Monatshefte für Mathematik 82, 187—198 (1976)

Über die affin vollständigen, endlich erzeugbaren Moduln

Von

Wilfried Nöbauer, Wien

(Eingegangen am 27. Juni 1975)

Herrn Prof. Dr. E. Hlawka zum 60. Geburtstag gewidmet

Abstract

On the Affine Complete, Finitely Generated Modules. A universal algebra A is called k-affine complete, if any function of the Cartesian power A^k into A, which is compatible with all congruence relations of A, is a polynomial function. A is called affine complete, if it is k-affine complete for every integer k. In this paper, all affine complete finitely generated modules are characterized. Moreover, the paper contains some results on functions compatible with all congruence relations of an algebra, and on affine complete algebras in general.

Einleitung

Es sei A eine universale Algebra und $F_k(A)$ die k-stellige Funktionenalgebra auf A, d. h. die Menge aller k-stelligen Funktionen auf A mit Werten in A, versehen mit den durch punktweise Ausführung der Operationen von A definierten Operationen. Die von den Projektionen ξ_i und den konstanten Funktionen erzeugte Unteralgebra $P_k(A)$ von $F_k(A)$ heißt die *Algebra der k-stelligen Polynomfunktionen auf A.*

Eine Funktion $\varphi \in F_k(A)$ heißt *kompatibel*, wenn für jede Kongruenz Θ auf A aus $a_i \Theta b_i$, $i=1,2,\ldots,k$, stets folgt

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \Theta\, \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_k). \tag{1}$$

Wie man leicht erkennt, bildet die Menge $C_k(A)$ der kompatiblen Funktionen von A eine Unteralgebra von $F_k(A)$. Da die Projektionen und die Konstanten kompatibel sind, gilt daher $P_k(A) \subseteqq C_k(A)$. Die Algebra A heißt nun *k-affin vollständig*, wenn hier sogar das Gleichheitszeichen gilt, wenn also jede k-stellige kompatible Funktion eine Polynomfunktion ist. A heißt *affin vollständig*, wenn es k-affin vollständig für jedes k ist.

Der Begriff der kompatiblen Funktion wurde eingeführt von G. Grätzer, der die kompatiblen Funktionen als „Funktionen mit der Substitutionseigenschaft" bezeichnet. In seiner „Universal Algebra" ([3]) wirft Grätzer folgendes Problem auf: „Man bestimme alle Algebren, in denen jede Funktion mit der Substitutionseigenschaft eine Polynomfunktion ist." Zu diesem Problem wurden bisher verschiedene Beiträge vom Standpunkt der universalen Algebra geliefert, insbesondere von Werner. In [7] hat Werner für obige Algebren die Bezeichnung „affin vollständig" eingeführt. Das Problem ist jedoch noch weit von der Lösung entfernt, insbesondere sind die affin vollständigen Algebren in den meisten der „in der Natur vorkommenden" Klassen von Algebren noch nicht bekannt. Ergebnisse in dieser Richtung wurden bisher nur gefunden von Grätzer [2] (jede Boolesche Algebra ist affin vollständig) und von Iskander [4] (Bestimmung aller affin vollständigen subdirekten Produkte endlicher Primkörper). In der vorliegenden Arbeit soll im Anschluß an Untersuchungen von Lausch und Nöbauer [6] ein weiterer konkreter Beitrag zu dem von Grätzer gestellten Problem gegeben werden, und zwar bestimmen wir alle affin vollständigen endlich erzeugten Moduln. Dazu benötigen wir einige Resultate über affin vollständige Algebren im allgemeinen, die wir im ersten Teil der Arbeit herleiten.

