Störungstheorie der Spektralzerlegung.

II. Mitteilung.

Stetige Abhängigkeit der Spektralschar von einem Parameter.

Von

Franz Rellich in Marburg (Lahn).

Für Operatoren mit *diskretem* Spektrum (Integraloperatoren vom Fredholmschen Typus, Differentialoperatoren vom Sturm-Liouvilleschen Typus) ist die Frage nach der stetigen Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenfunktionen von einem Parameter in Arbeiten von H. Weyl, R. Courant und anderen beantwortet worden[1]. Hier wird die entsprechende Frage für beliebige selbstadjungierte (nicht notwendig beschränkte) Operatoren gestellt und beantwortet. Dabei werden durchwegs an Stelle von Operatoren, die von einem kontinuierlichen Parameter abhängen, Folgen von Operatoren gesetzt. Jeder so gewonnene Satz über Folgen von Operatoren läßt sich unmittelbar als ein Satz über Operatoren aussprechen, die von einem kontinuierlichen Parameter abhängen, was in einem Fall (Satz 3) ausführlich formuliert wird.

Die Kenntnis der ersten Mitteilung wird hier nirgends benötigt. Für die Grundtatsachen aus der Theorie des Hilbertschen Raumes vgl. das bekannte Lehrbuch von M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space.... New York 1932.

§ 1.

Konvergente und gleichmäßig konvergente Folgen beschränkter Operatoren, stetige Abhängigkeit von einem Parameter[2].

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertscher Raum. Das innere Produkt zweier Elemente x, y aus $\mathfrak{H}$ sei (x, y); $|x| = \sqrt{(x, x)}$. „Operator" bedeute stets „linearer Operator".

[1]) Ausführlicher Literaturnachweis in dem Encyklopädieartikel von Hellinger und Toeplitz, insb. Nr. 35, S. 1527—1530.

[2]) Die Definitionen in diesem Paragraphen sind wohlbekannt. Vgl. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris 1913.

Definition 1. Die Folge beschränkter Operatoren $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ konvergiert gegen den beschränkten Operator A, wenn es

1. ein k gibt mit $|A^{(n)}x| \leqq k|x|$ für alle n und x, und wenn
2. für jedes x gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |A^{(n)}x - Ax| = 0$. [3])

Definition 2. Die Folge beschränkter Operatoren $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ in $\mathfrak{H}$ konvergiert gleichmäßig gegen den beschränkten Operator A in $\mathfrak{H}$, wenn zu jedem $\eta > 0$ ein N existiert, so daß $|A^{(n)}x - Ax| \leqq \eta|x|$ wird für alle $n > N$ und alle x.

Definition 3. Für jedes ε aus dem Intervall $\varrho_1 \leqq \varepsilon \leqq \varrho_2$ se ein beschränkter Operator $A(\varepsilon)$ erklärt. Er heißt stetig im Punkte ε $(\varrho_1 \leqq \varepsilon_0 \leqq \varrho_2)$ hinsichtlich des Parameters ε, wenn aus $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = \varepsilon_0$, $\varrho_1 \leqq \varepsilon_n \leqq \varrho_2$ folgt: $A(\varepsilon_n)$ konvergiert gegen $A(\varepsilon_0)$. Er heißt stetig im Intervall $\varrho_1 \leqq \varepsilon \leqq \varrho_2$ hinsichtlich des Parameters ε, wenn er in jedem Punkt des Intervalles stetig ist.

§ 2.

Konvergenz und stetige Abhängigkeit der Spektralschar.

Satz 1. *Die Folge beschränkter symmetrischer Operatoren $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ konvergiere* (Def. 1, § 1) *gegen den beschränkten symmetrischen Operator A. Die (linksstetige) Spektralschar von $A^{(n)}$ sei $P_\lambda^{(n)}$, die von A sei P_λ. Es sei λ_0 kein Punkteigenwert von A. Dann konvergiert $P_{\lambda_0}^{(n)}$ gegen P_{λ_0}.*

Beweis. I. Offenbar genügt es, den Satz für $\lambda_0 = 0$ zu beweisen.

