Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

M. Fekete in Budapest.

Einleitung.

In seiner gleichbetitelten interessanten Abhandlung (Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 377—402) hat Herr I. Schur u. a. gezeigt, daß unter gewissen Bedingungen zu einem reellen Intervall J oder einem Kreis K mit reellem Mittelpunkt bei vorgeschriebenem ganzzahligen positiven a_0 nur endlich viele Gleichungen

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante gehören, deren Wurzeln sämtlich in J bzw. K enthalten sind.

Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist, Kriterien für die Endlichkeit der Anzahl von Gleichungen der Schar (1) aufzustellen, bei denen sämtliche Wurzeln einer *allgemeinen* unendlichen, beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge angehören.

Herr Schur gründet seine Untersuchungen auf die Auswertung des größten Wertes M_n, welchen der absolute Betrag der Diskriminante

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\varkappa<\lambda}^{1 \ldots n} (x_\varkappa - x_\lambda)^2 \qquad (n \geqq 2)$$

der n Größen x_ν annehmen kann, falls dieselben auf ein Intervall (oder einen Kreis) beschränkt sind.

Die Grundlage unserer Entwicklungen bildet der Umstand, daß der Maximalwert von $|\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ auch im Falle einer beliebig gegebenen unendlichen, abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge E vorhanden ist und sein Verhalten bei wachsendem n auch dann zu verfolgen ist, wenn seine

Auswertung für feste Werte von n wegen der Allgemeinheit der Menge E auf Schwierigkeiten stößt. In der Tat, ist $\mathsf{M}_n = \mathsf{M}_n(E)$ der größte Wert, dessen $|\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ für zur Menge gehörigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fähig ist, *so bilden die Größen* $\sqrt[2\cdot 1]{\mathsf{M}_2}, \sqrt[3\cdot 2]{\mathsf{M}_3}, \ldots, \sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n}, \ldots$ *eine monoton abnehmende Folge und also existiert* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n} = \mathsf{M} = \mathsf{M}(E)$ (vgl. § 1, Satz I*).

Bevor wir diese, auf einfachstem Wege beweisbare Tatsache zu dem oben festgelegten Zwecke anwenden, stellen wir ihr im § 2 einen einfachen Satz zur Seite, über die Maximalwerte m_n der absoluten Beträge der zu E gehörigen Tschebyscheffschen Polynome $t_n(x)$ (Satz II), um nachher im folgenden Paragraphen einen für uns wichtigen Zusammenhang zwischen den — von uns auch geometrisch interpretierten — Größen $\sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n} = d_n$ und $\sqrt[n]{m_n} = \varrho_n$ herzuleiten, der in der einfachen Formel $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n$ seinen Ausdruck findet (Satz III). Im Schlußparagraphen des vorbereitenden I. Teiles führt uns dieser Zusammenhang in Verbindung mit gewissen Ergebnissen der Herren Faber und Szegö zur Auswertung von $\lim d_n$ in einem bemerkenswerten speziellen Falle, nämlich in dem Fall, wo die Komplementärmenge von E einen einfach zusammenhängenden Bereich bildet (Satz IX).

Nach allen diesen Vorbereitungen befassen wir uns im II. Teile mit der Frage nach der Anzahl aller ganzzahligen Gleichungen, deren sämtliche Wurzeln einfach sind und einer gegebenen Punktmenge von der charakterisierten Art angehören. Zuerst betrachten wir Gleichungen der Form (1) mit festem höchsten Koeffizienten a_0 und beweisen den Satz, daß *unter denselben nur endlich viele vorkommen können, deren Wurzeln in eine Punktmenge von „transfinitem Durchmesser“* < 1 *fallen, d. h. in eine Menge, für welche* $\lim\limits_{n\to\infty} d_n < 1$ *ist* (vgl. § 5, Satz X).

Nach etlichen Verschärfungen und Ergänzungen dieses Satzes gehen wir im § 6 (ähnlich wie das Herr Schur in den von ihm behandelten speziellen Fällen getan hat) zu Gleichungen (1) mit höchstem Koeffizienten $a_0 \leqq \alpha\beta^n$ $(\alpha > 0, \beta > 1)$ über, d. i. zu Gleichungen, bei denen dieser Koeffizient mit dem Gleichungsgrade nach Art einer geometrischen Progression wachsen kann und stellen wieder hinreichende Bedingungen für die Endlichkeit der Anzahl der Gleichungen namentlich mit Hilfe des transfiniten Durchmessers von E und der für das Anwachsen von a_0 maßgebenden Größe β auf (Satz XII). Die gewonnenen Ergebnisse werden in demselben Paragraphen auf Punktmengen E angewendet, deren Komplementärmenge einen einfach zusammenhängenden Bereich bildet (Satz XIII).

