Inventiones math. 47, 139 – 147 (1978)

Inventiones mathematicae

Singularites rationnelles et deformations

Renée Elkik

Université de Paris-Sud, Mathématique Bâtiment 425, Centre d'Orsay, F-91405 Orsay Cédex, France

Le but de cet article est d'étudier le comportement, par déformations, des singularités rationnelles et d'invariants numériques de singularités isolées.

Les schémas considérés seront toujours supposés de type fini sur un corps k de caractéristique zéro.

On établit les résultats suivants:

– Toute déformation d'une singularité rationnelle est une singularité rationnelle (Théorème IV).

– Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme plat dont la base et les fibres sont à singularités rationnelles. Alors X est à singularités rationnelles (Théorème V).

– Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme plat de dimension relative d, à lieu singulier fini et à fibres normales. Pour tout point s de S soit $X'_s \xrightarrow{\varphi_s} X_s$ une désingularisation de la fibre X_s. On définit les caractéristiques d'Euler-Poincaré partielles suivantes:

$$\chi_i(X_s) = \sum_{j=0}^{d-i-1} (-1)^j \lg_{k(s)} R^{d-j-i} \varphi_{s*} O_{X'_s} \qquad i \in [1, d-1].$$

En particulier on a:

$$\chi_1(X_s) = \lg R^{d-1} \varphi_{s*} O_{X'_s} - \lg R^{d-2} \varphi_{s*} O_{X'_s} + \cdots + (-1)^{d-2} \lg R^1 \varphi_{s*} O_{X'_s},$$

$$\chi_{d-1}(X_s) = \lg R^1 \varphi_{s*} O_{X'_s}.$$

Ces nombres sont indépendants de la résolution $X'_s \xrightarrow{\varphi_s} X_s$ choisie et on démontre que les fonctions $s \to \chi_i(X_s)$ sont semi continues supérieurement sur S (Théorème I).

I. Notations – Quelques rappels

Si S est un schéma on désigne par O_S son faisceau structural, par $O_{S,s}$, l'anneau local d'un point s de S, par $k(s)$ le corps résiduel en ce point. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de O_S modules on note $\mathscr{F}_s$ le $O_{S,s}$ module $\mathscr{F} \otimes_{O_s} O_{S,s}$ et X_s la fibre $X \times_S \operatorname{Spec} k(s)$ d'un

0020-9910/78/0047/0139/$1.80

S-schéma X. On identifie quand cela est utile un faisceau $\mathscr{F}$ à un complexe dont l'unique terme non nul est $\mathscr{F}$ placé en degré 0 et si $K^{\cdot}$ est un complexe on désigne par $K^{\cdot}[n]$, $n\in\mathbb{Z}$, le complexe obtenu à partir de $K^{\cdot}$ par translation de n vers la gauche. On écrira souvent K^i pour $H^i(K^{\cdot})$. Si $X\xrightarrow{f}Y$ est un morphisme de schémas, on note $Lf^*: D^+(Y)\to D^+(X)$ le morphisme dérivé de f^*, ([H]).

Complexe dualisant

Soit $X\xrightarrow{f}S$ un morphisme de k-schémas de type fini. On peut définir dans $D^+(X)$ un complexe dualisant relatif noté $\omega^{\cdot}_{X/S}$ ($f^!(O_S)$ avec les notations de [H]), dont on utilisera la propriété suivante:

Soit $X'\xrightarrow{\varphi}X$ un S-morphisme projectif. Pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur X' on a dans $D^+(X)$

$$R\varphi_*\,\underline{R\,\mathrm{Hom}}_{X'}(\mathscr{F},\omega^{\cdot}_{X'/S})=\underline{R\,\mathrm{Hom}}_X(R\varphi_*\mathscr{F},\omega^{\cdot}_{X/S})$$

([H], chap. III). Si X est plongé dans un schéma Z lisse sur S, de dimension relative n, et si $\omega_{Z/S}$ désigne la puissance extérieure maximale du module des différentielles relatives de Z sur S on a: $\omega^{\cdot}_{X/S}=\underline{R\,\mathrm{Hom}}_Z(O_X,\omega_{Z/S}[n])$.

