Mh. Math. 88, 293—304 (1979)

Monatshefte für Mathematik

Zwei Bemerkungen über transzendente Zahlen

Von

Peter Bundschuh, Köln

(Eingegangen am 6. März 1979)

Abstract. Two Remarks on Transcendental Numbers. In the first part theorems of BAKER are used to prove the transcendence of special values of power series whose coefficients are values of certain ordinary Dirichlet series with coefficients forming a periodic sequence of algebraic numbers. Especially the transcendence of $\psi(z) + C$ is shown for all rational z which are not integers, ψ denoting the logarithmic derivative of the gamma function and C Euler's constant. In the second part the intimate connection between SCHANUEL's conjecture and the arithmetic nature of $\sum_{n=2}^{\infty} \gamma(n) n^{-s}$, $s = 3, 4, 5, \ldots$ is studied where $\gamma(n)$ denotes the number of distinct representations of n in the form a^b with positive integers a, b. This function was recently introduced by GOLOMB.

Einleitung

Sei $\mathfrak{A} := (a_m)_{m=1,2,\ldots}$ eine unendliche periodische Folge komplexer Zahlen und $v = v(\mathfrak{A}) \in \mathbb{N}_0$ bzw. $p = p(\mathfrak{A}) \in \mathbb{N}$ ihre Vorperioden- bzw. Periodenlänge, d. h. es sei $a_{m+p} = a_m$ für alle $m > v$, aber $a_{v+p} \neq a_v$, falls $v \neq 0$ ist. Zu $\mathfrak{A}$ werde $\mathfrak{A}^* := (a_m^*)_{m=1,2,\ldots}$ definiert durch die Festsetzung $a_m^* := a_m$ für $m > v$ bzw. $a_m^* := a_{m+\mu p}$ für $1 \leqslant m \leqslant v$, falls $v \neq 0$ ist; hierbei bedeutet μ die eindeutig bestimmte natürliche Zahl mit $(v + 1 - m)/p \leqslant \mu < (v + 1 - m)/p + 1$. Offenbar ist $\mathfrak{A}^*$ reinperiodisch mit der Periodenlänge p und wir nennen $\mathfrak{A}^*$ *die reinperiodische Fortsetzung von* $\mathfrak{A}$; ist $\mathfrak{A}$ selbst bereits reinperiodisch, so stimmt $\mathfrak{A}^*$ mit $\mathfrak{A}$ überein.

In § 1 dieser Note betrachten wir gewöhnliche Dirichletreihen

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s}$$

mit periodischer Koeffizientenfolge $\mathfrak{A}$. Die sicher in $\operatorname{Re} s > 1$ konvergente Reihe möge dort die Funktion $f(s; \mathfrak{A})$ definieren. $F(z; \mathfrak{A})$ sei

20*

0026—9255/79/0088/0293/$ 02.40

die mindestens in $|z| < 1$ durch die Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n; \mathfrak{A}) z^n$$

festgelegte Funktion. Wir behaupten zunächst

Satz 1: *Ist $\mathfrak{A} := (a_m)$ eine unendliche periodische Folge algebraischer Zahlen und ist F wie soeben angegeben, so gilt für jedes rationale $\frac{h}{k}$ mit $h, k \in \mathbb{N}, h < k$: Die Zahl $F\left(\frac{h}{k}; \mathfrak{A}\right)$ ist entweder transzendent oder gleich der algebraischen Zahl*

$$k^{-1} h^2 \sum_{m=1}^{v} (a_m - a_m^*) (m(km - h))^{-1},$$

wobei (a_m^*) die reinperiodische Fortsetzung von $\mathfrak{A}$ bedeutet.