Bisher bedienten wir uns der „*Diskriminantenmethode*" des Herrn Schur. Im Schlußparagraphen 7 greifen wir unser Problem mit einer neuen Methode an, welche Verfasser mit seinem verstorbenen Freunde Franz Lukács schon früher für den speziellen Fall eines reellen Intervalles ausgebildet hat. Mit dieser „*Resultantenmethode*" gewinnen wir die bisherigen Ergebnisse von neuem und beleuchten sie von neuer Seite. Um die Anwendung der fraglichen Methode zu ermöglichen, stellen wir die an und für sich interessante Tatsache fest, daß *in jeder beschränkten, abgeschlossenen, in bezug auf die reelle Achse symmetrischen ebenen Punktmenge von einem transfiniten Durchmesser* <1 *die Null durch ganzzahlige Polynome beliebig fein approximiert werden kann* (Satz XIV).

I. Teil.

Geometrische Charakteristiken für ebene Punktmengen.

§ 1.

Über die Folge der Durchmesser bei einer beschränkten und abgeschlossenen unendlichen Punktmenge.

Es sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der x-Ebene und es sei $V_n = V_n(E)$ der größte Wert, den der absolute Betrag der Vandermondeschen Determinante

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_\nu^{n-1}, x_\nu^{n-2}, \ldots, x_\nu, 1| = \prod_{\substack{1 \\ \varkappa<\lambda}}^{n}(x_\varkappa - x_\lambda) \quad (n \geqq 2)$$

der n Größen x_ν annehmen kann, wenn dieselben voneinander unabhängig sämtliche Punkte von E durchlaufen.

Man betrachte die positiven Zahlen

$$(2) \qquad d_n = \sqrt[\binom{n}{2}]{V_n}$$

für $n = 2, 3, \ldots$. Ist $n = 2$, so bedeutet d_n die größte Sehne von E, eine Strecke, die üblicherweise als der Durchmesser von E bezeichnet wird; für $n \geqq 3$ bedeutet d_n das Maximum der geometrischen Mittelwerte, die aus sämtlichen Seiten irgendeines in E enthaltenen vollständigen n-Ecks gebildet sind; aus diesem Grunde sollen die Größen d_n auch für $n \geqq 3$ als Durchmesser der Menge E bezeichnet werden.

Wir wollen eine interessante Eigenschaft dieser Durchmesser in folgendem Satze formulieren

I. *Sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche, sonst beliebige ebene Punktmenge. Dann können ihre Durchmesser d_n bei wachsendem n niemals zunehmen.*

Zum Beweise sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}$ ein Punktsystem aus E, für welches $|V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})|$ ihren größten Wert annimmt, also

$$|V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1})| = V_{n+1}$$

ist. Aus der Gleichung

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1})$$
$$= (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)\ldots(\xi_1 - \xi_n)(\xi_1 - \xi_{n+1}) V(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n+1})$$

folgt nach der Definition der Größen ξ_k, V_n, V_{n+1} die Beziehung:

$$V_{n+1} \leqq |\xi_1 - \xi_2| \cdot |\xi_1 - \xi_3| \ldots |\xi_1 - \xi_{n+1}| \cdot V_n$$

und ähnlich kann man die weiteren Beziehungen:

$$V_{n+1} \leqq |\xi_2 - \xi_1| \cdot |\xi_2 - \xi_3| \ldots |\xi_2 - \xi_n| \cdot |\xi_2 - \xi_{n+1}| \cdot V_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{n+1} \leqq |\xi_{n+1} - \xi_1| \cdot |\xi_{n+1} - \xi_2| \ldots |\xi_{n+1} - \xi_n| \cdot V_n$$

herleiten.

Nun folgt aus denselben durch Multiplikation

$$V_{n+1}^{n+1} \leqq V_n^{n+1} \prod_{\substack{1 \\ \varkappa < \lambda}}^{n+1} |\xi_\varkappa - \xi_\lambda|^2 = V_n^{n+1} V_{n+1}^2$$

und folglich ist

(3) $$V_{n+1}^{n-1} \leqq V_n^{n+1},$$

also besteht die Beziehung

$$\sqrt[\binom{n+1}{2}]{V_{n+1}} \leqq \sqrt[\binom{n}{2}]{V_n},$$

w. z. b. w.