Supposons maintenant X et S quasi projectifs et f plat équidimensionnel de dimension d. On peut alors représenter $\omega^{\cdot}_{X/S}$ par un complexe borné de O_X modules cohérents et S plats concentré en degré $[-d,0]$ (i.e. $\omega^{\cdot}_{X/S}$ est de Tor dimension finie sur S, d'amplitude $[-d,0]$ [SGA VI]). Son homologie est concentrée en degré $-d$ si et seulement si f est de Cohen-Macaulay. On désigne alors par $\omega_{X/S}$ cet unique faisceau d'homologie c'est-à-dire qu'on a:

$$\omega^{\cdot}_{X/S}=\omega_{X/S}[d].$$

Pour tout morphisme $T\xrightarrow{h}S$ le complexe dualisant relatif de $X\times_S T$ sur T est égal à $Lh^*\omega^{\cdot}_{X/S}$. Lorsque S est le spectre d'un corps, on écrit $\omega^{\cdot}_X$ pour $\omega^{\cdot}_{X/S}$. Dans ce cas et plus généralement lorsque S est Gorenstein, $\omega^{\cdot}_{X/S}$ est un objet dualisant de $D^+(X)$.

II. Désingularisation et complexe Dualisant

Soit X un k-schéma de type fini. On dit que $X'\xrightarrow{\varphi}X$ est une désingularisation de X si φ est un morphisme projectif birationnel et si X' est lisse sur k. (On suppose toujours qu'un ouvert dense de X est réduit.) Supposons X équidimensionnel de dimension d. Le théorème de dualité ([H. chap. III]) permet d'écrire dans $D^+(X)$:

$$R^{\cdot}\varphi_*\,\omega_{X'}[d]=\underline{R\,\mathrm{Hom}}_X(R^{\cdot}\varphi_*\,O_{X'},\omega^{\cdot}_X).$$

Les complexes $R^{\cdot}\varphi_*\,O_{X'}$, et $R^{\cdot}\varphi_X\omega_{X'}$ ne dépendent que de X et non de la résolution choisie $X'\xrightarrow{\varphi}X$ [Hi]. De plus Grauert et Riemenschneider ont montré [G.R.] que $R^i\varphi_*\,\omega_{X'}=0$, $\forall i>0$.

On a donc: $\varphi_* \omega_{X'}[d] = \underline{R\,\mathrm{Hom}}_X(R^{\cdot}\varphi_* O_{X'}, \omega^{\cdot}_X)$.

Soit $j: \varphi_* \omega_{X'}[d] \to \omega^{\cdot}_X$, la flèche duale de l'application naturelle $i: O_X \to R^{\cdot}\varphi_* O_{X'}$ et soit $M^{\cdot}_X$ (resp. $N^{\cdot}_X$) le troisième sommet du triangle construit sur i (resp. j).

On a:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M^{\cdot}_X \arrow[dl, "+1"'] & \\ O_X \arrow[rr] & & R^{\cdot}\varphi_* O_X \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & N^{\cdot}_X \arrow[dl, "+1"'] & \\ \varphi_* \omega^{\cdot}_X[d] \arrow[rr] & & \omega^{\cdot}_X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

