt. Seien nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei punktfremde abgeschlossene Mengen. Wir wollen die Existenz punktfremder umgebender Mengen $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$, $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{B})$ nachweisen und damit zeigen, daß (H°) erfüllt ist. Da die Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nicht beide den Punkt x_* zum Häufungspunkt haben können, da sie ihn sonst beide enthalten müßten, so enthält wenigstens eine der Mengen, etwa $\mathfrak{A}$, höchstens endlich viele Hauptpunkte. Sei $x_\nu = (\xi_\nu, 0, \zeta_\nu)$ ein Hauptpunkt aus $\mathfrak{A}$. Da x_ν nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$ ist, gibt es auf der Geraden $\zeta = \zeta_\nu$, $\xi = \xi_\nu$ höchstens abzählbar viele Punkte von $\mathfrak{B}$ und es gibt ein m_ν, so daß für $n > m_\nu$ auf jeder Geraden $\zeta = -\zeta_\nu$, $\eta = \varphi_n(\xi_\nu)$ höchstens endlich viele Punkte zu $\mathfrak{B}$ gehören. Mit $\bar{\mathfrak{B}}(x_\nu)$ werde die Menge aller nicht zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Punkte bezeichnet, die auf der Geraden $\zeta = \zeta_\nu$, $\xi = \xi_\nu$ oder auf einer der Geraden $\zeta = -\zeta_\nu$, $\eta = \varphi_n(\xi_\nu)$ $(n > m_\nu)$ liegen. Es werde $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ gleich der Vereinigung von $\mathfrak{A}$ mit allen $\bar{\mathfrak{B}}(x_\nu)$ gesetzt (bzw. $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}$

keinen Hauptpunkt enthält). Dann ist $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ eine umgebende Menge von $\mathfrak{A}$. Ferner ist die Menge $\mathfrak{R}_* - \bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$, wie leicht zu sehen, umgebende Menge jedes ihrer Punkte und daher eine $\mathfrak{B}$ umgebende und zu $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$ punktfremde Menge. Also ist (H°) erfüllt. Daß aber (J°) nicht erfüllt ist, folgt, wie im Beispiel $\mathfrak{B}_2$ durch Feststellung der Tatsache, daß für die Menge $\mathfrak{A}$ aller Hauptpunkte aus $\zeta = +1$ und die Menge $\mathfrak{B}$ aller Hauptpunkte aus $\zeta = -1$, von denen keine einen Häufungspunkt der anderen enthält, punktfremde umgebende Mengen $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{A})$, $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{B})$ nicht existieren. (Zum Unterschied von Beispiel $\mathfrak{B}_2$ sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jetzt nicht abgeschlossen, da x_* Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ wie von $\mathfrak{B}$ ist, ohne diesen Mengen anzugehören.)

16. Wir beweisen den

Satz. *Es ist nicht möglich, die Menge $\mathfrak{E}$ aller Punkte (x, y) der Ebene so in zwei Teilmengen zu zerlegen: $\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, daß auf jeder Geraden $x =$ konst. höchstens abzählbar unendlich viele Punkte zu $\mathfrak{Q}$ und auf jeder Geraden $y =$ konst. höchstens endlich viele Punkte zu $\mathfrak{P}$ gehören.*

Beweis[36]). Wäre $\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ eine solche Zerlegung und ist $\mathfrak{X}$ eine abzählbar unendliche Menge von Werten x, ferner $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$ die höchstens abzählbar unendliche Menge der Punkte (x_0, y) aus $\mathfrak{Q}$, für die x_0 zu $\mathfrak{X}$ gehört und $\mathfrak{Y}$ die gleichfalls höchstens abzählbar unendliche Menge der Werte $y = y_0$, für die es einen zu $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$ gehörenden Punkt (x, y_0) gibt. Dann gibt es Werte $y = y_1$, die nicht zu $\mathfrak{Y}$ gehören. Für einen solchen Wert $y = y_1$ gehören alle Punkte (x, y_1), für die x zu $\mathfrak{X}$ gehört, *nicht* zu $\mathfrak{Q}$, also zu $\mathfrak{P}$, es gibt also auf der Geraden $y = y_1$ unendlich viele Punkte aus $\mathfrak{P}$, im Widerspruch zur Annahme.