Auf Grund der Definition der Konvergenz von $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ gegen A gibt es ein k, so daß $|A^{(n)}x| \leqq k|x|$, $|Ax| \leqq k|x|$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $k < 1$ angenommen werden. Dann ist $A^{(n)} = \int\limits_{-1}^{+1} \lambda\, d P_\lambda^{(n)}$ und $A = \int\limits_{-1}^{+1} \lambda\, d P_\lambda$.

II [4]). Aus

$$A^{(n)} P_0^{(n)} = \int\limits_{-1}^{0} \lambda\, d P_\lambda^{(n)} = \tfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} (\lambda - |\lambda|)\, d P_\lambda^{(n)}, \quad A P_0 = \tfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} (\lambda - |\lambda|)\, d P_\lambda$$

folgen mit der Bezeichnung

$$B^{(n)} = \int\limits_{-1}^{+1} |\lambda|\, d P_\lambda^{(n)}, \quad B = \int\limits_{-1}^{+1} |\lambda|\, d P_\lambda \tag{1}$$

---

[3]) Nach einem allgemeinen Satz von St. Banach folgt die Bedingung 1 aus der Bedingung 2, könnte daher auch weggelassen werden.

[4]) Zu den Schritten II. und III. vgl. F. J. Wecken, Zur Theorie linearer Operatoren, Math. Annalen 110, S. 722—725.

die Gleichungen

(2) $$A^{(n)} P_0^{(n)} = \tfrac{1}{2}(A^{(n)} - B^{(n)}), \quad A P_0 = \tfrac{1}{2}(A - B).$$

III. Für $|\lambda| \leqq 1$ ist $|\lambda| = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (\lambda^2 - 1)^\nu$; für ganzes $N > 0$ daher

$$B^{(n)} = \int_{-1}^{+1} \sum_{\nu=0}^{N} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} [\lambda^2 - 1]^\nu \, d P_\lambda^{(n)} + \int_{-1}^{+1} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} [\lambda^2 - 1]^\nu \, d P_\lambda^{(n)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} [(A^{(n)})^2 - 1]^\nu + \int_{-1}^{+1} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} [\lambda^2 - 1]^\nu d P_\lambda^{(n)}.$$

Subtrahiert man davon den entsprechenden Ausdruck für B, so ergibt sich

(3) $$|(B^{(n)} - B)x| \leqq \sum_{\nu=0}^{N} \left|\binom{\frac{1}{2}}{\nu}\right| \cdot |([(A^{(n)})^2 - 1]^\nu - [A^2 - 1]^\nu) x| + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \left|\binom{\frac{1}{2}}{\nu}\right| \cdot 2|x|.$$

Wegen der Konvergenz von $A^{(n)}$ gegen A und der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\binom{\frac{1}{2}}{\nu}\right|$ folgt daraus die Konvergenz von $B^{(n)}$ gegen B (beachte $|B^{(n)} x| \leqq |x|$). Subtrahiert man die zweite der Gleichungen (2) von der ersten, so erhält man

(4) $$(A^{(n)} - A) P_0^{(n)} + A (P_0^{(n)} - P_0) = \tfrac{1}{2}(A^{(n)} - A) - \tfrac{1}{2}(B^{(n)} - B)$$

und daraus für jedes x, y

$$\begin{aligned} |(A (P_0^{(n)} - P_0) x, y)| &\leqq |((A^{(n)} - A) P_0^{(n)} x, y)| + \tfrac{1}{2} |((A^{(n)} - A) x, y)| \\ &\quad + \tfrac{1}{2} |((B^{(n)} - B) x, y)| \\ &\leqq |x| \cdot |(A^{(n)} - A) y| + \tfrac{1}{2} |(A^{(n)} - A) x| \cdot |y| \\ &\quad + \tfrac{1}{2} |(B^{(n)} - B) x| \cdot |y|. \end{aligned}$$