Ist insbesondere $\mathfrak{A}$ reinperiodisch, so macht der Satz die Aussage, daß $F\left(\frac{h}{k}; \mathfrak{A}\right)$ transzendent ist, sobald es nicht verschwindet. Von besonderem Interesse ist natürlich der Fall, wo die zweite Alternative ausgeschlossen werden kann; auf diesem Wege findet man z. B. das folgende

Korollar 1: *Bezeichnet $\psi := \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ die logarithmische Ableitung der Gammafunktion und C die Eulersche Konstante, so ist $\psi(z) + C$ transzendent für jedes rationale, nicht ganze z.*

Während noch nicht einmal die Irrationalität von C bekannt ist, wurde bereits verschiedentlich die Transzendenz von Zahlen bewiesen, in die C als Summand eingeht. So zeigte MAHLER [5] z. B. die Transzendenz von $C - \pi Y_0(z)/2 J_0(z)$ für jedes algebraische $z \neq 0$, wenn J_0 bzw. Y_0 die Bessel-Funktionen erster bzw. zweiter Art der Ordnung Null bezeichnen; siehe hierzu auch VÄÄNÄNEN [8]. Weitere Korollare zu Satz 1 werden in § 1 angegeben.

In § 2 betrachten wir die von GOLOMB [3] eingeführte Funktion $\gamma: \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$, die für $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ erklärt ist durch die Festsetzung

$$\gamma(n) := \operatorname{card} \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a^b = n\}.$$

Mit elementaren Methoden wurde in [3] die Irrationalität von $\sum_{n=2}^{\infty} \gamma(n) q^{-n}$ für jedes $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gezeigt; weiter wurde

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma(n)\, n^{-s} = \sum_{n=2}^{\infty} (n^s - 1)^{-1} \text{ für } \operatorname{Re} s > 1 \tag{*}$$

bewiesen, so daß die arithmetische Natur der in $\operatorname{Re} s > 1$ konvergenten Dirichletreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma(n)\, n^{-s}$$

an der Stelle $s = 2$ vollständig geklärt ist: Die Reihe hat dort einen rationalen Wert, nämlich $\frac{3}{4}$. Wir wollen uns hier die Frage vorlegen, was über $\sum \gamma(n)\, n^{-s}$ für $s = 3, 4, 5, \ldots$ ausgesagt werden kann, und beweisen zu diesem Zweck

Satz 2: *Ist* $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$ *und sind* $\xi_\sigma := e\left(\frac{\sigma}{s}\right)$, $\sigma = 0, \ldots, s-1$ *die verschiedenen* s*-ten Einheitswurzeln, so ist*

$$\sum_{|n| \geqslant 2} \frac{1}{n^s - 1} = 2 - \frac{\delta}{2s} - \frac{\pi i}{s} \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s/2}}^{s-1} \xi_\sigma \frac{e(\xi_\sigma) + 1}{e(\xi_\sigma) - 1},$$

wobei δ *gleich* 1 *bzw.* 2, *falls* s *ungerade bzw. gerade ist, und* $e(z)$ *wie üblich abkürzend für* $\exp(2\pi i z)$ *steht.*

Nimmt man hier z. B. $s = 4$, so wird wegen (*) und Satz 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma(n)\, n^{-4} = \frac{7}{8} - \frac{\pi}{4} \operatorname{cotgh} \pi;$$

sind also π und e^π algebraisch unabhängig (vgl. etwa [9], Conjecture 7.5.6), so ist $\sum \gamma(n)\, n^{-4}$ transzendent. Eine allgemeinere Folgerung aus Satz 2, die allerdings ebenfalls nur ein bedingtes Resultat darstellt, ergibt sich aus der Richtigkeit der nachfolgenden, noch unbewiesenen

Vermutung von Schanuel: *Sind* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *über* $\mathbb{Q}$ *linear unabhängig, so ist der Transzendenzgrad des Körpers*

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_n))$$

über $\mathbb{Q}$ *mindestens* n.

Man vergleiche [9], Conjecture 7.5.2, auch für weitere Folgerungen aus der Schanuelschen Vermutung; diese ist die allgemeinste Vermutung, die sich auf Transzendenzeigenschaften von Zahlen bezieht, die mit der Exponentialfunktion zusammenhängen.