Einige allgemeine Resultate über affin vollständige Algebren

Lemma 1: *Ist A k-affin vollständig, dann ist es l-affin vollständig für jedes $l \leq k$.*

Beweis: Sei $\varphi \in C_l(A)$. Wir definieren $\varphi' \in C_k(A)$ durch

$$\varphi'(u_1, u_2, \ldots, u_l, u_{l+1}, \ldots, u_k) = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_l), \tag{2}$$

dann ist φ' ersichtlich kompatibel, also läßt es sich als Wort in Konstanten c_i und den Projektionen ξ_i ausdrücken:

$$\varphi' = w(c_1, c_2, \ldots, c_r, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k). \tag{3}$$

Daraus folgt mit einer beliebigen Konstanten c:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_l) = w(c_1, c_2, \ldots, c_r, u_1, u_2, \ldots, u_l, c, c, \ldots, c), \tag{4}$$

also $\varphi \in P_l(A)$.

Lemma 2: *Die Funktion* $\varphi \in F_k(A)$ *ist dann und nur dann kompatibel, wenn für jedes* $i, 1 \leqq i \leqq k$, *und jedes* $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in A^{k-1}$ *die durch*

$$\psi(u) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, u, a_{i+1}, \ldots, a_k) \tag{5}$$

definierte Funktion $\psi \in F_1(A)$ *kompatibel ist.*

Beweis: Ergibt sich unmittelbar aus der Transitivität der Kongruenzrelationen.

Sind (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, r$, Elemente von $A \times A$, dann bezeichnen wir mit $A((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r))$ die von den (a_i, b_i) erzeugte Kongruenz auf A.

Lemma 3: *Die Funktion* $\varphi \in F_k(A)$ *ist dann und nur dann kompatibel, wenn gilt*

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k)\, A((a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k))\, \varphi_k(b_1, b_2, \ldots, b_k) \tag{6}$$

für alle $((a_1, a_2, \ldots, a_k), (b_1, b_2, \ldots, b_k)) \in A^k \times A^k$.

Beweis: Ergibt sich unmittelbar aus der Definition der von den (a_i, b_i) erzeugten Kongruenz.

Wir spezialisieren Lemma 3 auf Multioperatorgruppen. Sind $c_1, c_2, \ldots, c_r$ Elemente der Multioperatorgruppe A, dann bezeichnen wir das von diesen Elementen erzeugte Ideal von A mit $I(c_1, c_2, \ldots, c_r)$. Es gilt dann

Lemma 3a: *Sei* A *eine Multioperatorgruppe. Die Funktion* $\varphi \in F_k(A)$ *ist dann und nur dann kompatibel, wenn gilt*

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k) - \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in I(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_k - b_k) \tag{7}$$

für alle $((a_1, a_2, \ldots, a_k), (b_1, b_2, \ldots, b_k)) \in A^k \times A^k$.

Beweis: Folgt sofort aus Lemma 3, wenn man beachtet, daß der Kern der Kongruenz $A((a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k))$ das Ideal

$$I(a_1 - b_1, \ldots, a_k - b_k) \text{ ist.}$$

Lemma 4: *Sei die Algebra* $A = B \times C$ *ein direktes Produkt der Algebren* B, C *und sei* $\varphi \in C_k(A)$. *Dann gibt es eindeutig bestimmte* $\varrho \in C_k(B)$ *und* $\sigma \in C_k(C)$, *so daß gilt*

$$\varphi((b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)) = (\varrho(b_1, b_2, \ldots, b_k), \sigma(c_1, c_2, \ldots, c_k)) \tag{8}$$

für alle $((b_1, c_1), (b_2, c_2), \ldots, (b_k, c_k)) \in A^k$.

Beweis: Es existieren Abbildungen $\varrho: A^k \to B$ und $\sigma: A^k \to C$, so daß

$$\begin{aligned} &\varphi\big((b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)\big) = \\ &\quad = \big(\varrho\big((b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)\big), \sigma\big((b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)\big)\big). \end{aligned} \tag{9}$$

Bezeichnen wir mit π die Projektion von A auf B, dann gilt

$$\varphi\big((b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)\big) \ker \pi\, \varphi\big((b_1, \bar{c}_1), \ldots, (b_k, \bar{c}_k)\big); \tag{10}$$

daraus folgt

$$\varrho\big((b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)\big) = \varrho\big((b_1, \bar{c}_1), \ldots, (b_k, \bar{c}_k)\big) = \varrho\,(b_1, \ldots, b_k) \tag{11}$$

und analog gilt

$$\sigma\big((b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)\big) = \sigma\,(c_1, \ldots, c_k). \tag{12}$$