On déduit du Théorème de Dualité $N^{\cdot}_X = \underline{R\,\mathrm{Hom}}_X(M^{\cdot}_X, \omega^{\cdot}_X)$ et, puisque $\omega^{\cdot}_X$ est dualisant, $M^{\cdot}_X = \underline{R\,\mathrm{Hom}}_X(N^{\cdot}_X, \omega^{\cdot}_X)$. L'homologie de ces complexes est à support dans le lieu singulier de X. On a $N^i_X = 0$ pour $i < -d$ ou $i > -\mathrm{prof}\, X$, $N^i_X = \omega^i_X$ $i \in [-d+1, \ -\mathrm{prof}\, X]$ et $N^{-d}_X = \mathrm{coker}\, \varphi_* \omega_{X'} \to \omega^{-d}_X$. $M^i_X = 0$ pour $i < -1$ ou $i > d-1$, $M^{-1}_X = \ker O_X \to O_{X_{\mathrm{red}}}$, $M^0_X = \tilde{O}_{X/O_X}$ où $O_{\tilde{X}}$ est la normalisation de O_X, $M^i_X = R^i \varphi_* O_{X'}$ pour $i > 0$ [1].

Quelques exemples

1) Singularités rationnelles

La définition suivante est due à Kempf [T.E., chap. I § 3].

Définition. On dit que X a une singularité rationnelle en un point x (ou que x est une singularité rationnelle de X) si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée:

a) $M^{\cdot}_{X,x} = 0$,

b) $N^{\cdot}_{X,x} = 0$.

Ceci implique en particulier que l'anneau local $O_{X,x}$ est normal et Cohen-Macaulay.

L'ensemble des singularités rationnelles de X est un ouvert de X. On dira que X est à singularités rationnelles s'il en est ainsi en tout point.

2) Supposons X de Cohen-Macaulay

L'homologic de $N^{\cdot}_X$ est alors concentrée en degré $-d$ et est égale à $H_X = \mathrm{coker}$ $(\varphi_* \omega_{X'} \to \omega_X)$. On a alors $M^i_X = \mathrm{Ext}^{i+1}(H_X, \omega_X)$, $\forall i \geqq 0$.

De manière générale, on désignera par H_X le conoyau $\varphi_* \omega_{X'} \to \omega^{-d}_X$ c'est-à-dire N^{-d}_X et par $N'^{\cdot}_X$ le sommet du triangle:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & N'^{\cdot}_X \arrow[dl, dash, "+1"'] & \\ H_X[d] \arrow[rr] & & N^{\cdot}_X . \arrow[ul, dash] \end{tikzcd}$$

Ce dernier complexe est connu sans références a une désingularisation de X.

On en déduit par application de $\underline{R\mathrm{Hom}}_X(.,\omega_X^{\cdot})$ une longue suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Ext}^0(N'^{\cdot},\omega_X^{\cdot}) \to M_X^{-1} \to \mathrm{Ext}^0(H,\omega_X^{\cdot}) \to \mathrm{Ext}^1(N'^{\cdot},\omega_X^{\cdot}) \to M_X^0,$$
$$\mathrm{Ext}^1(H_X,\omega_X^{\cdot}) \to \cdots \to M_X^{d-1} \to \mathrm{Ext}^d(H_X,\omega_X) \to 0$$

($\mathrm{Ext}^0(M,\omega_X^{\cdot})$ est toujours nul).

Dans le cas particulier où X présente une singularité isolée x tous les complexes considérés ont une homologie à support dans ce point. Si I est une enveloppe injective du corps résiduel de $O_{X,x}$ on a pour tout faisceau $\mathscr{F}$ à support x:

$$\underline{R\mathrm{Hom}}_X(\mathscr{F},\omega_X^{\cdot}) = \underline{\mathrm{Ext}}^d(\mathscr{F},\omega_X^{\cdot}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{O_X}(\mathscr{F},I).$$

Et la suite exacte précédente se réduit à:

$$M_X^i = \mathrm{Hom}(N'^{-i-1},I) \qquad i\in[-1,d-2]$$
$$M_X^{d-1} = \mathrm{Hom}(H_X,I).$$