IV. Aus der letzten Formel folgt

$$\lim_{n \to \infty} ((P_0^{(n)} - P_0) x, A y) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\lambda_0 = 0$ kein Punkteigenwert von A, also $A x \neq 0$, wenn $x \neq 0$. Deshalb liegt die Menge der Elemente $A y$ in $\mathfrak{H}$ dicht, wenn y ganz $\mathfrak{H}$ durchläuft; sonst gäbe es ein $x \neq 0$ mit $(x, A y) = 0$ für alle y, $(A x, y) = 0$ für alle y, also $A x = 0$. Da außerdem $|(P_0^{(n)} - P_0) x| \leqq 2 |x|$ ist, so gilt $\lim_{n \to \infty} (P_0^{(n)} x, x') = (P_0 x, x')$ für jedes x, x' aus $\mathfrak{H}$ (d. h. $P_0^{(n)}$ „konvergiert schwach" gegen P_0). Daraus wegen

$$((P_0^{(n)} - P_0) x, (P_0^{(n)} - P_0) x) = (P_0^{(n)} x, x) + (P_0 x, x) - (P_0^{(n)} x, P_0 x) - (P_0 x, P_0^{(n)} x)$$

sogar $\lim_{n \to \infty} P_0^{(n)} x = P_0 x$, womit Satz 1 bewiesen ist.

Von Satz 1 gilt die Umkehrung:

Satz 2. *Es seien $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ und A beschränkte symmetrische Operatoren mit gemeinsamer Schranke $|Ax| \leqq k\,|x|$ und $|A^{(n)}x| \leqq k\,|x|$ für alle n und x. Die (linksstetige) Spektralschar von $A^{(n)}$ sei $P_\lambda^{(n)}$, die von A sei P_λ. Für jeden Wert von λ, der nicht Punkteigenwert von A ist, konvergiere $P_\lambda^{(n)}$ gegen P_λ. Dann konvergiert $A^{(n)}$ gegen A* (Def. 1, § 1).

Beweis: Es ist

$$(A^{(n)}x, y) = \int_{-2k}^{+2k} \lambda\, d(P_\lambda^{(n)}x, y), \quad (Ax, y) = \int_{-2k}^{+2k} \lambda\, d(P_\lambda x, y),$$

also

$$((A^{(n)} - A)x, y) = \int_{-2k}^{+2k} \lambda\, d((P_\lambda^{(n)} - P_\lambda)x, y) = -\int_{-2k}^{+2k} ((P_\lambda^{(n)} - P_\lambda)x, y)\, d\lambda,$$

$$|((A^{(n)} - A)x, y)| \leqq |y| \int_{-2k}^{+2k} |(P_\lambda^{(n)} - P_\lambda)x|\, d\lambda.$$

Setzt man $y = (A^{(n)} - A)x$, so wird

$$|(A^{(n)} - A)x| \leqq \int_{-2k}^{+2k} |(P_\lambda^{(n)} - P_\lambda)x|\, d\lambda.$$

Nach Voraussetzung hat die Funktion $f_n(\lambda) = |(P_\lambda^{(n)} - P_\lambda)x|$ für $n \to \infty$ und jedes λ, das nicht Punkteigenwert von A ist, also für jedes λ bis auf eine abzählbare Menge, den Grenzwert Null, außerdem ist $|f_n(\lambda)| \leqq 2$. Daraus folgt $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-2k}^{+2k} f_n(\lambda)\, d\lambda = 0$, also $|(A^{(n)} - A)x| \to 0$, $n \to \infty$, womit Satz 2 bewiesen ist.