Wie sofort zu sehen ist, sind ϱ und σ eindeutig bestimmt. Ist Θ eine Kongruenz auf B, dann ist durch

$$(b, c)\, \Theta_1\, (\bar{b}, \bar{c}) \Leftrightarrow b\, \Theta\, \bar{b} \tag{13}$$

eine Kongruenz Θ_1 auf A definiert. Aus der Kompatibilität von φ folgt daher die Kompatibilität von ϱ, und ebenso ergibt sich die Kompatibilität von σ.

Ist $A = B \times C$ ein direktes Produkt der Algebren B, C, und sind Λ, M Kongruenzen auf B bzw. C, dann wird durch

$$(b, c)\, (\Lambda \times M)\, (\bar{b}, \bar{c}) \Leftrightarrow b\, \Lambda\, \bar{b} \text{ und } c\, M\, \bar{c} \tag{14}$$

eine Kongruenz $\Lambda \times M$ auf A definiert, genannt das *direkte Produkt der Kongruenzen* Λ, M.

Satz 1: *Sei $A = B \times C$. Ordnet man jedem $\varphi \in C_k(A)$ das durch Lemma 4 bestimmte $(\varrho, \sigma) \in C_k(B) \times C_k(C)$ zu, so erhält man einen Monomorphismus μ. Ist jede Kongruenz auf A das direkte Produkt einer Kongruenz auf B und einer Kongruenz auf C, dann ist dieser Monomorphismus ein Isomorphismus.*

Bemerkung: Direkte Produkte, welche die Bedingung der zweiten Aussage dieses Satzes erfüllen, wurden eingehend untersucht von Fraser und Horn [1].

Beweis von Satz 1: Daß die Zuordnung des Satzes ein Monomorphismus ist, überlegt man sich sehr leicht. Sei nun jede Kongruenz auf A das direkte Produkt einer Kongruenz auf B und einer Kongruenz auf C und $(\varrho, \sigma) \in C_k(B) \times C_k(C)$. Dann ist die durch die

Formel von Lemma 4 erklärte Funktion $\varphi \in F_k(A)$ kompatibel, denn ist $\Theta = A \times M$ eine Kongruenz auf A, dann folgt aus $(b_i, c_i)\,\Theta\,(\bar{b}_i, \bar{c}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, sofort

$$\varphi\big((b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)\big)\,\Theta\,\varphi\big((\bar{b}_1, \bar{c}_1), \ldots, (\bar{b}_k, \bar{c}_k)\big). \tag{15}$$

Spezialisieren wir Satz 1 auf Multioperatorgruppen, dann erhalten wir bei Berücksichtigung des Zusammenhanges zwischen Kongruenzen und Idealen sogleich

Satz 1a: *Ist die Multioperatorgruppe A das direkte Produkt der Multioperatorgruppen B und C, und ist jedes Ideal auf A das direkte Produkt eines Ideals auf B und eines Ideals auf C, dann ist der Monomorphismus von Satz 1 ein Isomorphismus.*

Eine leichte Überlegung zeigt, daß die Bedingung von Satz 1a für endliche Gruppen teilerfremder Ordnung und Ringe mit Einselement erfüllt ist, also gilt folgendes:

Korollar: Sind B und C endliche Gruppen mit teilerfremden Ordnungen oder sind B und C Ringe mit Einselement, dann ist der Monomorphismus von Satz 1 ein Isomorphismus.