Bemerkung. Aus der eben bewiesenen Monotonie der Zahlen d_n folgt die bemerkenswerte Tatsache, daß *diese Zahlen bei unendlich wachsendem n einem Grenzwerte zustreben.* Wir bezeichnen diesen Grenzwert als den *transfiniten Durchmesser* von E.

Der späteren Anwendungen halber wollen wir den Satz I und die hinzugefügte Bemerkung auch folgendermaßen aussprechen:

I*. *Sei E irgendeine beschränkte und abgeschlossene unendliche ebene Punktmenge. M_n bedeute den größten Wert, dessen der absolute Betrag von der Diskriminante*

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{1 \\ \varkappa < \lambda}}^{n} (x_\varkappa - x_\lambda)^2$$

der n Größen x_ν fähig ist, falls dieselben in E beliebig variieren. Dann bilden die positiven Zahlen

$$\sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

eine Folge, deren Glieder bei wachsendem n niemals zunehmen und also einem endlichen, nichtnegativen Grenzwerte zustreben.

§ 2.

Über die Lemniskaten von kleinsten mittleren Radien, welche eine beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge überdecken.

Es sei E wiederum eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge in der x-Ebene und

$$t_n(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n$$

sei das zur E gehörige Tschebyscheffsche Polynom[1]) n-ten Grades, d. h. dasjenige Polynom, für welches das Maximum des absoluten Betrages auf E kleiner ausfällt, als für irgendein anderes Polynom mit demselben höchsten Gliede[2]). Wir wollen zunächst die Minimumeigenschaft, die dem Polynome $t_n(x)$ laut seiner Definition zukommt, geometrisch interpretieren: Sei $p(x)$ irgendein Polynom von der Gestalt

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

und m der größte Wert, dessen der absolute Betrag von $p(x)$ auf E fähig ist; dann bildet die Gesamtheit aller Punkte x, für welche die Beziehung

$$|p(x)| \leqq m \tag{4}$$

stattfindet, eine „Lemniskatenfläche“, die die Menge E „überdeckt“. Die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots x_n$ von $p(x)$ sind die *foci* der Lemniskatenlinie

$$|p(x)| = m, \tag{5}$$

welche den Rand dieser Fläche (4) bildet und die Abstände $|x - x_1|$, $|x - x_2|, \ldots, |x - x_n|$ bilden die *radii vectores*, welche zum Punkte x der Lemniskate (5) gehören. Den geometrischen Mittelwert dieser Radien, d. h. die n-te Wurzel von m wollen wir als den mittleren Radius der Lemniskate (5) bezeichnen. Nun sei $m_n = m_n(E)$ der größte Wert von $|t_n(x)|$ auf E. Dann läßt sich die Minimaleigenschaft von $t_n(x)$ geometrisch so aussprechen:

Die Lemniskate

$$|t_n(x)| = m_n \tag{6}$$

besitzt den kleinsten mittleren Radius unter sämtlichen Lemniskaten,

---

[1]) Kurz T-Polynom.

[2]) Existenz und Unität dieses Polynoms $t_n(x)$ folgt für allgemeine Punktmengen der charakterisierten Art aus gewissen Sätzen von Herrn de la Vallée-Poussin. Vgl. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe. [Bull. de l'Acad. r. de Belgique 3 (1911), S. 199–211.]

welche die Menge E überdeckende Lemniskatenflächen von der Form (4) umgrenzen.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft der mittleren Radien $\varrho_n = \sqrt[n]{m_n}$ der Überdeckungslemniskaten (6) sei im folgenden Satze formuliert:

II. *Es sei E eine beliebige beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der x-Ebene; $t_n(x)$ bedeute das zu E gehörige T-Polynom n-ten Grades und m_n sei der größte Wert von $|t_n(x)|$ auf E. Dann konvergieren die mittleren Radien $\varrho_n = \sqrt[n]{m_n}$ der Überdeckungslemniskaten (6) bei unendlich wachsendem n gegen einen endlichen Grenzwert.*