17. In Nr. 16 ist ein Sonderfall erledigt aus einer Klasse von Fragen, die allgemein so lauten:

(k) Gegeben sind vier Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$ (bzw. $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}'_1, \mathfrak{m}'_2$). Sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2}$ die Menge aller geordneten Paare (x_1, x_2) [wofür wir auch (x, y) oder (ξ, η) schreiben], wo x_1 eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}_1$, und x_2 eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}_2$ durchlaufen soll[37]). Ist $\mathfrak{M}$ irgendeine Menge von „Punkten" (x_1, x_2) der „Ebene" $\mathfrak{E}$, so bezeichne $\mathfrak{M}_{x_h^0}$ die Menge aller Punkte von $\mathfrak{M}$, für die $x_h = x_h^0$ ist. Gefragt wird, ob es eine Zerlegung $\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ gibt, so daß für jedes x_1 die Menge $\mathfrak{Q}_{x_1}$ eine Mächtigkeit $\leqq \mathfrak{n}_2$ (bzw. $< \mathfrak{m}'_2$) und für jedes x_2 die Menge $\mathfrak{P}_{x_2}$ eine Mächtigkeit $\leqq \mathfrak{n}_1$ (bzw. $< \mathfrak{m}'_1$) hat[38]).

---

[36]) Der Beweis verläuft durchaus parallel mit einer Schlußweise von W. Sierpiński; vgl. Nr. 18.

[37]) Verallgemeinerungen dieser Frage auf „mehrdimensionale Räume" von „Punkten" $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n > 2)$ bleiben hier außer Betracht.

[38]) Diese Frage ist mir zuerst bei Untersuchung von Räumen ähnlich denen der Beispiele $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ (vgl. hierzu Nr. 21) in dem besonderen Fall entgegengetreten, daß

Dabei werde $\mathfrak{n}_1 < \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_2 < \mathfrak{m}_2$ (bzw. $\mathfrak{m}_1' \leqq \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2' \leqq \mathfrak{m}_2$) vorausgesetzt. Andernfalls liegt nämlich[39]) überhaupt kein Problem vor, da dann entweder die Zerlegung $\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{Q} = 0$ oder die Zerlegung $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ alles leistet. Die Nummern 18. bis 21. enthalten einige Ausführungen über diese Fragen und über ihr Auftreten bei Untersuchung gewisser topologischer Räume. Die beiden Typen der Frage (k), der eine auf die Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_h$, $\mathfrak{n}_h$, der andere auf die Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_h$, $\mathfrak{m}_h'$ bezüglich, sollen als Typus (k_{I}) bzw. (k_{II}) unterschieden werden. Der Typus (k_{II}) umfaßt Fälle, die sich nicht zugleich in Gestalt einer Frage vom Typus (k_{I}) bringen lassen, wenn nämlich eine der Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_h' = \aleph_\alpha$ und $\alpha = 0$ oder gleich einer Grenzzahl (Limeszahl) ist.

18. Wir betrachten die Frage (k_{I}) für den Fall, daß $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ ist[40]). Setzt man unter Berufung auf den Wohlordnungssatz und die Theorie der transfiniten Ordnungszahlen $\mathfrak{m} = \aleph_\mu$, $\mathfrak{n} = \aleph_\nu$ (μ, ν beliebige Ordinalzahlen), so lautet die Antwort: Eine Zerlegung der genannten Art ist dann und nur dann möglich, wenn $\mu = \nu + 1$, also $\mathfrak{m}$ die unmittelbar auf $\mathfrak{n}$ folgende Mächtigkeit ist.