Lemma 5: *Sei $A = B \times C$ und μ der Monomorphismus von Satz 1. Ist μ ein Isomorphismus und A k-affin vollständig, dann sind dies auch B und C. Induziert umgekehrt μ einen Isomorphismus von $P_k(A)$ auf $P_k(B) \times P_k(C)$ und sind B, C beide k-affin vollständig, dann ist dies auch A.*

Beweis: Da sich jedes Element von $P_k(A)$ als Wort in Elementen von A und den Projektionen $\xi_1, \ldots, \xi_k$ darstellen läßt, gilt stets

$$\mu\, P_k(A) \subseteqq P_k(B) \times P_k(C).$$

Ist nun μ ein Isomorphismus, und ist A k-affin vollständig, dann haben wir

$$\mu\, P_k(A) \subseteqq P_k(B) \times P_k(C) \subseteqq C_k(B) \times C_k(C) = \mu\, C_k(A) = \mu\, P_k(A), \tag{16}$$

also $P_k(B) \times P_k(C) = C_k(B) \times C_k(C)$, daher sind B, C beide k-affin vollständig.

Induziert umgekehrt μ einen Isomorphismus von $P_k(A)$ auf $P_k(B) \times P_k(C)$ und sind B, C beide k-affin vollständig, dann haben wir

$$\mu\, C_k(A) \subseteqq C_k(B) \times C_k(C) = P_k(B) \times P_k(C) = \mu\, P_k(A), \tag{17}$$

also gilt $\mu P_k(A) = \mu C_k(A)$. Da μ ein Monomorphismus ist, folgt $P_k(A) = C_k(A)$.

Satz 2: *Sind B und C endliche Gruppen mit teilerfremden Ordnungen oder sind B und C Ringe mit Einselement, dann ist $B \times C$ genau dann k-affin vollständig, wenn B, C beide k-affin vollständig sind.*

Beweis: Nach dem Korollar zu Satz 1a gilt in diesen Fällen

$$\mu C_k(A) = C_k(B) \times C_k(C). \tag{18}$$

Wie in [5] im ersten Fall explizit gezeigt wurde und wie im zweiten Fall aus Resultaten von [5] — wo dies nur für kommutative Ringe mit Einselement bewiesen wurde — leicht folgt, gilt aber auch

$$\mu P_k(A) = P_k(B) \times P_k(C). \tag{19}$$

Bestimmung aller affin vollständigen endlich erzeugten Moduln

Zunächst bestimmen wir alle k-affin vollständigen endlichen Moduln. Wegen Satz 2 und dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen genügt es, alle k-affin vollständigen Moduln von Primzahlpotenzordnung zu ermitteln.

In Lausch—Nöbauer [6] wurden alle 1-affin vollständigen Moduln von Primzahlpotenzordnung bestimmt. Wir formulieren das dort erhaltene Resultat als

Satz 3: *Sei p eine Primzahl, Z_{p^e} der zyklische Modul der Ordnung p^e und*

$$M = Z_{p^{e_1}} \oplus Z_{p^{e_2}} \oplus \ldots \oplus Z_{p^{e_r}}, \quad e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_r \tag{20}$$

ein endlicher p-Modul. M ist 1-affin vollständig genau dann, wenn

a) $r > 1, e_1 = e_2, p$ *beliebig*

b) $r > 1, e_1 = e_2 + 1, p = 2$

c) $r = 1, e_1 = 1, p = 2$.

Nun beweisen wir

Satz 4: *Der endliche p-Modul M von Satz 3 ist im Fall a) affin vollständig, im Fall b) und im Fall c) aber für $k > 1$ nicht k-affin vollständig.*

Wir zerlegen den Beweis in einige Teilschritte.

Lemma 6: *Im Fall a) ist M k-affin vollständig für jedes k.*

Beweis: Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig, sie sei daher für $k—1$ statt k schon bewiesen. Sei nun $\varphi \in C_k(M)$.