Zum Beweise setzen wir

$$\liminf_{n \to \infty} \varrho_n = \alpha, \qquad \limsup_{n \to \infty} \varrho_n = \beta;$$

da offenbar $\alpha \leqq \beta < \infty$ ist, so genügt es zu zeigen, daß $\beta \leqq \alpha$ ist. Sei ε irgendeine positive Größe; dann existiert ein solches $n = n(\varepsilon)$, für welches

$$n \geqq 2 \quad \text{und} \quad \varrho_n < \alpha + \varepsilon,$$

also überall auf E

$$|t_n(x)| < (\alpha + \varepsilon)^n$$

besteht. Ist nun k irgendeine positive ganze Zahl und l eine ganze Zahl $\geqq 1$, $\leqq n - 1$, so besteht ebenda auch die Ungleichheit

$$|t_n(x)^k \cdot x^l| < K(\alpha + \varepsilon)^{nk+l},$$

wobei K bei vorausbestimmtem ε nur von der Ausdehnung der beschränkten Menge E abhängt; daher ist für $k = 1, 2, \ldots$; $1 \leqq l \leqq n - 1$

$$m_{nk+l} < K(\alpha + \varepsilon)^{nk+l},$$

$$\varrho_{nk+l} < K^{\frac{1}{nk+l}}(\alpha + \varepsilon)$$

und folglich

$$\limsup_{\nu \to \infty} \varrho_\nu \leqq \alpha + \varepsilon,$$

d. h.

$$\beta \leqq \alpha + \varepsilon.$$

Daraus folgt aber $\beta \leqq \alpha$ und somit die Richtigkeit des Satzes II[3]).

---

[3]) Im Spezialfalle, wo E aus sämtlichen Punkten einer Lemniskatenlinie $|x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k| = \varrho^k$ von mittlerem Radius ϱ besteht, konvergieren die mittleren Radien ϱ_n der zugehörigen Überdeckungslemniskaten für $n \to \infty$ gegen ϱ; das folgt aus dem leicht beweisbaren Umstande, daß im genannten Falle die T-Polynome νk-ten Grades mit der ν-ten Potenz von $x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k$ zusammenfallen müssen. Vgl. auch VII. (Satz von Faber).

§ 3.

Über den Zusammenhang zwischen den Grenzwerten, denen die Folgen $\{d_n\}$ und $\{\varrho_n\}$ zustreben.

Wir haben in den beiden ersten Paragraphen für beschränkt-abgeschlossene unendliche Punktmengen zwei Folgen von geometrischen Charakteristiken dieser Mengen definiert: die der Durchmesser und die der kleinsten mittleren Radien der Überdeckungslemniskaten. Wir haben auch gezeigt, daß, wie auch diese Punktmengen sonst beschaffen seien, beide der genannten Folgen konvergieren. Da nun in dem folgenden alles darauf hinausläuft, zu entscheiden, welchem Grenzwerte diese Folgen zustreben, ist es für uns von besonderer Wichtigkeit, festzustellen, ob und welcher Zusammenhang zwischen beiden fraglichen Grenzwerten, bei Zugrundelegung einer und derselben Punktmenge, besteht.

Nun führt eine einfache Analyse zum folgenden, ganz allgemeinen Ergebnisse:

III. *Es sei E eine beliebige beschränkt-abgeschlossene unendliche ebene Punktmenge und*

$$d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots$$

sei die Folge der zu E gehörigen Durchmesser, des weiteren

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$$

die Folge der kleinsten mittleren Radien der Überdeckungslemniskaten von E. Dann konvergieren bei wachsendem n beide Folgen gegen denselben Grenzwert[4]).

Zur Begründung des Satzes III brauchen wir zwei Hilfssätze über die früher definierten Größen $V_n = V_n(E)$ und $m_n = m_n(E)$. Diese lauten wie folgt:

IV. *Ist E eine Punktmenge wie in* III, *so besteht die Beziehung*

$$m_n \leqq \frac{V_{n+1}}{V_n} \qquad (n \geqq 2).$$

---

[4]) Die Verknüpfung dieses Satzes und der Behauptung in der Fußnote [3]) führt zum Resultate, daß *der mittlere Radius einer beliebigen Lemniskatenlinie dem „transfiniten Durchmesser" derselben gleich ist.* Aus diesem Umstande folgen die beiden Tatsachen: 1. die in § 2 betrachteten Überdeckungslemniskaten $|t_n(x)| = m_n$ sind auch durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß ihr transfiniter Durchmesser kleiner ausfällt als der irgendeiner anderen Überdeckungslemniskate mit n focis; 2. Satz III läßt sich auch so interpretieren, daß die Punktmengen $|t_n(x)| \leqq m_n$ die Menge E in solcher Weise überdecken, daß zugleich die Folge ihrer transfiniten Durchmesser gegen den transfiniten Durchmesser der überdeckten Menge E konvergiert.