Beweis. Sei $\omega_\varkappa$ die Anfangszahl der Zahlklasse $Z(\aleph_\varkappa)$ und $a_0, a_1, \ldots, a_\sigma, \ldots$ bzw. $b_0, b_1, \ldots, b_\sigma, \ldots$ ($\sigma < \omega_\mu$) eine Zuordnung aller Elemente x bzw. y zur Menge aller Ordinalzahlen $< \omega_\mu$. Sei nun $\mu = \nu + 1$, so werde ein Element $(x, y) = (a_\alpha, b_\beta)$ von $\mathfrak{E}$ zu $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ gerechnet, je nachdem $\alpha \leqq \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist, und die Zerlegung $\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ ist von der Art, wie verlangt. Sei andrerseits $\mu > \nu + 1$ und angenommen, es gebe eine Zerlegung der verlangten Art. Sei Y eine Menge von Elementen y von der Mächtigkeit $\aleph_{\nu+1}$, $\mathfrak{P}_Y$ die Menge aller Elemente von $\mathfrak{P}$, für welche y zu Y gehört; ferner X die Menge der Elemente $x = x_0$, für die es ein zu $\mathfrak{P}_Y$ gehörendes Element (x_0, y) gibt. Dann ist die Mächtigkeit von $\mathfrak{P}_Y$ und daher auch von X höchstens $\aleph_{\nu+1}$, also $< \mathfrak{m}$. Es gibt also ein

---

$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{c}$ (Mächtigkeit des Kontinuums) und $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \aleph_0$ ist (d. h. $\mathfrak{Q}_{x_1}$ und $\mathfrak{P}_{x_2}$ höchstens abzählbar unendlich), — ein Fall, der schon von W. Sierpiński betrachtet wurde (vgl. Anm. 6). Dieser Fall führt bei Heranziehung der Theorie der Alephs auf die ungelöste Frage, ob $\mathfrak{c} = \aleph_1$ oder $> \aleph_1$ ist (vgl. Nr. 18). Demgegenüber ließen sich, wie wir sahen, für die Räume der Beispiele $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ die entsprechenden Fragen unter bloßer Verwendung der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums erledigen.

[39]) Sofern man den Satz gelten läßt, daß für zwei Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ stets einer der Fälle $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ vorliegen muß.

[40]) In der hier vorliegenden Allgemeinheit verdanke ich den Inhalt dieser Nr. 18 einer freundlichen Mitteilung von Herrn H. Hahn. Die Ausführung lehnt sich zum Teil an die von Herrn Hausdorff mir vermittelten Überlegungen von W. Sierpiński an [vgl. [6])], die sich auf den Fall $\mathfrak{n} = \aleph_0$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ (Mächtigkeit des Kontinuums) beziehen. Setzt man $f(x, y) = 0$ oder $= 1$, je nachdem (x, y) in $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ liegt, so erhält man die in der Einleitung gewählte Form der Frage.

$x = x_1$, das nicht zu X gehört. Dann gehören alle Elemente (x_1, y), für die y zu Y gehört, nicht zu $\mathfrak{P}$, sondern zu $\mathfrak{Q}$. Also hat eine Teilmenge von $\mathfrak{Q}_{x_1}$ die Mächtigkeit $\aleph_{\nu+1}$, $\mathfrak{Q}_{x_1}$ also eine Mächtigkeit $> \mathfrak{n}$, im Widerspruch zur gemachten Annahme.

Für den besonderen Fall $\nu = 0$ erhält man: Ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ die Mächtigkeit des Kontinuums, so ist eine Zerlegung der Ebene $\mathfrak{E}$ von der genannten Art möglich, wenn $\mathfrak{c} = \aleph_1$, unmöglich, wenn $\mathfrak{c} > \aleph_1$ ist.

19. Wird die Frage $(\mathrm{k_{II}})$ für den Fall $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m} = \aleph_\mu$, $\mathfrak{m}_1' = \mathfrak{m}_2' = \mathfrak{m}' = \aleph_{\mu'} \leqq \mathfrak{m}$ betrachtet, so ergibt sich: Eine Zerlegung der verlangten Art ist dann und nur dann möglich, wenn $\mu = \mu'$ ist. Man beweist das durch die gleichen Schlüsse wie in Nr. 18, wobei im Fall $\mu > \mu'$ für Y eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_{\mu'}$ zu nehmen ist.