3) Lorsque X est Cohen-Macaulay en dehors d'un fermé F fini sur k, les faisceaux $\omega_X^i = N_X'^i$ sont, pour $i > -d$, de longueur finie sur k et on peut définir les caractéristiques d'Euler-Poincaré partielles suivantes:

$$\chi_i(X) = \sum_{j\geqq 0} (-1)^j \lg_k N_X'^{i+j-d} \qquad i\in[1,d].$$

Si de plus les singularités de X sont à support dans F on définit

$$\psi_i(X) = \sum_{j=0}^{d-i} (-1)^j \lg_k M_X^{d-j-i-1} \qquad i\in[0,d]$$

et

$$\chi_0(X) = \lg_X H_X - \chi_1(X).$$

Des dualités énoncées au paragraphe précédent il résulte que

$$\lg_k N_X^{-i-1} = \lg_k M_X^i$$

et donc

$$\chi_i(X) = \psi_i(X) \qquad \forall i\in[0,d].$$

On démontrera dans la suite (Théorème I) que les différentes fonctions introduites ici varient semi-continûment supérieurement si X varie dans une famille plate.

III. Déformations de singularités isolées. Semi-Continuité des caractéristiques d'Euler-Poincaré

Lemme 1. *Soient R un anneau de valuation discrète essentiellement de type fini sur k, s le point fermé de* Spec R *et $X \xrightarrow{f} S = \mathrm{Spec}\, R$ un morphisme plat equidimensionnel de dimension d. On désigne par j: $X_s \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle. Soient $X' \xrightarrow{\varphi} X$ une désingularisation de X et $Z \xrightarrow{\psi} X_s$ une désingularisation de X_s. Alors*

i) *il existe une flèche injective naturelle:* $\psi_* \omega_Z \to \varphi_* \omega_{X'_s}$ *telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \psi_* \omega_Z[d] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \varphi_* \omega_{X'_s}[d] \arrow[dl] \\ & \omega^\cdot_{X_s} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif;

ii) *il existe dans* $D^+(X_s)$ *un morphisme naturel* $\gamma: N^\cdot_{X_s} \to Lj^* N'_X$ *tel que le sommet du triangle construit sur* γ *ait un unique terme d'homologie en degré* $-d-1$.

Puisque S est local régulier $\omega^\cdot_X$ (resp. $\omega^\cdot_{X'}$) est égal à $\omega^\cdot_{X/S}$ (resp. $\omega^\cdot_{X'/S}$) et $\omega^\cdot_{X_s} = Lj^* \omega^\cdot_X$. Si t est une uniformisante de R on a une suite exacte $0 \to \omega_{X'} \xrightarrow{t} \omega_{X'} \to \omega_{X'_s} \to 0$ et par [G.R] $R^\cdot \varphi_* \omega_{X'_s} = \varphi_* \omega_{X'_s} = \varphi_* \omega_{X'} | t \varphi_* \omega_{X'}$.

Ce module est indépendant de la résolution X' de X choisie. Quitte à modifier X' on peut supposer que le transformé strict de X_s dans X' est une désingularisation de X_s $[H_i]$, et donc se limiter au cas où Z est une réunion de composantes irréductibles de X'_s.

ω_Z est alors un sous-faisceau de $\omega_{X'_s}$ défini par $\omega_Z = \underline{\mathrm{Hom}}_{X'_s}(O_Z, \omega_{X'_s})$ et le lemme résulte de cette inclusion $\omega_Z \hookrightarrow \omega_{X'_s}$.

Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme plat équidimensionnel de dimension relative d de k-schémas quasi-projectifs. On dit que $X' \xrightarrow{\varphi} X$ est une désingularisation simultanée de X sur S si φ est projectif si $f \circ \varphi$ est plat et si pour tout s dans S, X'_s est une désingularisation de X_s. On étend à cette situation les définitions du paragraphe précédent:

On a $R^i \varphi_* (\omega_{X'/S} \underset{O_S}{\otimes} k(s)) = 0$ $\forall i > 0$, $\forall s \in S$ [G.R] et donc $R^i \varphi_* \omega_{X'/S} = 0$ $\forall i > 0$ et $\varphi_* (\omega_{X'/S} \underset{O_S}{\otimes} k(s)) = \varphi_* \omega_{X'/S} \underset{O_S}{\otimes} k(s)$. Le Théorème de Dualité appliqué à φ s'écrit donc:

$$\varphi_* \omega_{X'/S}[d] = \underline{R\mathrm{Hom}}_X(R^\cdot \varphi_* O_{X'}, \omega^\cdot_{X/S}).$$

On désigne par $M^\cdot_{X/S}$ le troisième sommet du triangle construit sur $i: O_X \to R^\cdot \varphi_* O_{X'}$ et on en déduit par application de $\underline{R\mathrm{Hom}}_X(., \omega^\cdot_{X/S})$ le triangle

$$\begin{tikzcd} & N^\cdot_{X/S} \arrow[dl, "+1"'] & \\ \varphi_* \omega_{X'/S}[d] \arrow[rr] & & \omega^\cdot_{X/S} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

où $N^\cdot_{X/S} = \underline{R\mathrm{Hom}}_X(M^\cdot_{X/S}, \omega^\cdot_{X/S})$.

Si j_s est l'inclusion $X_s \hookrightarrow X$ on a

$$L^*_{j_s} M^\cdot_{X/S} = M^\cdot_{X_s}, \qquad L^*_{j_s} N^\cdot_{X/S} = N^\cdot_{X_s} \quad [1].$$

Lemme 2. *Sous les hypothèses précédentes, il existe sur* X *un complexe borné de* O_X *modules cohérents et* S *plats* $\mathscr{M}^\cdot$ (*resp.* $\mathscr{N}^\cdot$) *concentré en degré* $[-1, d-1]$ (*resp.* $[-d, 0]$) *tel que pour tout* s *dans* S *le complexe* $\mathscr{M}^\cdot \underset{O_S}{\otimes} k(s)$ (*resp.* $\mathscr{N}^\cdot \underset{O_S}{\otimes} k(s)$) *soit quasi-isomorphe à* $M^\cdot_{X_s}$ (*resp.* $N^\cdot_{X_s}$).

En effet les objets $M^{\cdot}_{X/S}$ et $N^{\cdot}_{X/S}$ sont comme O_X, $\omega^{\cdot}_{X/S}$, $\varphi_* \omega_{X'/S}$ et $R^{\cdot}\varphi_* O_{X'}$ de Tor-dimension finie sur S et il est clair que l'amplitude est celle indiquée dans l'énoncé.

Lemme 3. *Sous les hypothèses précédentes supposons de plus f à lieu singulier relatif fini. Les fonctions $s \to \lg_{k(s)} N^i_{X_s}$ $i \in [-d, 0]$ et $s \to \chi_i(X_s)$ $i \in [0, d]$ sont semi continues supérieurement sur S (c'est-à-dire constructible et ne pouvant que croitre par spécialisation). La fonction $\chi_0(X_s)$ est constante.*

Les groupes d'homologie et caractéristiques d'Euler-Poincaré considérés sont égaux à ceux de $Rf_* N^{\cdot}_{X/S}$ qui est quasi isomorphe à un complexe borné de O_S-modules localement libres de type fini.

Théorème 1. *Soit f: $X \to S$ un morphisme plat equidimensionnel de dimension relative d de k-schémas quasi-projectifs.*

1) *Supposons f de Cohen-Macaulay en dehors d'un fermé F fini sur S alors les fonctions $s \to \lg_{k(s)} \omega^i_{X_s}$ $i \in [-d+1, 0]$ et $s \to \chi_i(X_s)$ $i \in [1, d]$ sont semi-continues supérieurement sur S.*

2) *Supposons X lisse sur S en dehors de F alors les fonctions*

$$s \to \lg_{k(s)} N^i_{X_s} \quad i \in [-d, 0],$$
$$s \to \chi_i(X_s) \quad i \in [0, d]$$

sont semi-continues supérieurement sur S.