Korollar 2: *Unter Annahme der Schanuelschen Vermutung ist* $\sum_{n=2}^{\infty} \gamma(n)\, n^{-s}$ *transzendent für jedes gerade* $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 4$.

§ 1 Transzendenz von Potenzreihen mit Dirichletreihen als Koeffizienten

Unter Verwendung der in der Einleitung eingeführten Bezeichnungsweise zeigen wir zunächst Satz 1. Es gilt in $|z| < 1$

$$F(z; \mathfrak{A}) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\frac{z}{m}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\frac{z}{m}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{m}\right)^{-1} = \tag{1}$$
$$= \sum_{m=1}^{v} (a_m - a_m^*) \left(\frac{z}{m}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{m}\right)^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \left(\frac{z}{m}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{m}\right)^{-1},$$

wobei die in der zweiten Summe rechts auftretende Folge $(a_m^*)_{m=1,2,\ldots}$ reinperiodisch mit der Periodenlänge p ist. Wir tragen nun $z = \frac{h}{k}$ mit h, k wie in Satz 1 in diese zweite Summe ein, die wir dann Σ_2 nennen, und formen diese mit Hilfe einer auf JENSEN (laut [6], S. 20) zurückgehenden Methode um. Schreiben wir dazu jedes $m \in \mathbb{N}$ in eindeutiger Weise in der Form $m = \sigma p + \tau$ mit $\tau \in \{1, \ldots, p\}$ und $\sigma \in \mathbb{N}_0$, so wird

$$\Sigma_2 = h \sum_{\tau=1}^{p} a_\tau^* \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k(\sigma p + \tau) - h} - \frac{1}{k(\sigma p + \tau)}\right). \tag{2}$$

Führen wir nun weiter für $N, \tau \in \mathbb{N}$, $\tau \leqslant p$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda < k\tau$ die Summen

$$S_N(\lambda; \tau) := \sum_{\sigma=0}^{N-1} (k(\sigma p + \tau) - \lambda)^{-1}$$

ein und bedeutet ω eine beliebige (kp)-te Einheitswurzel, so wird

$$\sum_{\lambda=k\tau-kp}^{k\tau-1} \omega^{k\tau-\lambda} S_N(\lambda; \tau) = \sum_{\lambda=k\tau-kp}^{k\tau-1} \sum_{\sigma=0}^{N-1} \omega^{k(\sigma p+\tau)-\lambda} (k(\sigma p + \tau) - \lambda)^{-1} = \tag{3}$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{Nkp} \frac{1}{\varrho} \omega^{\varrho}.$$

Nun ist für $j \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{\omega} \omega^{j-k\tau} \sum_{\lambda=k\tau-kp}^{k\tau-1} \omega^{k\tau-\lambda} S_N(\lambda; \tau) = \sum_{\lambda=k\tau-kp}^{k\tau-1} S_N(\lambda; \tau) \sum_{\omega} \omega^{j-\lambda}, \tag{4}$$

wobei $\sum\limits_{\omega}$ Summation über alle (kp)-ten Einheitswurzeln bedeutet. Da $\sum\limits_{\omega} \omega^{j-\lambda}$ gleich kp ist für $\lambda \equiv j \pmod{kp}$ und gleich 0 sonst, gilt insbesondere für die j mit $0 \leqslant j < k$, daß diese Summe genau für $\lambda = j$ den Wert kp hat und für alle anderen λ zwischen $k\tau - kp$ und $k\tau - 1$ verschwindet. Somit ergibt sich aus (3) und (4) für $0 \leqslant j < k$

$$S_N(j;\tau) = \frac{1}{kp} \sum_{\omega} \omega^{j-k\tau} \sum_{\varrho=1}^{Nkp} \frac{1}{\varrho} \omega^{\varrho}.$$