V. *Ist E eine Punktmenge wie in* III, *so gilt die Relation*

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \leqq (n+1)\, m_n \qquad (n \geqq 2).$$

Um den Hilfssatz IV zu beweisen, sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ein Punktsystem aus E, für welches der absolute Betrag der Vandermondeschen Determinante $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ihren Maximalwert $V_n = V_n(E)$ annimmt. Weiter sei ξ_0 ein solcher Punkt von E, in welchem

$$|(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)|$$

möglicht groß ausfällt. Dann ist

$$|\xi_0-\xi_1|\cdot|\xi_0-\xi_2|\ldots|\xi_0-\xi_n| = \left|\frac{V(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{V(\xi_1,\ldots,\xi_n)}\right| = \frac{V(\xi_0,\ldots,\xi_n)}{V_n}.$$

Nun ist aber das Produkt links $\geqq m_n = \underset{(E)}{\operatorname{Max}} |t_n(x)|$, der Zähler des rechtsstehenden Bruches jedoch $\leqq \underset{(E)}{\operatorname{Max}} |V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})| = V_{n+1}$, also

$$m_n \leqq \frac{V_{n+1}}{V_n},$$

w. z. b. w.[5]).

Den Beweis von V gründen wir auf die Identität:

$$(7)\ V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = |x_\nu^n, x_\nu^{n-1}, \ldots, x_\nu, 1| \equiv |t_n(x_\nu), x_\nu^{n-1}, \ldots, x_\nu, 1|.$$

Ist nämlich $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1}$ ein Punktsystem von E, für welches

$$|V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1})| = V_{n+1}$$

besteht, so folgt aus (7), daß

$$V_{n+1} \leqq |t_n(\eta_1)|\cdot|V(\eta_2,\eta_3,\ldots,\eta_n,\eta_{n+1})| + |t_n(\eta_2)|\cdot|V(\eta_1,\eta_3,\ldots,\eta_n,\eta_{n+1})|$$
$$+ \ldots + |t_n(\eta_{n+1})|\cdot|V(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)|,$$

also

$$V_{n+1} \leqq (n+1)\, m_n V_n$$

ist[6]). W. z. b. w.

---

[5]) Wir haben hier die Beziehung $\mu_n \leqq \frac{V_{n+1}}{V_n}$ mitbewiesen, wobei μ_n das Maximum des absoluten Betrages des zu E gehörigen n-ten T-Polynoms „in engerem Sinne“ auf E bezeichnet, d. i. eines Polynoms der Polynomschar von der Gestalt $x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$ *mit lauter in E liegenden Wurzeln*, für welches das Maximum des absoluten Betrages auf E möglichst klein ausfällt. Offenbar ist $\mu_n \geqq m_n$.

[6]) Diese Relation, vereint mit der Beziehung $\mu_n \leqq \frac{V_{n+1}}{V_n}$ [vgl. Fußnote [5])], führt zum interessanten Ergebnis: $\mu_n \leqq (n+1)\, m_n$.

Nunmehr, um aus IV und V zu III zu gelangen leiten wir aus diesen beiden Hilfssätzen mit Hinsicht auf

$$V_2 \leqq 2\, m_1$$

die Beziehung [7])

$$(8) \qquad m_1 m_2 \ldots m_{n-1} m_n \leqq V_{n+1} \leqq (n+1)!\, m_1 m_2 \ldots m_{n-1} m_n$$

ab. Daraus folgt auf Grund der Definition von ϱ_n, d_n die Ungleichheit

$$\varrho_1^1 \varrho_2^2 \varrho_3^3 \ldots \varrho_{n-1}^{n-1} \varrho_n^n \leqq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leqq (n+1)!\, \varrho_1^1 \varrho_2^2 \varrho_3^3 \ldots \varrho_{n-1}^{n-1} \varrho_n^n$$

und daher

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\varrho_1^1 \varrho_2^2 \ldots \varrho_n^n} \leqq d_{n+1} \leqq \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{(n+1)!}\; \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\varrho_1^1 \varrho_2^2 \ldots \varrho_n^n}.$$

Nun konvergiert offenbar bei wachsendem n mit ϱ_n zugleich auch der Mittelwert $\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\varrho_1^1 \varrho_2^2 \ldots \varrho_n^n}$ gegen einen Grenzwert und zwar gegen denselben, wie ϱ_n. Mit Hinsicht auf die Stirlingsche Formel folgt also aus (8)

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n = \lim_{n\to\infty} d_n.$$

Damit ist auch III bewiesen [8]).