Für festes $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ gilt dann $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) \in C_1(M)$, daher gilt

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) = a(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) + \\ + r(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) x_k. \tag{21}$$

Daraus folgt

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 0) = a(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}). \tag{22}$$

Da $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 0) \in C_{k-1}(M)$, folgt aus der Induktionsannahme

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 0) = a + r_1 x_1 + \ldots + r_{k-1} x_{k-1} \tag{23}$$

und somit

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) = a + r_1 x_1 + \ldots + r_{k-1} x_{k-1} + \\ + r(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) x_k. \tag{24}$$

Da man wegen $k \geqq 2$ eine analoge Überlegung mit vertauschten Rollen von x_1 und x_k durchführen kann, gilt auch

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) = b + s(x_2, x_3, \ldots, x_k) x_1 + \\ + s_2 x_2 + \ldots + s_k x_k. \tag{25}$$

Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke ergibt

$$a + r_1 x_1 + \ldots + r_{k-1} x_{k-1} + r(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) x_k = \\ = b + s(x_2, x_3, \ldots, x_k) x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_k x_k, \tag{26}$$

und zwar gilt dies für alle $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Setzt man $x_1 = x_2 = \ldots = = x_k = 0$, dann erhält man $a = b$, also kann man in obiger Gleichung a und b streichen. Setzt man im Fall $k > 2$ in der verbleibenden Gleichung $x_1 = x_k = 0$, dann folgt

$$r_2 x_2 + \ldots + r_{k-1} x_{k-1} = s_2 x_2 + \ldots + s_{k-1} x_{k-1} \\ \text{für alle } x_2, \ldots, x_k, \tag{27}$$

also gilt für alle $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Gleichung

$$r_1 x_1 + r(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) x_k = s(x_2, x_3, \ldots, x_k) x_1 + s_k x_k, \tag{28}$$

daher

$$\big(r_1 - s(x_2, x_3, \ldots, x_k)\big) x_1 = \big(s_k - r(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})\big) x_k. \tag{29}$$

Hält man in dieser Beziehung $x_2, x_3, \ldots, x_k$ fest, so erkennt man, daß

$$\big(r_1 - s(x_2, x_3, \ldots, x_k)\big) x_1 \in [x_k] \text{ für alle } x_1 \in M, \tag{30}$$

wo $[x_k]$ den von x_k erzeugten zyklischen Untermodul bedeutet. Daraus folgt, daß $r_1 - s(x_2, x_3, \ldots, x_k)$ durch den Exponenten des Faktormoduls $M/[x_k]$ teilbar ist.

Auf Grund unserer Voraussetzung über M hat nun aber dieser Exponent für jedes x_k den Wert p^{e_1} und stimmt daher mit dem Exponenten von M überein. Daher gilt

$$s(x_2, x_3, \ldots, x_k) = r_1 \text{ für alle } x_2, x_3, \ldots, x_k \tag{31}$$

und wir haben

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) = b + r_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_k x_k . \tag{32}$$

Lemma 7: *Ist p eine Primzahl und $M = Z_{p^e}$ der zyklische Modul der Ordnung p^e, $e > 0$, dann gilt*

$$|C_2(M)| = p^{p^2((p^{2e}-1)/(p^2-1))} . \tag{33}$$

Beweis: Wir können M als die additive Gruppe G_{p^e} der ganzen Zahlen $\bmod p^e$ auffassen und daher jedes Element von Z_{p^e} eindeutig darstellen in der Gestalt

$$\sum_{i=0}^{e-1} r_i p^i, \quad 0 \leqq r_i < p . \tag{34}$$

Es sind dann alle $\varphi \in C_2(M)$ in eindeutiger Weise gegeben durch die Funktionen von der Gestalt

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{e-1} r_i p^i, \sum_{i=0}^{e-1} s_i p^i\right) = \sum_{i=0}^{e-1} \pi_i(r_0, r_1, \ldots, r_i, s_0, s_1, \ldots, s_i) p^i , \tag{35}$$

wo π_i eine beliebige Funktion auf $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{2(i+1)}$ mit Werten in $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ ist. Denn da jeder Untermodul von M aus allen Vielfachen einer Potenz p^f besteht, ist jedes derartige φ kompatibel. Umgekehrt läßt sich jedes $\varphi \in F_2(M)$ jedenfalls auf eindeutige Weise schreiben als

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{e-1} r_i p^i, \sum_{i=0}^{e-1} s_i p^i\right) = \sum_{i=0}^{e-1} \pi_i(r_0, r_1, \ldots, r_{e-1}, s_0, s_1, \ldots, s_{e-1}) p^i . \tag{36}$$

Ist φ kompatibel, dann hängt $\pi_i(r_0, r_1, \ldots, r_{e-1}, s_0, s_1, \ldots, s_{e-1})$ nur von $r_0, r_1, \ldots, r_i, s_0, s_1, \ldots, s_i$ ab und φ ist von der oben angegebenen Gestalt. Eine einfache Abzählung ergibt nun sofort die Formel von Lemma 7.