20. Die gleichen Schlüsse gestatten aber auch, die Frage (k) für die allgemeineren Fälle $\mathfrak{m}_h = \aleph_{\mu_h}$, $\mathfrak{n}_h = \aleph_{\nu_h}$ bzw. $\mathfrak{m}_h = \aleph_{\mu_h}$, $\mathfrak{m}_h' = \aleph_{\mu_h'}$ $(h = 1, 2)$ zu beantworten, wenn wir für Fragen vom Typus $(\mathrm{k_{II}})$ den Fall, daß $\mu_1 \neq \mu_2$ und die größere μ der Ordinalzahlen μ_1, μ_2 eine Grenzzahl (Limeszahl) ist, ausschließen, desgleichen den Fall, daß $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ eine Grenzzahl, $\mu_1' \neq \mu_2'$ und die größere der Zahlen μ_1', μ_2' gleich μ ist[41]). Hierbei wird natürlich $\nu_h < \mu_h$ bzw. $\mu_h' \leqq \mu_h$ vorausgesetzt (vgl. Nr. 17). Die Antwort lautet: Eine Zerlegung, wie verlangt, ist dann und nur dann möglich, wenn $\mu_1 = \mu_2 = \nu_1 + 1 = \nu_2 + 1$, bzw. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_1' = \mu_2'$ ist. Die Fälle möglicher Zerlegungen bleiben also auf die in Nr. 18, 19 mitgeteilten beschränkt.

Sei nämlich $\mu_1 \neq \mu_2$, etwa $\mu_1 > \mu_2$, wobei nach Voraussetzung beim Problem $(\mathrm{k_{II}})$ μ_1 keine Grenzzahl sein soll und also $\mu_1 = \alpha + 1$ gesetzt werden kann. Bestünde eine Zerlegung wie verlangt, so bezeichne $\mathfrak{X}$ die Menge aller Elemente $x = x_0$, für die es einen zu $\mathfrak{P}$ gehörenden Punkt (x_0, y) gibt. Offenbar ist die Mächtigkeit von $\mathfrak{P} = \sum\limits_y \mathfrak{P}_y$, und daher auch die von $\mathfrak{X}$, $< \aleph_{\mu_1}$. [Denn für $(\mathrm{k_I})$, wo jedes $\mathfrak{P}_y$ eine Mächtigkeit $\leqq \aleph_{\nu_1}$ hat, folgt dies aus $\aleph_{\mu_2} \cdot \aleph_{\nu_1} = \mathrm{Max}(\aleph_{\mu_2}, \aleph_{\nu_1}) < \aleph_{\mu_1}$; für $(\mathrm{k_{II}})$, wo jedes $\mathfrak{P}_y$ eine Mächtigkeit $< \aleph_{\mu_1'}$ hat, aber daraus, daß eine Summe von $\aleph_{\mu_2} \leqq \aleph_\alpha$ Mächtigkeiten, alle $< \aleph_{\mu_1'} \leqq \aleph_{\mu_1}$, also alle $\leqq \aleph_\alpha$, selbst $\leqq \aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha < \aleph_{\mu_1}$ ist.] Für ein nicht zu $\mathfrak{X}$ gehörendes Element $x = x_1$, das es daher geben muß, gehören dann alle $\mathfrak{m}_2$ Elemente (x_1, y) zu $\mathfrak{Q}$, d. h. $\mathfrak{Q}_{x_1}$ hätte eine Mächtigkeit $> \mathfrak{n}_2$ (bzw. $\geqq \mathfrak{m}_2'$) gegen die Annahme.

---

[41]) Wesentlich ist dabei nur, die Fälle auszuschließen, wo die Anfangszahl ω_μ der Zahlklasse $Z(\aleph_\mu)$ singulär ist, was nur eintreten kann, wenn μ Grenzzahl ist, dann aber sicher eintritt, wenn $\omega_\mu > \mu$ ist; vgl. Hausdorff, l. c. [2]), S. 128—131. Für reguläres ω_μ aber gilt (wovon wir Gebrauch machen werden), daß $\sum\limits_y \aleph_y < \aleph_\mu$ ist, wenn die Mächtigkeit der Menge der Indizes y und jedes $\aleph_y < \aleph_\mu$ ist.