Aus Satz 1 folgt nach Def. 3, § 1 unmittelbar

Satz 3. *Der beschränkte symmetrische Operator $A(\varepsilon)$ sei hinsichtlich des Parameters ε stetig im Intervall $\varrho_1 \leqq \varepsilon \leqq \varrho_2$. Seine Spektralschar heiße $P_\lambda(\varepsilon)$. Wenn λ_0 kein Punkteigenwert von $A(\varepsilon_0)$ ist, dann ist $P_\lambda(\varepsilon)$ hinsichtlich des Parameters ε stetig im Punkt ε_0.*

Satz 1 bleibt nicht richtig, wenn man in Voraussetzung und Behauptung „konvergiert" durch „konvergiert gleichmäßig" (Def. 2, § 1) ersetzt. Das sieht man aus folgendem Beispiel: Es sei $\varphi^1, \varphi^2, \ldots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem aus $\mathfrak{H}$ und A der symmetrische beschränkte Operator, für den $A\varphi^\nu = \frac{1}{\nu}\varphi^\nu$ gilt. Dann ist $\lambda_0 = 0$ kein Punkteigenwert von A. Bezeichnet P_λ die Spektralschar von A, so ist $P_0 = 0$. Setzt man $A^{(n)} = A - \frac{1}{n}$, so konvergiert $A^{(n)}$ gleichmäßig gegen A. Die linksstetige Spektralschar $P_\lambda^{(n)}$ von $A^{(n)}$ ist für $\lambda = 0$ gegeben durch

$$P_0^{(n)}x = \sum_{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{n} < 0} (x, \varphi^\nu)\varphi^\nu = \sum_{\nu > n} (x, \varphi^\nu)\varphi^\nu.$$

Also $|P_0^{(n)}\varphi^{n+1}| = 1$, $|P_0\varphi^{n+1}| = 0$. Daher konvergiert $P_0^{(n)}$ nicht gleichmäßig gegen P_0.

In einem wichtigen Spezialfall läßt sich die gleichmäßige Konvergenz aber beweisen. Es gilt nämlich

Satz 4. *Die Folge beschränkter, symmetrischer Operatoren $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ konvergiere gleichmäßig* (Def. 2, § 1) *gegen den beschränkten symmetrischen Operator A. Die (linksstetige) Spektralschar von $A^{(n)}$ sei $P_\lambda^{(n)}$, die von A sei P_λ. Das Spektrum von A sei leer in einem Intervall $|\lambda - \lambda_0| \leqq d$ um λ_0. Dann konvergiert $P_{\lambda_0}^{(n)}$ gleichmäßig gegen P_{λ_0}.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_0 = 0$. Erklärt man wie im Beweis zu Satz 1 den Operator $B^{(n)}$ durch Formel (1), so folgt aus (3) die gleichmäßige Konvergenz von $B^{(n)}$ gegen B und aus (4) die gleichmäßige Konvergenz von $A\,P_0^{(n)}$ gegen $A\,P_0$. Da A eine beschränkte Reziproke besitzt, konvergiert $P_0^{(n)}$ gleichmäßig gegen P_0, womit Satz 4 bewiesen ist.

§ 3.

Isolierte Punkteigenwerte endlicher Vielfachheit.

H. Weyl[5]) hat gezeigt, daß man aus einem Operator mit reinem Punktspektrum durch Addition eines vollstetigen Operators, der nach J. v. Neumann[6]) beliebig kleine Norm haben kann, einen Operator mit einem reinen Streckenspektrum herstellen kann. Punkteigenwerte bleiben daher im allgemeinen bei „stetiger Störung“ nicht einmal erhalten, erst recht brauchen sie nicht stetig mit dem Störungsparameter zu variieren. Wohl aber gilt eine solche stetige Abhängigkeit für isolierte Punkteigenwerte endlicher Vielfachheit. Es gilt nämlich