Als eine Ergänzung zu III, IV und V wollen wir noch folgende, auch an sich interessante Tatsache zeigen:

VI. *Haben E, ϱ_n, d_n die Bedeutung wie oben, so besteht die Ungleichheit*

$$\varrho_n \leqq d_{n+1}.$$

Nach IV ist nämlich

$$\varrho_n \leqq \sqrt[n]{\frac{V_{n+1}}{V_n}} = \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{V_{n+1}^{\frac{n+1}{2}}}{V_n^{\frac{n+1}{2}}}};$$

nach (3) ist

$$V_{n+1}^{n-1} \leqq V_n^{n+1}.$$

---

[7]) Ich verdanke Herrn Szegö die folgende Bemerkung: Der zweite Teil der Ungleichung (8) kann verschärft werden; die Identität $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv \equiv | t_n(x_\nu), t_{n-1}(x_\nu), \ldots, t_1(x_\nu), 1 |$ führt nämlich – mit Hinzunahme des Hadamardschen Determinantensatzes – zur Beziehung: $V_{n+1} \leqq (n+1)^{\frac{n+1}{2}} m_1 m_2 \ldots m_{n-1} m_n$.

[8]) Aus den beiden Beziehungen $m_n \leqq \mu_n \leqq (n+1)\, m_n$ [vgl. Fußnote [5]) und [6])] folgt, daß auch $\lim \sqrt[n]{\mu_n} = \lim \varrho_n = \lim d_n$ ist.

Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$\varrho_n \leqq \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{V_{n+1}} = d_{n+1},$$

w. z. b. w.

§ 4.

Die Bestimmung des Grenzwertes der Durchmesserfolge in einem wichtigen Spezialfalle.

Wir wollen im vorliegenden Paragraphen den Grenzwert der zur Menge E gehörigen Durchmesserfolge in dem wichtigen Spezialfalle bestimmen, wo E eine solche beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der x-Ebene ist, deren Komplementärmenge einen einfach zusammenhängenden (den Punkt $x=\infty$ enthaltenden) Bereich B bildet. Es gibt dann nach einem grundlegenden Satze der Theorie der konformen Abbildung eine Funktion $z=\psi(x)$, welche den Bereich B schlicht auf das Äußere des Einheitskreises der z-Ebene abbildet, während die Punkte $x=\infty$ und $z=\infty$ einander entsprechen. Die inverse Funktion $x=\varphi(z)$ dieser Funktion $z=\psi(x)$ hat die folgende Form:

$$x=\varphi(z)=\tau z+\tau_0+\frac{\tau_1}{z}+\frac{\tau_2}{z^2}+\ldots+\frac{\tau_n}{z^n}+\ldots,$$

wobei $\tau \neq 0$ ist. Nun ist der absolute Betrag des „Abbildungsmoduls" τ *gleich dem Grenzwert der zu E gehörigen Durchmesserfolge.* Das folgern wir auf Grund unseres Satzes III aus den beiden nachstehenden Hilfssätzen:

VII. (Satz von Faber[9]). *Es sei C eine geschlossene analytische Kurve in der komplexen x-Ebene und $T_n(x)$ das zugehörige T-Polynom n-ten Grades; ferner sei der Maximalwert von $|T_n(x)|$ auf C:*

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |T_n(x)| = M_n .$$

Ist $x=\Phi(z)=cz+c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots+\frac{c_n}{z^n}+\ldots$ $(c \neq 0)$ eine Funktion, welche das Gebiet $|z|>1$ schlicht auf das Äußere der Kurve C abbildet, während die Punkte $z=\infty$ und $x=\infty$ einander entsprechen, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{|c|^n}=1 .$$

VIII. (Satz von Faber[10]). *Es habe C, sowie auch $T_n(x)$, M_n, $\Phi(z)$*

---

[9]) G. Faber: Über Tschebyscheffsche Polynome [Journal für Math. 150 (1919), S. 79–106], S. 86. Vgl. auch Faber, Potentialtheorie und konforme Abbildung [Sitzungsber. der math.-phys. Kl. der bay. Akad. d. Wiss. 1920, S. 49–64].

[10]) A. a. O.

und c dieselbe Bedeutung, wie im Satze VII. *Dann besteht die Relation*

$$M_n \geqq |c|^n.$$ [11])

Ist nämlich $t_n(x)$ das zur Menge E gehörige n-te T-Polynom und m_n das Maximum von $|t_n(x)|$ in E, so kann für die mittleren Radien $\varrho_n = \sqrt[n]{m_n}$ der Überdeckungslemniskaten $|t_n(x)| = m_n$ aus VII bzw. VIII die Beziehung

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n\to\infty} \varrho_n \leqq |\tau|,$$

bzw. die Ungleichheit

$$\text{(B)} \qquad \varrho_n \geqq |\tau| \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

hergeleitet werden; aus diesen beiden Beziehungen folgt aber die mit unserer Behauptung nach III äquivalente Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n = |\tau|$$

unmittelbar.