Im Hinblick auf (2) betrachtet man nun die Partialsummen

$$h \sum_{\tau=1}^{p} a_\tau^* (S_N(h;\tau) - S_N(0,\tau)) = \frac{h}{kp} \sum_{\omega \neq 1} (\omega^h - 1) \Big(\sum_{\tau=1}^{p} a_\tau^* \omega^{-k\tau}\Big) \sum_{\varrho=1}^{Nkp} \frac{1}{\varrho} \omega^{\varrho}.$$

Die Summe über ϱ konvergiert bei $N \to \infty$ bekanntlich für jedes komplexe ω mit $|\omega| \leqslant 1$, $\omega \neq 1$ gegen $-\log(1-\omega)$, wobei log den Hauptwert des komplexen Logarithmus bedeutet. Somit gewinnt man aus (1) die explizite Formel

$$\begin{aligned} F\left(\frac{h}{k}; \mathfrak{A}\right) = \frac{h^2}{k} \sum_{m=1}^{v} (a_m - a_m^*) \frac{1}{m(km-h)} + \\ + \frac{h}{kp} \sum_{\omega \neq 1} (1 - \omega^h) \Big(\sum_{\tau=1}^{p} a_\tau^* \omega^{-k\tau}\Big) \log(1-\omega). \end{aligned} \tag{5}$$

Damit folgt Satz 1 unmittelbar aus

Satz A (Baker [2], S. 11) *Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ komplexe algebraische Zahlen mit $\beta_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n \neq 0$, so ist*

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0$$

für jede Bestimmung der komplexen Logarithmen.

Wenden wir Satz 1 an auf die spezielle Folge $\mathfrak{A}$ mit $a_m = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so ist $f(s;\mathfrak{A})$ die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ und daher ist $F(z;\mathfrak{A})$ hier

$$Z(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \zeta(n) z^n$$

und dies ist positiv für jedes positive reelle z kleiner als 1. Nach Satz 1 haben wir daher eine Hälfte von

Korollar 3: *Für $z \in \mathbb{Q}$, $0 < |z| < 1$ ist $Z(z)$ transzendent.*

Nun ist nach [6], S. 38 in $|z| < 1$ für den Hauptwert des Logarithmus

$$\log \Gamma(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \frac{z^n}{n}$$

mit $s_1 := C$ (Eulers Konstante), $s_n := \zeta(n)$ für $n \geqslant 2$, also

$$-\psi(1 - z) = C + \frac{1}{z} Z(z), \tag{6}$$

und daher ist $\psi(z) + C$ transzendent für jedes $z \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, woraus sich Korollar 1 ergibt, wenn man die aus der Funktionalgleichung der Gammafunktion folgende Formel

$$\psi(z + g) = \frac{1}{z + g - 1} + \ldots + \frac{1}{z} + \psi(z) \tag{7}$$

für $g \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ beachtet. Ist nun $z \in \mathbb{Q} \cap$ $\cap (-1, 0)$, so folgt auch die zweite Hälfte von Korollar 3 aus (6) und Korollar 1.

Aus (6) und (7) sieht man übrigens für jedes $g \in \mathbb{N}$

$$\psi(g) + C = \sum_{\nu=1}^{g} \frac{1}{\nu} \in \mathbb{Q},$$

wenn man unter leeren Summen wie üblich die Zahl 0 versteht.