Lemma 8: *Im Fall c) ist M nicht 2-affin vollständig.*

Beweis: Nach Lemma 7 gilt in diesem Fall $|C_2(M)| = 2^4$. Die Elemente von $P_2(M)$ aber sind alle von der Gestalt $a + r_1 x_1 + r_2 x_2$; also gilt $|P_2(M)| = 2^3$.

Lemma 9: *Sei M ein Modul wie in Satz 3 mit $r > 1$ und sei w_1 ein erzeugendes Element von $Z_{p^{e_1}}$. Seien die Elemente $z_i \in M$, $i = 1, 2$, in der eindeutigen Darstellung*

$$\begin{gathered} z_i = (r_i + p^{e_1 - e_2} R_i) w_1 + y_i \\ \textit{mit} \quad 0 \leqq r_i < p^{e_1 - e_2},\ 0 \leqq R_i < p^{e_2},\ y_i \in Z_{p^{e_2}} \oplus \ldots \oplus Z_{p^{e_r}} \end{gathered} \tag{37}$$

gegeben, und sei $q \in P_2(M)$ sowie $\sigma \in C_2(G_{p^{e_1 - e_2}})$. Dann ist durch

$$\varphi(z_1, z_2) = q(z_1, z_2) + p^{e_2} \sigma(r_1, r_2) w_1 \tag{38}$$

eine Funktion aus $C_2(M)$ definiert.

Beweis: Hält man z_2 in φ fest, so erhält man eine Funktion

$$\psi(z_1) = p(z_1) + p^{e_2} \tau(r_1) w_1, \tag{39}$$

wo $p \in P_1(M)$ und $\tau(r_1) \in C_1(G_{p^{e_1 - e_2}})$. Wie in Lausch—Nöbauer [6] gezeigt wurde, gilt daher $\psi \in C_1(M)$. Auf die gleiche Art erkennt man, daß die durch Festhalten von z_1 in φ sich ergebende Funktion zu $C_1(M)$ gehört. Nach Lemma 2 gilt also $\varphi \in C_2(M)$.

Lemma 10: *Sei M ein Modul wie in Satz 3 mit $r > 1$. Dann gilt*

$$|C_2(M)| \geqq |M| \, p^{3e_2 - e_1} |C_2(Z_{p^{e_1 - e_2}})|. \tag{40}$$

Beweis: Wir betrachten die Funktionen $\varphi \in F_2(M)$ von der Gestalt

$$\varphi(z_1, z_2) = a + t_1 z_1 + t_2 z_2 + p^{e_2} \sigma(r_1, r_2) w_1 \tag{41}$$

und lassen hier a ein volles Vertretungssystem modulo $p^{e_2} M$, die t_i je ein volles Vertretungssystem modulo p^{e_2} und das σ ganz $C_2(G_{p^{e_1 - e_2}})$ durchlaufen. Nach Lemma 9 sind alle diese φ kompatibel. Angenommen, es wären zwei derartige Funktionen gleich, dann hätten wir

$$a + t_1 z_1 + t_2 z_2 + p^{e_2} \sigma(r_1, r_2) w_1 = \bar{a} + \bar{t}_1 z_1 + \bar{t}_2 z_2 + p^{e_2} \bar{\sigma}(r_1, r_2) w_1, \tag{42}$$

daraus folgt

$$(a - \bar{a}) + (t_1 - \bar{t}_1) z_1 + (t_2 - \bar{t}_2) z_2 = p^{e_2} (\bar{\sigma}(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)) w_1. \tag{43}$$

Setzt man $z_1 = z_2 = 0$, dann erhält man $a - \bar{a} \in p^{e_2} M$, also $a = \bar{a}$. Setzt man $z_1 = w_1$, $z_2 = 0$, erhält man $(t_1 - \bar{t}_1) w_1 \in [p^{e_2} w_1]$, also $t_1 = \bar{t}_1$, und analog folgt $t_2 = \bar{t}_2$. Wir haben also

$$p^{e_2}(\bar{\sigma}(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)) w_1 = 0 \text{ für alle } r_1, r_2, \tag{44}$$

also folgt $\sigma = \bar{\sigma}$.