Wir beweisen zunächst den Grenzwertsatz (A):

Sei $R > 1$ und bedeute C_R diejenige geschlossene und doppelpunktlose analytische Kurve der x-Ebene, in welche die durch $x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots$ geleistete Abbildung den Kreis $|z| = R$ überführt. Dann ist

$$x = \Phi_R(z) = \tau R z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{Rz} + \frac{\tau_2}{R^2 z^2} + \ldots$$

eine Funktion, welche das Kreisäußere $|z| > 1$ auf das Äußere von C_R schlicht abbildet. Wendet man den Satz VII auf die Kurve C_R an, so gelangt man zur Relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(R)}{|\tau R|^n} = 1,$$

wobei $M_n(R)$ das Maximum des absoluten Betrages des zum Kreisbilde C_R gehörigen T-Polynoms von n-tem Grade auf C_R angibt. Aus dieser Gleichung folgt a fortiori

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n(R)} = |\tau| \cdot R.$$

Nun ist aber offenbar $M_n(R) \geqq m_n$, da E im Innern von C_R liegt; also ist

$$\lim \sqrt[n]{m_n} \leqq |\tau| \cdot R,$$

wie auch $R > 1$ gewählt sei. Man hat danach

$$\lim \sqrt[n]{m_n} \leqq |\tau|.$$ W. z. b. w.

Nunmehr gehen wir zum Beweise von (B) über.

---

[11]) Vgl. auch G. Szegö: Über orthogonale Polynome usw. Math. Zeitschrift 9 (1921), S. 254.

Es habe R, C_R, $\Phi_R(z)$, $M_n(R)$ dieselbe Bedeutung wie oben. Dann gilt nach VIII die Beziehung

$$M_n(R) \geqq |\tau R|^n;$$

es ist aber offenbar

$$\underset{(C_R)}{\mathrm{Max}} |t_n(x)| \geqq M_n(R),$$

also besteht die Ungleichung

$$\underset{(C_R)}{\mathrm{Max}} |t_n(x)| \geqq |\tau R|^n.$$

Wir haben bisher bewiesen: Wie auch $R > 1$ gewählt sei, kann man auf dem Kreisbilde C_R einen solchen Punkt $x(R)$ festsetzen, wo das zur Menge E gehörige T-Polynom n-ten Grades dem absoluten Betrage nach $> |\tau|^n$ ist. Nun sei $R_1, R_2, \ldots, R_\nu, \ldots$ eine unendliche, monoton abnehmende, gegen Eins konvergierende Folge, für welche der Grenzwert

$$\lim_{\nu \to \infty} x(R_\nu)$$

vorhanden ist; man bezeichne diesen Grenzwert mit ξ. (Die Existenz einer solchen Folge ergibt sich aus dem Umstande, daß die Menge aller Zahlen $x(R)$ für $1 < R < R_0$ beschränkt ist.)

Wir behaupten, ξ gehört zur Menge E. Im entgegengesetzten Falle würde nämlich für $\zeta = \psi(\xi)$ die Ungleichung $|\zeta| > 1$ gelten, also häuften sich die Bildpunkte $z_\nu = \psi[x(R_\nu)]$ der Punkte $x(R_\nu)$ um einen Grenzpunkt außerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$, obgleich die Größen $|z_\nu| = R_\nu$ — nach Voraussetzung — gegen Eins konvergieren. Nun ist aber ξ ein solcher Punkt, in dessen beliebiger Nähe Punkte existieren, wo $|t_n(x)| > |\tau|^n$ ist; daher ist $|t_n(\xi)| \geqq |\tau|^n$ und somit die Ungleichung

$$\varrho_n \geqq |\tau| \tag{B}$$

bewiesen.

Auf Grund von (A), (B) und III können wir den folgenden Satz[13]) aussprechen:

IX. *Es sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der x-Ebene, deren Komplementärmenge einen einfach zusammenhängenden Bereich B bildet. Ist*

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots$$

eine Funktion, welche das Äußere des Einheitskreises $|z| = 1$ schlicht

[13]) Herr Szegö hat ihn dem Verf. (in speziellerer Form) als eine Vermutung mitgeteilt und auch potentialtheoretisch interpretiert; auch die im Texte befindliche allgemeine Form des Satzes ist seiner Anregung zu verdanken.

auf den Bereich B abbildet, während die Punkte $z = \infty$ und $x = \infty$ einander entsprechen, so konvergieren die zu E gehörigen Durchmesser d_n bei unendlich wachsendem n gegen $|\tau|$.