Die meromorphe Funktion $\Phi(z) := \psi(z) + C$ hat in der komplexen Ebene Nullstellen genau an den Stellen $z = 1$ bzw. $z = z_j$, wobei die z_j reell sind und in den offenen Intervallen $(-j - 1, -j)$, $j = 0, 1, \ldots$ liegen. Man sieht nämlich nach logarithmischer Differentiation der bekannten Weierstraßschen Produktdarstellung von $\Gamma(z)^{-1}$ direkt die Partialbruchdarstellung von Φ:

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z + n - 1} \right),$$

woraus sich

$$\operatorname{Im} \Phi(x + i y) = y \sum_{n=1}^{\infty} \left((x + n - 1)^2 + y^2 \right)^{-1} \neq 0$$

für reelle $y \neq 0$ und x ergibt. Daher hat Φ nur reelle Nullstellen, die sämtliche einfach sind, wie man aus

$$\Phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x + n - 1)^{-2} > 0 \tag{8}$$

feststellt. Den letzten Teil der Behauptung über die Nullstellen von Φ entnimmt man schließlich der Formel

$$\Phi(x) = (x - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x + n - 1)},$$

die $\Phi(x) \to +\infty$ bei $x \to 1 - g$, $x < 1 - g$ bzw. $\Phi(x) \to -\infty$ bei $x \to 1 - g$, $x > 1 - g$ für jedes $g \in \mathbb{N}$ zeigt.

Über diese Nullstellen folgt nun unmittelbar aus Korollar 1 das

Korollar 4: *Alle von 1 verschiedenen Nullstellen der Funktion $\psi(z) + C$ sind reelle Irrationalzahlen.*

Sei nun $q \in \mathbb{N}$ fest und χ ein beliebiger Charakter mod q. Nimmt man nun $a_m := \chi(m)$ für $m = 1, 2, \ldots$, so ist $\mathfrak{A}$ reinperiodisch mit der Periode q; $f(s; \mathfrak{A})$ wird nun die L-Reihe $L(s; q, \chi)$ und man erhält aus Satz 1

Korollar 5: *Sei $q \in \mathbb{N}$ ein Charakter* mod q. *Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$: Entweder ist $\sum_{n=2}^{\infty} L(n; q, \chi) z^n$ gleich Null oder transzendent. Ist $\chi = \chi_0$ der Hauptcharakter, so kann die erste Alternative nicht eintreten.*

Es sei angemerkt, daß, wenn $\sum_{n \geqslant 2} L(n; q, \chi) z^n$ im punktierten Kreis $0 < |z| < 1$ überhaupt eine Nullstelle besitzt, diese in

$$|z| > \left(\frac{6\zeta(3)}{12 - \pi^2} + 1\right)^{-1} > 0{,}228$$

liegen muß. Das ergibt sich mittels trivialer Abschätzungen aus $|L(2; q, \chi)| \geqslant 1 - \sum_{m \geqslant 2} m^{-2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$ bzw. $|L(n; q, \chi)| \leqslant \zeta(3)$ für $n = 3, 4, \ldots$.

Definiert man wie üblich (vgl. etwa [1], S. 807)

$$\eta(s) := \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} m^{-s}; \quad \lambda(s) := \sum_{\mu=0}^{\infty} (2\mu + 1)^{-s};$$

$$\beta(s) := \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} (2\mu + 1)^{-s},$$

wobei die mittlere Reihe in $\operatorname{Re} s > 1$, die beiden anderen in $\operatorname{Re} s > 0$ konvergieren, so ist

$$\begin{gathered}\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s), \quad \lambda(s) = L(s;4,\chi_0) = (1 - 2^{-s})\zeta(s),\\ \beta(s) = L(s;4,\chi_1),\end{gathered} \tag{9}$$

wobei χ_1 den Nichthauptcharakter mod 4 bedeutet. Mit

$$H(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \eta(n) z^n, \quad \Lambda(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \lambda(n) z^n, \quad B(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \beta(n) z^n \tag{10}$$

gilt

Korollar 6: *Für alle* $z \in \mathbb{Q}$ *mit* $0 < |z| < 1$ *sind* $H(z)$, $\Lambda(z)$, $B(z)$ *transzendent. Für alle rationalen, nicht ganzen* z *ist* $\psi(z) - \psi\left(\frac{z}{2}\right)$ *transzendent.*