Sei andererseits $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ und etwa $\mu \geqq \nu_2 + 1 > \nu_1 + 1$ (bzw. $\mu \geqq \mu_2' > \mu_1'$). Ist dann $\mathfrak{X}$ eine Menge von Elementen x von der Mächtigkeit $\aleph_{\nu_1+1}$ (bzw. $\aleph_{\mu_1'}$) und werden $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{Y}$ wie in Nr. 16 erklärt, so gelangt man analog wie in dem dort behandelten Fall $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{m}_2' = \aleph_1$, $\mathfrak{m}_1' = \aleph_0$ zu einem Widerspruch.

21. Fragen von der Art der zuletzt behandelten treten auf, wenn man die Gültigkeit der Trennbarkeitsaxiome feststellen will bei Räumen, die ähnlich wie die Beispiele $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ nach einem der folgenden Muster konstruiert werden:

Beispiel $\mathfrak{B}_4$. Gegeben die unendlichen Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$, $\mathfrak{p}'$, wobei vorausgesetzt wird: $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_1' \leqq \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2' \leqq \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{p}' \leqq \mathfrak{p}$. Der Raum $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}_1', \mathfrak{m}_2', \mathfrak{p}')$ besteht aus zwei „$\xi\,\eta$-Ebenen" $\mathfrak{E}^{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2}$ der in Nr. 17 betrachteten Art, unterschieden als die Ebenen $\zeta = +1$ und $\zeta = -1$. Unter den Elementen η sei eines ausgezeichnet und mit $\eta = 0$ bezeichnet, die übrigen seien auf $\mathfrak{m}_1$ eineindeutig den Elementen ξ zugeordneten Klassen $\mathsf{H}(\xi)$ zu je $\mathfrak{p}$ Elementen aufgeteilt. Die Punkte (ξ, η, ζ) mit $\eta \neq 0$ heißen Nebenpunkte und werden als isoliert erklärt. Als umgebende Menge eines Hauptpunktes $x^0 = (\xi^0, 0, \zeta^0)$ werde jede Menge erklärt, in der enthalten sind: 1. x^0 und alle Punkte $\zeta = \zeta^0$, $\xi = \xi^0$ oder alle ausgenommen eine Menge von der Mächtigkeit $< \mathfrak{m}_2'$; 2. für alle zu $\mathsf{H}(\xi^0)$ gehörenden Elemente $\eta = \bar{\eta}$ — allenfalls eine Menge von einer Mächtigkeit $< \mathfrak{p}'$ ausgenommen — alle Punkte $\zeta = -\zeta^0$, $\eta = \bar{\eta}$ oder alle ausgenommen eine Menge von einer Mächtigkeit $< \mathfrak{m}_1'$.

Beispiel $\mathfrak{B}_5$. Aus dem Raum $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}_1', \mathfrak{m}_2', \mathfrak{p}')$ des vorigen Beispiels gewinnt man unter Aufrechterhaltung der Festsetzungen für $\mathfrak{R}$ einen Raum $\mathfrak{R}_* = \mathfrak{R}_*(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}_1', \mathfrak{m}_2', \mathfrak{p}', \mathfrak{m}_1^*)$ durch Hinzunahme eines Punktes x_*, wenn als $\overline{\mathfrak{U}}(x_*)$ jede x_* enthaltende Menge erklärt wird, die umgebende Menge ist von allen Hauptpunkten, oder von allen mit Ausnahme einer Menge von einer Mächtigkeit $< \mathfrak{m}_1^*$ (hierbei $\mathfrak{m}_1^*$ eine unendliche Mächtigkeit $\leqq \mathfrak{m}_1$).

Die Räume der Beispiele $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ sind nur unwesentlich von den Räumen $\mathfrak{R}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}, \aleph_0, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_0)$ und $\mathfrak{R}_*(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}, \aleph_0, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_0, \aleph_0)$ verschieden. Ferner erhält man nur unwesentlich von $\mathfrak{R}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_1, \aleph_0)$ bzw. $\mathfrak{R}_*(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_1, \aleph_0, \aleph_0)$ verschiedene Räume $\mathfrak{R}_0$ bzw. $\mathfrak{R}_{0*}$ aus Beispiel $\mathfrak{B}_2$ bzw. $\mathfrak{B}_3$, wenn man unter Aufrechterhaltung aller übrigen Festsetzungen von $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ in der Definition der $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ für einen Hauptpunkt x die Bestimmung 2. durch die folgende ersetzt:

„2_0. Für jedes $n > m$ alle Punkte der Geraden $\zeta = -\zeta_0$, $\eta = \varphi_n(\xi_0)$, höchstens *abzählbar unendlich* viele Punkte auf jeder dieser Geraden ausgenommen."