Zählt man die Funktionen φ ab, so erhält man

$$|C_2(M)| \geqq \frac{|M|}{p^{e_1 - e_2}} p^{2e_2} |C_2(Z_{p^{e_1 - e_2}})|. \tag{45}$$

Lemma 11: *Im Fall b) ist M nicht 2-affin vollständig.*

Beweis: In diesem Fall haben wir einerseits nach Lemma 10 und Lemma 7:

$$|C_2(M)| \geqq |M| \, 2^{2e_2 - 1} |C_2(Z_2)| = |M| \, 2^{2e_2 + 3}, \tag{46}$$

andererseits gilt

$$|P_2(M)| = |M| \, 2^{2e_1} = |M| \, 2^{2e_2 + 2}. \tag{47}$$

Wegen Lemma 1 ist daher Satz 4 vollständig bewiesen.

Nun wenden wir uns den affin vollständigen endlich erzeugbaren unendlichen Moduln zu. Wir beweisen folgenden

Satz 5: *Sei gegeben ein endlich erzeugbarer unendlicher Modul*

$$M = Z_1 \oplus Z_2 \oplus \ldots \oplus Z_s \oplus T, \tag{48}$$

wo $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ unendliche zyklische Moduln sind und T ein endlicher Modul ist. M ist affin vollständig genau dann, wenn $s \geqq 2$. Im Fall $s = 1$ hingegen ist M nicht einmal 1-affin vollständig.

Wir zerlegen den Beweis wieder in Teilschritte.

Lemma 12: *Sei $M = Z \oplus T$, wo Z ein unendlicher zyklischer Modul und T ein endlicher Modul der Ordnung $|T| \geqq 1$ ist. Dann ist M nicht 1-affin vollständig.*

Beweis: Sei Z die additive Gruppe der ganzen Zahlen und t der Exponent von T. Wir betrachten die Funktion $f \in F_1(M)$, welche definienent ist durch

$$f(x + u) = t x^2 \text{ für alle } x \in Z, u \in T. \tag{49}$$

f ist kompatibel, denn wir haben

$$\begin{aligned} f(x+u) - f(y+v) &= t x^2 - t y^2 = (x+y)[t(x-y)] = \\ &= (x+y) t (x - y + u - v) \in [(x+u) - (y+v)], \end{aligned} \tag{50}$$

woraus nach Lemma 3a in der Tat die Kompatibilität von f folgt. f ist aber keine Polynomfunktion, denn andernfalls wäre für alle $x \in Z$, $u \in T$

$$t x^2 = a + r(x+u). \tag{51}$$

Setzt man $x = u = 0$, erhält man $a = 0$, also folgt $r(x+u) = tx^2$. Dies gilt auch für $u = 0$, daher folgt $tx^2 = rx$ für alle $x \in Z$, ein Widerspruch.

Lemma 13: *Sei $M = Z \oplus U$, wo Z ein unendlicher zyklischer Modul und U ein Modul mit mindestens einem Element unendlicher Ordnung ist. Dann ist M 1-affin vollständig.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jedes $f \in C_1(M)$ mit $f(0) = 0$ eine Polynomfunktion ist. Denn ist $g \in C_1(M)$, dann ist auch $f = g - g(0) \in C_1(M)$ und erfüllt $f(0) = 0$.