Die Transzendenz der Zahlen (10) für $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ folgt aus ihrem Nichtverschwinden in Verbindung mit Satz 1. Mit (6), (7), (9), (10) ist im Kreis $|z| < 1$

$$H(z) = z\left(\psi\left(-\frac{z}{2}\right) - \psi(-z)\right) - 1.$$

Definiert man

$$G(z) := \frac{2}{z}(1 + H(-z)) = 2\left(\psi(z) - \psi\left(\frac{z}{2}\right)\right) \text{ in } |z| < 1,$$

so ist nach (7) und der Verdoppelungsformel für ψ (vgl. [1], S. 259)

$$\begin{aligned} G(z+1) &= 2\left(\frac{1}{z} + \psi(z) - \psi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right) = \\ &= 2\left(\frac{1}{z} + \psi\left(\frac{z}{2}\right) + \log 4 - \psi(z)\right) = \frac{2}{z} + \log 16 - G(z) \end{aligned} \tag{11}$$

und daraus

$$G(z+2) = -\frac{2}{z(z+1)} + G(z). \tag{12}$$

Nach (8) ist $\psi'(x) > 0$ in $\mathbb{R}$, also ψ in $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend, also $G(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$. Nun ist nach (11):

$$G(1-z) = \log 16 + \frac{2}{z} H(z). \tag{13}$$

Ist $z \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, so ist $G(1-z)$ nach (5), (13) eine von Null verschiedene Linearform in Logarithmen algebraischer Zahlen $\neq 0$ mit algebraischen Koeffizienten und somit transzendent nach Satz A. Damit ist $H(z)$ also auch für $z \in \mathbb{Q} \cap (-1,0)$ transzendent und ebenso $G(z)$ für die rationalen z mit $0 < |z| < 1$; die Transzendenz von $G(z)$ für $z \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ folgt hieraus direkt mittels (12). Der Beweis für die Transzendenz der Zahlen $A(z)$, $B(z)$ für $z \in \mathbb{Q} \cap (-1,0)$ kann analog wie für $H(z)$ geführt werden.

Während wir bisher lediglich quantitative Transzendenzresultate erhalten haben, wollen wir nun auch quantitative Ergebnisse formulieren. Dazu stützen wir uns auf den folgenden Satz von Baker [2], S. 22:

Satz B: *Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ algebraische Zahlen mit $\alpha_1 \ldots \alpha_n \neq 0$ und Graden $\leqslant d$ und sind die Höhen der α_j bzw. β_j höchstens A bzw. $B \geqslant 2$, so gilt: Entweder verschwindet*

$$L := \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_n \log \alpha_n$$

oder es ist $|L| > \exp(-c \log B)$, wobei $c > 0$ eine effektiv berechenbare Konstante ist, die nur von n, d, A und den gewählten Zweigen der Logarithmen abhängt.

Hieraus leitet man leicht ab, indem man sich (5) und die Beweise der Korollare 1, 3 und 6 nochmals ansieht:

Korollar 7: *Ist θ eine der transzendenten Zahlen $Z(z)$, $H(z)$, $A(z)$, $B(z)$ mit $z \in \mathbb{Q}$, $0 < |z| < 1$ bzw. $\psi(z) + C$, $\psi(z) - \psi\left(\frac{z}{2}\right)$ mit $z \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, so gilt für jedes algebraische β eines Grades $\leqslant D$ und einer Höhe $\leqslant H$ mit $H \geqslant h(\theta)$:*

$$|\theta - \beta| > \exp(-c_0(\theta, D) \log H).$$

Dieses Approximationsmaß besagt seinerseits, wenn man sich der Klasseneinteilungen von Koksma bzw. Mahler (vgl. [7], Kap. III) bedient, daß *die in Korollar 7 genannten transzendenten Zahlen θ keine U^*-Zahlen im Sinne der Koksmaschen und damit auch keine U-Zahlen im Sinne der Mahlerschen Klassifikation sind.*

§ 2 SCHANUELS Vermutung und eine Dirichletreihe von GOLOMB

Wir geben hier erst einen Beweis für Satz 2, dessen Aussage für $s = 2$ trivial ist; für $s = 4$ kann man das Resultat in [4], S. 109 mit Quellenangabe finden.