Bei Untersuchung gerade dieser letzteren Räume stößt man auf das in der Einleitung genannte ungelöste Problem (vgl. Anm. 38).

22. Nimmt man eines der Axiome (G°) oder (H°) zu den Axiomen (A°), (B°), (C°), (D°) hinzu, so erscheint in dem betreffenden Axiomensystem das Axiom (D°) als ein *Spezialfall* von (G°), bzw. (H°): beide offenen Mengen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ bestehen aus allen Punkten mit Ausnahme je eines Punktes. Es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß bei der gewählten Fassung der Axiome in keinem der Systeme das Axiom (D°) eine Folge

der übrigen Axiome ist, wie folgendes einfache Beispiel zeigt, für das (A°), (B°), (C°), (G°) und (H°), aber nicht (D°) erfüllt ist:

Beispiel $\mathfrak{B}_6$. Es besteht $\mathfrak{R}$ aus zwei Punkten und ist selbst die einzige nicht leere offene Menge [42]). Man erkennt den Grund für diese anfangs etwas paradoxe Unabhängigkeit des Axioms (D°) darin, daß (D°) zusammen mit (C°) wesentlich ist, um die Gültigkeit von Satz (d) (Nr. 2) aus dem Axiomensystem (A°), (B°), (C°), (D°) zu erschließen. Man könnte geradezu den Inhalt von Satz (d) als ein Axiom (d°) nehmen und daraus zusammen mit (A°), (B°), (C°), (G°) auf (D°) schließen. Ganz ebenso könnte man (D°) erschließen, wenn man zu $(A^\circ, B^\circ, C^\circ, G^\circ)$ die folgende Forderung an Stelle von (d°) hinzunimmt, die mit einem von L. Vietoris mit (D') bezeichneten Axiom gleichwertig ist [43]):

(d_1^0) Zu einem Punkt x und einem Punkt $y \neq x$ gibt es stets eine offene Menge, die x enthält und y nicht enthält.

23. Sei noch ein einfaches Beispiel eines alle Trennbarkeitsaxiome erfüllenden topologischen Raums angeführt, welches zeigt, daß keines der Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiome (E), (F) eine Folge der Trennbarkeitsaxiome ist [44]) (Beispiel $\mathfrak{B}_7$): $\mathfrak{R}$ bestehe aus den Punkten einer Geraden. Alle Punkte $x \neq 0$ seien „isoliert" (vgl. $\mathfrak{B}_2$, Nr. 14). Umgebende Menge des Punktes $x = 0$ sei jede Menge, die alle Punkte der Geraden höchstens mit Ausnahme endlich oder abzählbar unendlich vieler von $x = 0$ verschiedener enthält.

Das Beispiel zeigt zugleich, daß auch die Hinzunahme der Trennbarkeitsaxiome zu den Axiomen (A) bis (D) noch nicht alle seltsamen Bildungen ausschließt, denen man den Namen „Raum" nur eben im Rahmen solcher axiomatischer Untersuchungen zugestehen möchte.

24. Wir beweisen den

Satz. α) *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein metrischer* [45]) ***Raum und sind*** $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ***zwei punktfremde, nicht leere Mengen in*** $\mathfrak{R}$, ***von denen keine einen Häufungspunkt der anderen enthält, dann gibt es zueinander punktfremde Umgebungen*** $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$; β) ***das gleiche gilt, wenn*** $\mathfrak{R}$ ***ein durch einen einfachen Ordnungstypus im früher*** [45]) ***genannten Sinn dargestellter topologischer Raum ist. — Die genannten Räume erfüllen also das vierte und daher jedes der Trennbarkeitsaxiome.***

---

[42]) Vgl. auch L. Vietoris, l. c. [3]), S. 174, Beispiel für Unabhängigkeit (D') von (A), (B), (C).