Satz 5. *Es sei A ein symmetrischer, beschränkter Operator in $\mathfrak{H}$ mit dem h-fachen Punkteigenwert λ; dieser Punkteigenwert sei isoliert, d. h. in dem μ-Intervall $\lambda - d_1 < \mu < \lambda + d_2$ ($d_1 > 0$, $d_2 > 0$) sei das Spektrum von A, abgesehen von $\mu = \lambda$, leer. Die symmetrischen beschränkten Operatoren $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ mögen gleichmäßig gegen A konvergieren* (Def. 2, § 1). *Dann gilt für hinreichend große n:*

1. *$A^{(n)}$ besitzt h Punkteigenwerte $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_h^{(n)}$, die mit $n \to \infty$ gegen λ konvergieren.*

2. *Sind $\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_h^{(n)}$ orthogonale, normierte Eigenelemente von $A^{(n)}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_h^{(n)}$ und ist $P^{(n)}x = \sum_{i=1}^{h}(x, \varphi_i^{(n)})\,\varphi_i^{(n)}$, dann kon-*

---

[5]) Rend. del Circ. Math. di Palermo 27 (1909), S. 373—392.

[6]) Actual. scient. et ind. 229 (1935).

vergiert $P^{(n)}$ *mit* $n \to \infty$ *gleichmäßig gegen den Projektionsoperator* P, *der zu dem Eigenraum des Eigenwertes* λ *von* A *gehört, und es ist* $P^{(n)}$ *der Projektionsoperator von* $A^{(n)}$, *der zu dem Intervall* $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ *gehört, wo* λ_1, λ_2 *Zahlen mit* $\lambda - d_1 < \lambda_1$, $\lambda_2 < \lambda + d_2$ *bedeuten.*

Beweis. I. Hilfssatz 1. Es seien $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ lineare Teilräume mit den Projektionsoperatoren $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots$ und es sei $\mathfrak{M}$ ein h-dimensionaler Teilraum mit dem Projektionsoperator Q. Die Operatoren $Q^{(n)}$ mögen für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen Q konvergieren (Def. 2, § 1). Dann gibt es ein N derart, daß für alle $n > N$ die Dimension von $\mathfrak{M}_n$ gleich h ist.

Zusatz. Verlangt man nicht gleichmäßige Konvergenz der $Q^{(n)}$ gegen Q, sondern nur Konvergenz (Def. 1, §1), dann ist für alle hinreichend großen n die Dimension von $\mathfrak{M}_n$ größergleich h (Halbstetigkeit der Dimension).

Der Beweis von Hilfssatz 1 wird mit dem Beweis des Zusatzes begonnen. Wäre die Behauptung des Zusatzes falsch, dann gäbe es eine Teilfolge n_i der ganzen Zahlen mit $n_i \to \infty$, $i \to \infty$ derart, daß die Dimension von $\mathfrak{M}_{n_i}$ kleiner als h wäre. In $\mathfrak{M}$, das die Dimension h hat, gibt es dann eine Folge von Elementen ω_i derart, daß ω_i orthogonal zu allen Elementen von $\mathfrak{M}_{n_i}$ steht und die Länge 1 hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß die ω_i konvergieren; sonst würde man eine konvergente Teilfolge auswählen. Also $\omega_i \to \omega$, $i \to \infty$; $|\omega| = 1$. Wegen $Q^{(n_i)}\omega_i = 0$ ist

$$(Q^{(n_i)}\omega, \omega) = (Q^{(n_i)}(\omega_i - \omega), \omega_i - \omega) = |Q^{(n_i)}(\omega_i - \omega)|^2 \leqq |\omega_i - \omega|^2;$$

aus $\lim\limits_{i \to \infty} (Q^{(n_i)}\omega, \omega) = (Q\omega, \omega) = (\omega, \omega)$ folgt der Widerspruch $(\omega, \omega) = 0$. Damit ist der Zusatz bewiesen. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 muß aber für alle hinreichend großen n die Dimension von $\mathfrak{M}_n$ auch kleinergleich h sein. Sonst gäbe es nämlich eine Folge von Elementen ω_k aus $\mathfrak{M}_{n_k}$ mit