Ist λ_N für $N \in \mathbb{N}$ der positiv umlaufene Rand des Quadrats mit den vier Eckpunkten $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ in der z-Ebene, so betrachten wir die Integrale

$$I(N) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_N} \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^s - 1} dz$$

mit s wie in Satz 2, die wir mittels Residuensatz auswerten: Die Pole des Integranden im Innern von λ_N liegen bei $z = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$ bzw. bei den Stellen $z = \xi_\sigma := e(\sigma/s)$, $0 \leqslant \sigma < s$. Als Residuen des Integranden an den Stellen $z = n \in \{0, \pm 2, \ldots, \pm N\}$ ergibt sich $(n^s - 1)^{-1}$, was bei ungeradem s auch für $z = -1$ gilt; bei geradem s wird das Residuum an $z = -1$ gleich $(1 - s)/2s$, während das Residuum an $z = 1$ für jedes s gleich $(1 - s)/2s$ ist. Es verbleiben die Stellen $z = \xi_\sigma$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s - 1$, $\sigma \neq s/2$, die

$$\frac{1}{s} \pi \xi_\sigma^{1-s} \operatorname{cotg} \pi \xi_\sigma = \frac{\pi i}{s} \xi_\sigma \frac{e(\xi_\sigma) + 1}{e(\xi_\sigma) - 1}$$

als Residuen beitragen. Da $|\pi \operatorname{cotg} \pi z|$ auf λ_N unabhängig von N beschränkt ist, gilt $I(N) = O(N^{1-s})$ und man erhält Satz 2 nach Ausführung des Grenzüberganges $N \to \infty$.

Definiert man ω_s für $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 3$ im Anschluß an die Formel in Satz 2 durch

$$\sum_{|n| \geqslant 2} (n^s - 1)^{-1} =: 2 - \frac{\delta}{2s} - \frac{1}{s} \omega_s, \tag{14}$$

so wird nun $\omega_s > 0$ für alle diese s behauptet. (14) schreibt sich für ungerades bzw. gerades s als

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geqslant 2} (n^{2s} - 1)^{-1} = 1 - \frac{1}{4s} - \frac{1}{2s} \omega_s \\ \text{bzw. } &\sum_{n \geqslant 2} (n^s - 1)^{-1} = 1 - \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s} \omega_s \end{aligned} \tag{15}$$

und wir haben offenbar $\sum_{n \geqslant 2} (n^t - 1)^{-1}$ für gerades $t \geqslant 4$ nach oben abzuschätzen:

$$\sum_{n\geqslant 2}(n^t-1)^{-1}<\sum_{n\geqslant 2}(n^{t-1}+n^{t-2}+\ldots+1)^{-1}<t^{-1}\sum_{n\geqslant 2}n^{-(t-1)/2}<$$
$$<t^{-1}\int_1^\infty x^{-(t-1)/2}dx=2t^{-1}(t-3)^{-1}.$$

Hieraus folgt sogar $\omega_s>3$ für alle $s\geqslant 3$.

Wir zeigen nun wie Korollar 2 aus der Vermutung von SCHANUEL folgt. Bekanntlich ist das Kreisteilungspolynom $\Phi_s(X)$ das Minimalpolynom von $\xi:=\xi_1=\exp(2\pi i/s)$. Der Grad von Φ_s ist $\varphi:=\varphi(s)$ mit Eulers Phifunktion, also

$$\Phi_s(X)=X^\varphi+a_{\varphi-1}X^{\varphi-1}+\ldots+a_0\in\mathbb{Z}[X].$$

Jedes $\xi_\sigma, 0\leqslant\sigma<s$ kann daher in eindeutiger Weise geschrieben werden in der Form