1) Quitte à localiser S pour la topologie étale et X au voisinage de F on peut supposer f affine, de sorte que le foncteur Rf_* conserve l'homologie des complexes. Le complexe $Rf_* \omega^{\cdot}_{X/S}$ est de Tor-dimension finie d'amplitude $[-d, 0]$ et son homologie en degré $\geqq -d+1$ est cohérente sur S. Il existe donc un complexe $L^{\cdot}$: $0 \to L^{-d} \to L^{-d+1} \to \cdots L^0 \to 0$ de O_S-modules plats, quasi isomorphe à $Rf_* \omega^{\cdot}_{X/S}$, tel que L^i soit cohérent pour tout $i > -d+1$ et dont l'homologie est universellement ω^i_X [SGA VI, chap. I, 5]. L'assertion 1 en résulte.

2) Supposons S réduit et soit X' une désingularisation de l'espace total X. Il existe un ouvert lisse de S au-dessus duquel X' est une résolution simultanée de X et la semi continuité des fonctions considérées sur cet ouvert est établie dans le lemme précédent. Il suffit donc pour compléter la démonstration du théorème de montrer que les χ_i sont des fonctions croissantes par spécialisation. Le théorème est donc conséquence du lemme suivant:

Lemme 4. *Soit $S = \operatorname{Spec} R$ le spectre d'un anneau de valuation discrète essentiellement de type fini sur k de point fermé s et de point générique η. Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme plat de type fini, de dimension d, et à lieu singulier relatif fini. On a alors:*

$$\lg_{k(s)} N^i_{X_s} \geqq \lg_{k(\eta)} N^i_{X_\eta} \quad \forall i \geqq -d,$$
$$\chi_i(X_s) \geqq \chi_i(X_\eta) \quad \forall i \geqq 0.$$

C'est une conséquence facile du lemme 1:

Désignons par j_s (resp. j_η) l'inclusion $X_s \to X$ (resp. $X_\eta \to X$). Les modules d'homologie et caractéristiques d'Euler-Poincaré considérées sont égales à celles des complexes $R^{\cdot}f_{\eta *} N^{\cdot}_{X_\eta} = (R^{\cdot}f_* N^{\cdot}_X)_\eta$ et $R^{\cdot}f_* N^{\cdot}_{X_s}$. $R^{\cdot}f_* N^{\cdot}_X$ est quasi-isomorphe à un complexe parfait de S modules et d'après le lemme 1 il existe un morphisme canonique $Rf_* N^{\cdot}_{X_s} \to Rf_* Lj_s^* N^{\cdot}_X$ qui induit un isomorphisme sur l'homologie en degré $i > -d$ et une surjection en degré $-d$.

Corollaire 1. *Soit A une k algèbre locale essentiellement de type fini équidimensionnelle de dimension d. Pour que A admette une déformation lisse il faut que l'on ait* $\chi_i(\operatorname{Spec} A) \geqq 0$, $i \in [0, d]$.

Pour qu'il existe une déformation lisse de A admettant une résolution simultanée il faut que l'on ait $\chi_0(A) = 0$. *En particulier si A est de plus Cohen-Macaulay il faut que A soit à singularités rationnelles.*

C'est clair.