$$|\omega_k| = 1, \quad Q\omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Nun wähle man ein N derart, daß für alle $n > N$ und alle x gilt $|(Q^{(n)} - Q)x| \leqq \frac{1}{2}|x|$. Dann folgt aus $1 = |\omega_k| = |(Q^{(n_k)} - Q)\omega_k| \leqq \frac{1}{2}$ (für $n_k > N$) der Widerspruch. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

II. Es seien λ_1, λ_2 zwei Zahlen mit $\lambda - d_1 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \lambda + d_2$. Bezeichnet $P_\lambda^{(n)}$ bzw. P_λ die Spektralschar von $A^{(n)}$ bzw. A, dann konvergiert nach Satz 4 $P_{\lambda_2}^{(n)} - P_{\lambda_1}^{(n)}$ gleichmäßig gegen $P_{\lambda_2} - P_{\lambda_1} = P$. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz 1 muß daher für alle genügend großen n die Dimension des zu $P_{\lambda_2}^{(n)} - P_{\lambda_1}^{(n)}$ gehörigen Teilraumes gleich h sein

Also muß $A^{(n)}$ in jedem Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ genau h Punkteigenwerte haben, wenn nur n hinreichend groß ist. Daraus ergeben sich unmittelbar die Behauptungen von Satz 5.

§ 4.

Selbstadjungierte, nicht notwendig beschränkte Operatoren.

Bei der Übertragung des bisherigen auf nicht beschränkte Operatoren sind zwei Punkte zu beachten: erstens werden bei der Definition der Konvergenz von selbstadjungierten Operatoren gewisse Voraussetzungen über einen gemeinsamen Definitionsbereich benötigt; zweitens wäre die direkte Übertragung der Definition 2 für die gleichmäßige Konvergenz zu eng, sie wird daher sinngemäß erweitert.

Definition 4. In einem Teilraum $\mathfrak{A}$ eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ sei ein Teilraum $\mathfrak{A}'$ gelegen. Der Teilraum $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ liegt „dicht in $\mathfrak{A}$ in bezug auf die Form $(x, x) + (A x, A x)$", wenn zu jedem x aus $\mathfrak{A}$ eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ aus $\mathfrak{A}'$ existiert, für die

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} |A x_n - A x| = 0$$

gilt [7].

Definition 5. Die Operatoren $A, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ seien der Reihe nach in den dichten Teilräumen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}, \ldots$ von $\mathfrak{H}$ erklärt. $A^{(n)}$ konvergiert gegen A, wenn der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{(m+1)}, \mathfrak{A}^{(m+2)}, \ldots$ für hinreichend großes m dicht in $\mathfrak{A}$ in bezug auf die Form $(x, x) + (A x, A x)$ liegt (Def. 4) und wenn für alle x aus $\mathfrak{D}$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} |A^{(n)} x - A x| = 0$.

$A^{(n)}$ konvergiert gleichmäßig gegen A, wenn darüber hinaus zu jedem $\eta > 0$ ein N derart gehört, daß für $n > N$ und alle x aus $\mathfrak{D}$ gilt

$$|A^{(n)} x - A x| \leqq \eta \{|x| + |A x|\}.$$

Hilfssatz 2. Die Operatoren $A, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ seien bzw. in den dichten Teilräumen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}, \ldots$ eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ erklärt. A habe die beschränkte Reziproke S, und $A^{(n)}$ die beschränkte Reziproke $S^{(n)}$ (für alle x aus $\mathfrak{A}$ ist also $S A x = x$, für alle x aus $\mathfrak{H}$ liegt $S x$ in $\mathfrak{A}$, $A S x = x$, und das entsprechende gilt für $A^{(n)}$ in $\mathfrak{A}^{(n)}$ und $S^{(n)}$); es gebe ein k, für das $|S x| \leqq k |x|$, $|S^{(n)} x| \leqq k |x|$ gilt für alle n und x. Wenn $A^{(n)}$ gegen A konvergiert (Def. 5), dann konvergiert $S^{(n)}$ gegen S

---

[7]) Zu dieser Definition vgl. K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Teil I, Math. Ann. 109, S. 465—487.