$$\begin{aligned}\xi_\sigma&=b_{0,\sigma}+b_{1,\sigma}\xi+\ldots+b_{\varphi-1,\sigma}\xi^{\varphi-1}=\\&=b_{0,\sigma}+b_{1,\sigma}\xi_1+\ldots+b_{\varphi-1,\sigma}\xi_{\varphi-1}\end{aligned}\tag{16}$$

mit gewissen $b_{\lambda,\sigma}\in\mathbb{Z}$ und $1,\xi_1,\ldots,\xi_{\varphi-1}$ sind über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige komplexe Zahlen und dasselbe gilt auch für die φ Zahlen $2\pi i$, $2\pi i\xi_1,\ldots,2\pi i\xi_{\varphi-1}$. Ist die Vermutung von SCHANUEL richtig, so ist der Transzendenzgrad des Körpers

$$K:=\mathbb{Q}\left(\xi,\pi i,e(\xi_1),\ldots,e(\xi_{\varphi-1})\right)$$

über $\mathbb{Q}$ mindestens φ. Nach (16) sind alle $e(\xi_\sigma)\in K$ und nach (14), Satz 2 und wegen $\omega_s>0$ ist

$$0\neq\omega_s=\pi i\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s/2}}^{s-1}\xi_\sigma\frac{e(\xi_\sigma)+1}{e(\xi_\sigma)-1}\in K$$

für alle $s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 3$.

Wäre nun ω_s algebraisch (über $\mathbb{Q}$), so sei $A_kX^k+\ldots+A_0\in\mathbb{Z}[X]$ sein Minimalpolynom, d. h.

$$A_k(\sum_\sigma\ldots)^k(\pi i)^k+\ldots+A_0=0.$$

Der Koeffizient von $(\pi i)^k$ verschwindet nicht und so kann geschlossen werden, daß der Transzendenzgrad von K über $\mathbb{Q}$ höchstens $\varphi-1$ wäre. Daher folgt für jedes $s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 3$ aus der Schanuelschen Vermutung mit (14) die Transzendenz von $\sum_{|n|\geqslant 2}(n^s-1)^{-1}$, was nach (*) Korollar 2 beinhaltet. Es sei vermerkt, daß für ungerade

$s \geqslant 3$ nur noch die Transzendenz mindestens einer der beiden Zahlen $\sum_{n=2}^{\infty} \gamma(n) n^{-s}$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^s + 1)^{-1}$ geschlossen werden kann; es treten hier die von der Auswertung der Riemannschen Zetafunktion an den ungeraden Argumentstellen $\geqslant 3$ wohlbekannten Schwierigkeiten auf.

Literatur

[1] ABRAMOWITZ, M., and I. A. STEGUN: Handbook of Mathematical Functions. 9th Ed. New York: Dover. 1970.

[2] BAKER, A.: Transcendental Number Theory. Cambridge: University Press. 1975.

[3] GOLOMB, S. W.: A new arithmetic function of combinatorial significance. J. Number Theory 5, 218—223 (1973).

[4] HANSEN, E. R.: A Table of Series and Products. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. 1975.

[5] MAHLER, K.: Application of a theorem by A. B. Shidlovski. Proc. Roy. Soc. London Ser. A **305**, 149—173 (1968).

[6] NIELSEN, N.: Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig: Teubner. 1906.

[7] SCHNEIDER, T.: Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer. 1957.

[8] VÄÄNÄNEN, K.: On a conjecture of Mahler concerning the algebraic independence of the values of some E-functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **512**, 46 p. (1972).

[9] WALDSCHMIDT, M.: Nombres Transcendants. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 402. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1974.

Prof. Dr. P. BUNDSCHUH
Mathematisches Institut der Universität zu Köln
Weyertal 86—90
D-5000 Köln 41, Bundesrepublik Deutschland