Exemples. Soient X une variété projective lisse, $\mathscr{L}$ un faisceau très ample sur X et $C = \operatorname{Spec} \bigoplus_{n \geqq 0} H^0(\mathscr{L}^{\otimes n})$). Soit $V = \operatorname{Spec} \operatorname{Sym} \mathscr{L}$ le fibré vectoriel sur X associé à $\mathscr{L}$ le morphisme naturel $\varphi: V \to C$ est une désingularisation de C. On a: $R^i \varphi_* O_v = \bigoplus_{n \geqq 0} H^i(\mathscr{L}^{\otimes n})$. Le lemme précédent donne des conditions nécessaires sur la dimension de ces H^i pour que C admette une déformation lisse. Soit par exemple E une courbe lisse de genre $g \geqq 1$, $\mathscr{E}$ un faisceau localement libre de rang 2 sur E et prenons $X = \mathbb{P}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\pi} E$, le fibré projectif sur X associé à $\mathscr{E}$. On a $H^1(O_X) = H^1(O_E) \neq 0$. Soit $O_X(1)$ le faisceau inversible canonique sur X et $\mathscr{H}$ un faisceau suffisamment ample sur E. Soit $\mathscr{L}$ un multiple suffisamment grand de $f^* \mathscr{H} \otimes O_X(1)$ pour que $\mathscr{L}$ soit très ample sur X. Le cône $C = \operatorname{Spec} \bigoplus_{n \geqq 0} H^0(\mathscr{L}^{\otimes n})$ n'est pas lissifiable. En effet on a $H^2(X, \mathscr{L}^{\otimes n}) = H^2(E, \pi_* \mathscr{L}^{\otimes n}) = 0 \; \forall n$ et $\bigoplus_{n \geqq 0} H^1(X, \mathscr{L}^{\otimes n}) \neq 0$ puisque $H^1(O_X)$ est lui-même non nul. On a donc $\lg_k R^2 \varphi_* O_V - \lg_k R^1 \varphi_* O_V < 0$.

IV. Déformations de singularités rationnelles

Théorème 2. *Soit* $X \xrightarrow{f} S$ *un morphisme plat de k-schémas de type fini. Soit s un point lisse de S et x une singularité rationnelle de* X_s. *Alors X a une singularité rationnelle en x.*

L'idée de la démonstration est voisine de celle du lemme 1.

Quitte à se restreindre à un voisinage de x on peut supposer X (normal et) Cohen-Macaulay. Il reste à montrer que $H_{X,x}$ est nul c'est-à-dire que si $X' \xrightarrow{\varphi} X$ est une désingularisation de X l'homomorphisme $\varphi_* \omega_{X'} \to \omega_X$ est surjectif.

On peut supposer que S est le spectre d'un anneau R local régulier de dimension n et raisonner par récurrence sur n. Soit donc t un paramètre régulier de R et supposons que $X_t = X \times_S \operatorname{Spec} R/tR$ a une singularité rationnelle en x. Soit $X' \xrightarrow{\varphi} X$ une désingularisation de X, $X'_t = X \times_S \operatorname{Spec} R/tR$ est un diviseur de X'. Quitte à modifier X' on peut supposer que la composante irréductible de X'_t qui s'envoie birationnellement sur X_t est une désingularisation de X_t [Hi]. Soit X'_1 cette composante. On a sur X (resp. X') les suites exactes:

$$0 \to \omega_X \xrightarrow{t} \omega_X \to \omega_{X_t} \to 0$$

(resp. $0 \to \omega_{X'} \xrightarrow{t} \omega_{X'} \to \omega_{X'_t} \to 0$).

D'autre part $\omega_{X'_1}$ est un sous-faisceau de $\omega_{X'_t}$ défini par

$\omega_{X'_1} = \mathrm{Hom}_{O X'_t}(O_{X'_1}, \omega_{X'_t})$.

Par application de φ_* on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & & \varphi_*\,\omega_{X'_1} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \varphi_*\,\omega_{X'} \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \varphi_*\,\omega_{X'} \arrow[r] \arrow[d] & \varphi_*\,\omega_{X'_t} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_X \arrow[r, "t"] & \omega_X \arrow[r] & \omega_{X_t} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel la 1ère suite horizontale est exacte par [G.R.].

Par hypothèse $\varphi_*\,\omega_{X'_1} \to \omega_{X_t}$ est un isomorphisme au voisinage de x. Les applications $\varphi_*\,\omega_{X'_t} \to \omega_{X_t}$ et $\varphi_*\,\omega_{X'} \to \omega_X$ sont donc surjectives au voisinage de x.