(Def. 1, § 1). Wenn $A^{(n)}$ gleichmäßig gegen A (Def. 5) konvergiert, dann konvergiert $S^{(n)}$ gleichmäßig gegen S (Def. 2, § 1).

Beweis. I. In $\mathfrak{H}$ gibt es einen dichten Teilraum $\mathfrak{H}'$ derart, daß für jedes x aus $\mathfrak{H}'$ das Element $y = Sx$ in $\mathfrak{D}$ (Def. 5) liegt. Sonst gäbe es ein $z \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$, mit dem für jedes y aus $\mathfrak{D}$ gelten würde $(z, Ay) = 0$. Da $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{A}$ dicht in bezug auf die Form $(x, x) + (Ax, Ax)$ liegt, gilt diese Gleichung sogar für jedes y aus $\mathfrak{A}$. Wählt man also $y = Sz$, so folgt der Widerspruch $(z, z) = 0$.

II. Für jedes x aus $\mathfrak{H}'$ ist $(S^{(n)} - S)x = (S^{(n)} A S - S^{(n)} A^{(n)} S)x$ für hinreichend große n, also

$$|(S^{(n)} - S)x| \leqq k\,|(A - A^{(n)}) S x| \tag{6}$$

und daraus $\lim\limits_{n \to \infty} |(S^{(n)} - S)x| = 0$ zunächst für alle x aus $\mathfrak{H}'$, wegen $|(S^{(n)} - S)x| \leqq 2k|x|$ aber dann für alle x aus $\mathfrak{H}$, womit die Konvergenz der $S^{(n)}$ gegen S bewiesen ist.

III. Wenn $A^{(n)}$ gleichmäßig gegen A konvergiert, dann gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein N derart, daß für alle $n > N$ und alle x aus $\mathfrak{H}'$ gilt

$$|(A - A^{(n)}) S x| \leqq \eta\,\{|Sx| + |ASx|\} = \eta\,\{|Sx| + |x|\} \leqq \eta (k+1)|x|.$$

Setzt man das in (6) ein, so erhält man $|(S^{(n)} - S)x| \leqq \eta k (k+1)|x|$ zunächst für alle x aus $\mathfrak{H}'$, dann wie eben für alle x aus $\mathfrak{H}$, womit die gleichmäßige Konvergenz von $S^{(n)}$ gegen S bewiesen ist.

Satz 6. *Die Operatoren $A, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ seien in einem komplexen Hilbertschen Raume $\mathfrak{H}$ selbstadjungiert und es konvergiere $A^{(n)}$ gegen A* (Def. 5). *Die (linksstetige) Spektralschar von $A^{(n)}$ sei $P_\lambda^{(n)}$, die (linksstetige) Spektralschar von A sei P_λ. Es sei λ_0 kein Punkteigenwert von A. Dann konvergiert $P_{\lambda_0}^{(n)}$ mit $n \to \infty$ gegen P_{λ_0}.*