[43]) l. c., S. 174; analog läßt sich das von Vietoris wie hier mit (D) bezeichnete Axiom aus seinen Axiomen (A), (B), (C), (E) zusammen mit (D') folgern.

[44]) Bezüglich des Trennbarkeitsaxioms (G°), bzw. (G^2) vgl. auch Vietoris, l. c., S. 175, Anm. 6.

[45]) Vgl. [31]), bzw. [32]). Satz α) findet sich bereits — im Rahmen von Untersuchungen über euklidische Räume — bei Hausdorff, l. c. [2]), S. 335 bewiesen, im wesentlichen auf die gleiche für beliebige metrische Räume anwendbare Weise wie oben.

Beweis von α). Sei $0 < c < \frac{1}{2}$. Jeder Punkt x von $\mathfrak{A}$ hat einen Abstand $\varrho(x, \mathfrak{B}) > 0$ von $\mathfrak{B}$. Bezeichnet $\mathfrak{U}(x; \varrho)$ die (offene) Menge aller Punkte y, für die $\overline{xy} < \varrho$ ist, so werde $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ gleich der (gleichfalls offenen) Vereinigung der für alle x gebildeten Mengen $\mathfrak{U}(x; c\varrho(x, \mathfrak{B}))$ genommen. Ganz ebenso werde $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ gebildet. Wäre dann z ein $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ gemeinsamer Punkt und x ein Punkt von $\mathfrak{A}$, y ein Punkt von $\mathfrak{B}$, so daß z in $\mathfrak{U}(x; c\varrho(x, \mathfrak{B}))$ und in $\mathfrak{U}(y; c\varrho(y, \mathfrak{A}))$ liegt, so wäre $\overline{xz} + \overline{yz} < c\varrho(x, \mathfrak{B}) + c\varrho(y, \mathfrak{A})$, was der aus $\overline{xz} + \overline{yz} \geqq \overline{xy} \geqq \varrho(x, \mathfrak{B})$ bzw. $\varrho(y, \mathfrak{A})$ folgenden Ungleichung $\overline{xz} + \overline{yz} \geqq \frac{1}{2}(\varrho(x, \mathfrak{B}) + \varrho(y, \mathfrak{A}))$ widerspricht. In dem Sonderfall, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeschlossen sind, also einen Abstand $\varrho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) > 0$ haben, kann man den Beweis offenbar noch einfacher führen.