Théorème 3. *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme plat de k-schémas de type fini, s un point lisse de S et x un point de X_s. Supposons que X admette une résolution simultanée sur S au voisinage de x. Alors x est une singularité rationnelle de X si et seulement si c'est une singularité rationnelle de X_S.*

Compte-tenu du théorème 2 il suffit de démontrer le »seulement si«.

Soit $X' \xrightarrow{\varphi} X$ une résolution simultanée. La lissité de S en s implique qu'on a au voisinage de s $\omega_{X'} = \omega_{X'/S}$ et $\omega_X = \omega_{X/S}$.

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\varphi_*\,\omega_{X'} \arrow[r] \arrow[d] & \varphi_*\,\omega_{X'_S} = \varphi_*\,\omega_{X'} \underset{O_S}{\otimes} k(s) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\omega_X \arrow[r] & \omega_{X_S} = \omega_X \underset{O_S}{\otimes} k(s) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Il est clair que les deux flèches verticales sont simultanément des isomorphismes au voisinage de x.

Théoréme 4. *Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme plat de k-schémas de type fini. L'ensemble des points x de X où $X_{f(x)}$ est à singularité rationnelle est ouvert dans X.*

Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble de points considéré. Il résulte du théorème 2 que $\mathscr{U}$ est stable par générisation. En effet soit x un point de $\mathscr{U}$ d'image s et x' une générisation de x d'image s' dans S. On peut supposer s' différent de s. Soit R un anneau de valuation discrète essentiellement de type fini de $k(s')$ dominant l'anneau local de s dans l'adhérence de s'. Il résulte du théorème 2 après le changement de base $\operatorname{Spec} R \to S$ que x' est une singularité rationnelle de $X_{S'}$.

De plus $\mathscr{U}$ est constructible. En effet il existe un ouvert V non vide de S lisse sur k (quitte à réduire S) au-dessus duquel X admet une résolution simultanée.

$\mathscr{U} \cap f^{-1}(V)$ est l'ensemble des singularités rationnelles de $f^{-1}(V)$ d'après le théorème 3, et est donc ouvert.

Théorème 5. *Avec les notations précédentes supposons que s soit une singularité rationnelle de S et soit x une singularité rationnelle de X_s. Alors x est une singularité rationnelle de X.*

Quitte à se restreindre à un voisinage de s et de x on peut supposer grâce au théorème précédent que S et les fibres de f sont à singularités rationnelles.

On montre qu'il en est de même de l'espace total X.

Soit $S' \xrightarrow{\varphi} S$ une désingularisation de S, $X' = X \underset{S}{\times} S'$ et ψ: $Y \to X'$ une désingularisation de X' (donc de X). Soit:

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "\varphi'"'] \arrow[d, dash, "f'"] & Y \arrow[l, "\psi"'] \\ S \arrow[u, dash, "f"] & S' \arrow[l, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

le diagramme obtenu.

D'après le théorème 2, X' est à singularités rationnelles, on a donc $R^{\cdot}\psi_* O_Y = O_{X'}$.

Par hypothèse sur S, $R^{\cdot}\varphi_* O_{S'} = O_S$ et on en déduit par changement de base plat $R^{\cdot}\varphi'_* O_{X'} = O_X$ et donc $R^{\cdot}(\varphi' \circ \psi)_* O_Y = O_X$.

Bibliographie

G.R Grauert, H., Riemenschneider, O.: Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. Inventiones Math. **11**, 263–292 (1970)

H Hartshorne, R.: Residues and Duality. Springer Lecture Notes N° 20. 1968

Hi Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II. Annals of Math. **79** (1964)

SGA VI Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch. Lecture Notes n° 225

T.E Toroidal Embeddings I. Springer Lecture Notes n° 339 (1973)

R Riemenschneider, O.: Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen). Math. Ann. **209**, 211–248 (1974)

Reçu le 6 décembre 1977