Beweis[8]). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_0 = 0$. Bezeichne $R^{(n)}$ bzw. $R_*^{(n)}$ die Reziproke von $A^{(n)} + i$ bzw. $A^{(n)} - i$ und R bzw. R_* die Reziproke von $A + i$ bzw. $A - i$. Setzt man

$$D^{(n)} = R^{(n)} + R_*^{(n)} = 2 R_*^{(n)} A^{(n)} R^{(n)}, \quad D = R + R_* = 2 R_* A R$$

und bezeichnet mit $Q_\lambda^{(n)}$ bzw. Q_λ die Spektralschar von $D^{(n)}$ bzw. D, dann ist $P_0^{(n)} = Q_0^{(n)}$ und $P_0 = Q_0$. Wegen $|R^{(n)} x| \leqq |x|$, $|Rx| \leqq |x|$ liefert Hilfssatz 2 die Konvergenz der $D^{(n)}$ gegen D. Da $\lambda_0 = 0$ kein Punkteigenwert von D ist (aus $R_* A R \varphi = 0$ folgt $A R \varphi = 0$, $R\varphi = 0$, $\varphi = 0$), konvergiert nach Satz 1 $Q_0^{(n)}$ gegen Q_0, womit der Satz 6 bewiesen ist.

---

[8]) Vgl. F. Riesz, Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, Acta Szeged 5, S. 19—54.

Satz 7. *Außer den Voraussetzungen des Satzes* 6 *seien die beiden weiteren Voraussetzungen erfüllt:* 1. $A^{(n)}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* A (Def. 5); *und* 2. *In einer Umgebung* $|\lambda - \lambda_0| \leqq p$ *von* λ_0 *ist das Spektrum von* A *leer. Dann konvergiert* $P^{(n)}_{\lambda_0}$ *gleichmäßig gegen* P_{λ_0} (Def. 2, § 1).

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_0 = 0$. Da in einer Umgebung von $\lambda_0 = 0$ das Spektrum von A leer ist, gibt es ein $p > 0$, so daß $|A\,x| \geqq p\,|x|$ für alle x aus $\mathfrak{A}$ gilt. Man setze $\eta = \frac{p}{2(p+1)}$. Dann gibt es (Def. 5) ein N, so daß für alle $n > N$ und alle x aus $\mathfrak{D}$ gilt

$$|A^{(n)}x| \geqq |A\,x| - |A^{(n)}x - A\,x| \geqq |A\,x|(1-\eta) - \eta\,|x|$$
$$\geqq |x|(p - \eta(p+1)) = \frac{p}{2}|x|.$$

Also besitzt $A^{(n)}$ (für genügend großes n) eine beschränkte Reziproke $S^{(n)}$ mit $|S^{(n)}x| \leqq \frac{2}{p}|x|$, erst recht $|S\,x| \leqq \frac{2}{p}|x|$ für die Reziproke S von A; von der Beschränkung „für genügend großes n" befreien wir uns, indem wir endlich viele $A^{(n)}$ weglassen und umnumerieren. Nach Hilfssatz 2 konvergiert $S^{(n)}$ gleichmäßig gegen S. Für die Spektralschar $Q^{(n)}_\lambda$ von $S^{(n)}$ bzw. Q_λ von S gilt:

$$Q^{(n)}_0 = P^{(n)}_0, \quad Q_0 = P_0.$$

Nach Satz 4 konvergiert $Q^{(n)}_0$ gleichmäßig gegen Q_0, also auch $P^{(n)}_0$ gleichmäßig gegen P_0, w. z. b. w.

Satz 8. *Die Operatoren* $A, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ *seien in einem komplexen Hilbertschen Raume* $\mathfrak{H}$ *selbstadjungiert und es konvergiere* $A^{(n)}$ *gleichmäßig gegen* A (Def. 5). *Es sei* λ *ein* h*-facher isolierter Punkteigenwert, in dem* μ*-Intervall* $\lambda - d_1 < \mu < \lambda + d_2$ $(d_1 > 0,\ d_2 > 0)$ *sei das Spektrum von* A, *abgesehen von* $\mu = \lambda$, *leer. Dann gelten die Behauptungen des Satzes* 5.

Der Beweis verläuft wie der Beweis zu Satz 5; an Stelle des Satzes 4 wird dabei der Satz 7 benutzt.

(Eingegangen am 21. 8. 1936.)