Sei nun also ein derartiges f gegeben. Für beliebiges $x \in M$ gilt $x \equiv 0 \bmod [x]$, daraus folgt $f(x) \equiv 0 \bmod [x]$, also $f(x) = r(x)x$. Ist auch $y \in M$, so folgt wegen Lemma 3a, daß $f(y) - f(x) \in [y - x]$. Das ergibt

$$r(y)y - r(x)x \in [y - x]; \tag{52}$$

da aber auch

$$r(y)y - r(y)x \in [y - x], \tag{53}$$

ergibt sich durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen

$$\bigl(r(y) - r(x)\bigr)x \in [y - x] \cap [x]. \tag{54}$$

Hier wähle ich nun $x \in Z$ mit $x \neq 0$, und $y = x + u$ mit $u \in U$, dann wird dies zu

$$\bigl(r(x+u) - r(x)\bigr)x = 0. \tag{55}$$

Da x unendliche Ordnung hat, gilt also $r(x+u) = r(x)$ für alle $u \in U$.

Ich wähle nun ein $v \in U$ mit unendlicher Ordnung, dann erhalte ich wie vorher für beliebiges $x \in Z$

$$\bigl(r(x+v) - r(v)\bigr)v \in [x] \cap [v] = \{0\}, \tag{56}$$

also gilt $r(x+v) = r(v)$ für alle $x \in Z$.

Somit haben wir

$$r(x) = r(x+v) = r(v) \text{ für alle } x \in Z \text{ mit } x \neq 0, \tag{57}$$

und somit ergibt sich weiter für alle $x \in Z$ mit $x \neq 0$ und alle $u \in U$

$$r(x+u) = r(v) = r, \tag{58}$$

daher

$$f(x+u)=r\cdot(x+u). \tag{59}$$

Nach Lemma 4 gilt aber auch

$$f(x+u)=\varrho(x)+\sigma(u) \text{ mit } \varrho\in C_1(Z) \text{ und } \sigma\in C_1(U). \tag{60}$$

Vergleich mit dem vorhergehenden Ausdruck ergibt

$$rx+ru=\varrho(x)+\sigma(u) \tag{61}$$

für alle $x\in Z$ mit $x\neq 0$ und alle $u\in U$, also haben wir

$$\varrho(x)=rx \text{ für alle } x\in Z \text{ mit } x\neq 0, \tag{62}$$

$$\sigma(u)=ru \text{ für alle } u\in U. \tag{63}$$

Schließlich gilt $0=f(0)=f(0+0)=\varrho(0)+\sigma(0)$, das ergibt $\varrho(0)=$ $=0=r0$. Somit haben wir

$$f(x+u)=\varrho(x)+\sigma(u)=r\cdot(x+u) \text{ für alle } x+u\in M. \tag{64}$$

Lemma 14: *Erfüllt M die Voraussetzungen von Lemma 13, dann ist M k-affin vollständig für jedes k.*

Beweis: Der Beweis von Lemma 6 läßt sich fast wörtlich auf den vorliegenden Fall übertragen.

Damit ist der Beweis von Satz 5 beendet.

Literatur

[1] FRASER, G. A., and A. HORN: Congruence relations in direct products. Proc. A. M. S. **26**, 390—394 (1970).

[2] GRÄTZER, G.: Notes on lattice theory II: On Boolean functions. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **7**, 693—697 (1962).

[3] GRÄTZER, G.: Universal Algebra. Toronto—London—Melbourne: Van Nostrand. 1968.

[4] ISKANDER, A.: Algebraic functions on p-rings. Coll. Math. **25**, 37—41 (1972).

[5] LAUSCH, H., and W. NÖBAUER: Algebra of Polynomials. Amsterdam—London—New York: North-Holland. 1973.

[6] LAUSCH, H., und W. NÖBAUER: Funktionen auf endlichen Gruppen. Erscheint in Publ. Math. Debrecen.

[7] WERNER, H.: Produkte von Kongruenzklassengeometrien universeller Algebren. Math. Z. **121**, 111—140 (1971).

Prof. Dr. W. NÖBAUER
Institut für Algebra und Mathematische Strukturtheorie
Technische Universität
Argentinierstraße 8
A-1040 Wien, Österreich