Beweis von β) (unter Verwendung des Auswahlpostulates). Mit $\mathfrak{N}$ werde die (unter Umständen leere) Menge $\mathfrak{R} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ bezeichnet. Es kann Paare x, y von Elementen geben, so daß x zu $\mathfrak{A}$, y zu $\mathfrak{B}$ gehört, so daß ferner die Menge $\mathfrak{J}$ aller Elemente zwischen x und y zu $\mathfrak{N}$ gehört und daß sowohl x als y Häufungselement von $\mathfrak{J}$ sind. Eine solche Menge $\mathfrak{J}$ heiße ein „neutrales Intervall". Dann denken wir in jedem neutralen Intervall zwei Elemente n_x, n_y so gewählt, daß die Anordnung $x < n_x < n_y < y$ bzw. $y < n_y < n_x < x$ gilt. Zu jedem Element x von $\mathfrak{A}$ bestimmen wir nun eine Menge $\mathfrak{V}^+(x)$ und unterscheiden hierzu bezüglich der Menge $\mathfrak{X}^+$ der Punkte $> x$ die Fälle: a) $\mathfrak{X}^+$ enthält ein Element y, so daß $x < z < y$ ein neutrales Intervall ist. Wir setzen dann $\mathfrak{V}^+(x)$ gleich der Menge aller Elemente z, für die $x \leqq z < n_x$ gilt; b) x ist Häufungselement des Durchschnitts $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{X}^+$ von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{X}^+$, aber nicht des Durchschnitts $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X}^+$ und es liegt nicht Fall a) vor. Wir wählen ein Element n_1 von $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{X}^+$, so daß jedes Element z zwischen n_1 und x zu $\mathfrak{N}$ gehört und setzen $\mathfrak{V}^+(x)$ gleich der Menge aller Elemente z, für die $x \leqq z < n_1$ gilt; c) x ist Häufungselement des Durchschnittes $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X}^+$; wir wählen ein Element x_1 von $\mathfrak{A}\mathfrak{X}^+$, so daß es kein Element y von $\mathfrak{B}$ gibt, für das $x < y < x_1$ gilt, und setzen $\mathfrak{V}^+(x)$ gleich der Menge aller Elemente z, für die $x \leqq z < x_1$ gilt; d) x ist nicht Häufungselement von $\mathfrak{X}^+$, d. h. es gibt ein kleinstes Element von $\mathfrak{X}^+$ oder $\mathfrak{X}^+$ ist leer und x ist das größte Element in $\mathfrak{R}$. Wir setzen dann $\mathfrak{V}^+(x) = \{x\}$. Analog werde $\mathfrak{V}^-(x)$ bezüglich der Menge $\mathfrak{X}^-$ der Elemente $< x$ definiert und $\mathfrak{V}(x)$ gleich der Vereinigung $\mathfrak{V}^+(x) \dotplus \mathfrak{V}^-(x)$, ferner $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ gleich der Vereinigung der für alle x von $\mathfrak{A}$ gebildeten $\mathfrak{V}(x)$ gesetzt und analog $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ definiert. Hätten nun $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ einen Punkt z gemein, so müßte z sowohl einer $\mathfrak{V}(x)$ als einer $\mathfrak{V}(y)$, etwa $\mathfrak{V}(x_0)$ und $\mathfrak{V}(y_0)$ angehören. Sei beispielsweise $x_0 < y_0$. Da kein $\mathfrak{V}(x)$ ein Element y und kein $\mathfrak{V}(y)$ ein Element x enthält, muß $z = n_0$ zu $\mathfrak{N}$ gehören und es muß zwei Elemente z_1, z_2 in der Anordnung $x_0 < z_1 < n_0 < z_2 < y_0$ geben, so daß $\mathfrak{B}^+(x_0)$ durch $x_0 \leqq z < z_2$ und $\mathfrak{B}^-(y_0)$ durch $z_1 < z \leqq y_0$ gegeben ist. Nach der Art der Definition der $\mathfrak{B}^+(x)$ kann z_2 nicht zu $\mathfrak{B}$ und als Element von $\mathfrak{B}(y_0)$ nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören; es ist also z_2 und analog z_1 zu $\mathfrak{N}$ gehörig. Für $\mathfrak{B}^+(x_0)$ liegt daher keiner der Fälle c), d), sondern a) oder b) vor; daher gehören alle Elemente z, für die $x_0 < z < z_2$ ist, zu $\mathfrak{N}$, desgleichen analog alle, für die $z_1 < z < y_0$ ist; es ist also $x_0 < z < y_0$ ein neutrales Intervall, d. h. für $\mathfrak{B}^+(x_0)$ liegt Fall a) vor und es ist $z_2 = n_x$, analog $z_1 = n_y$ und $n_y = z_1 < z_2 = n_x$ im Widerspruch mit unseren Festsetzungen. $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{B})$ sind also punktfremd, wie behauptet.

[Zusatz bei der Korrektur: Über mir nicht zugängliche Literatur der letzten Zeit verdanke ich der Freundlichkeit von Herrn Hellmuth Kneser (Göttingen) eine Reihe kurzer Mitteilungen, denen ich entnehme, daß insbesondere in amerikanischen Zeitschriften Untersuchungen von M. Fréchet und E. W. Chittenden erschienen sind, die Axiomensysteme für allgemeine topologische Räume („classes") und ihre gegenseitigen Zusammenhänge zum Gegenstand haben und mit denen die vorstehenden Überlegungen manche Berührungspunkte aufweisen.]

Erlangen, 29. Mai 1922.

(Eingegangen am 1. 6. 1922.)

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

Der von Herrn Hofrat Dr. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften" ist in diesem Jahre durch das Preisgericht Herrn Professor Dr. Paul Koebe in Jena für seine drei Abhandlungen „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven" in den Mathematischen Annalen I. **67** (1909), II. **69** (1910), III. **72** (1912) zuerkannt worden.