II. Teil.

Über die Anzahl aller ganzzahliger Gleichungen, deren Wurzeln einer gegebenen Punktmenge angehören.

§ 5.

Gleichungen mit festem höchsten Koeffizienten.

Es sei E eine unendliche, beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der x-Ebene. Wir stellen uns die Frage, *wie viele Gleichungen*

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

mit lauter ganzen rationalen Koeffizienten und mit demselben höchsten Koeffizienten a_0 existieren, deren sämtliche Wurzeln einfach sind und der Menge E angehören?

Es ist zunächst klar, daß bei vorgeschriebenem Grade n nur endlich viele voneinander verschiedene Gleichungen (1) (eventuell keine) existieren können, welche den in der Fragestellung angegebenen Voraussetzungen entsprechen. Hat nämlich eine solche Gleichung ihre sämtlichen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in E und ist diese Menge in einem Kreise $|x| = \varrho$ enthalten (die Existenz eines solchen Kreises folgt aus der Beschränktheit von E), so ist

$$|a_\nu| = a_0 \left| \Sigma x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_\nu} \right| \leqq \binom{n}{\nu} a_0 \varrho^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also unterhalb einer allein von a_0, ϱ und n abhängenden Schranke gelegen. Daher kommen für die ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ nur endlich viele Wertsysteme in Betracht. Nun folgt aus dem eben Gesagten, daß unendlich viele Gleichungen (1) mit lauter einfachen und in E liegenden Wurzeln nur dann existieren können, falls deren Grad unbegrenzt wächst. Aus diesem Umstande kann man leicht in bezug auf den Grenzwert der zu E gehörigen Durchmesser d_n folgendes schließen:

X. *Ist E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche ebene Punktmenge, so können unendlich viele Gleichungen der Form* (1) *mit ganzen rationalen und demselben ersten Koeffizienten a_0 und mit lauter einfachen, in E fallenden Wurzeln nur dann existieren, falls die Durchmesser d_n von E gegen einen Grenzwert $\geqq 1$ konvergieren.*

Denn sei

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

eine Gleichung mit ganzen Koeffizienten, deren sämtliche Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einfach und in E gelegen sind. Dann gilt offenbar für ihre Diskriminante

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{\substack{1 \\ \varkappa < \lambda}}^{n} (x_\varkappa - x_\lambda)^2 = a_0^{2n-2} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

die folgende Abschätzung:

$$D \leqq a_0^{2n-2} \cdot \mathsf{M}_n, \tag{9}$$

wobei M_n den größten Wert angibt, dessen $|\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)|$ fähig ist, falls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in E beliebig variieren.

Nunmehr ist D nach unseren Voraussetzungen eine ganze Zahl $\geqq 1$, daher folgt nach (9)

$$\sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}. \tag{10}$$

Sind also unendlich viele Gleichungen mit den oben vorausgesetzten Eigenschaften vorhanden, so besteht die Beziehung (10) für unendlich viele verschiedene Werte von n, also ist der nach dem Satze I* gewiß existierende Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n} \geqq 1. \tag{11}$$

Um den Beweis zu Ende zu führen, beachte man noch, daß nach den Definitionen des § 1

$$\mathsf{M}_n = V_n^2, \qquad d_n = \sqrt[\binom{n}{2}]{V_n}$$

und also (11) mit

$$\lim d_n \geqq 1$$

gleichbedeutend ist.

Man gewinnt noch eine leichte Verschärfung von X. auf Grund der bekannten Tatsache, daß die nichtreellen Wurzeln einer Gleichung mit reellen Koeffizienten paarweise symmetrisch zur reellen Achse gelegen sind. Fallen also sämtliche Wurzeln von (1) in die Menge E, so gehören dieselben zum „symmetrischen Kerne" E^* dieser Menge, d. h. zu derjenigen echten oder unechten Teilmenge von E, welche außer allen reellen Punkten von E noch aus allen solchen nichtreellen Punkten gebildet ist, die samt ihren Spiegelpunkten in bezug auf die reelle Achse zur Menge E gehören. Da nun mit E zugleich auch ihr symmetrischer Kern E^* beschränkt und abgeschlossen ist, so lautet X. in verschärfter Form, wie folgt:

X*. *Ist E eine Menge, wie in X., so können unendlich viele Gleichungen, wie die in X. charakterisierten nur dann existieren, falls die zum symmetrischen Kerne E^* von E gehörigen Durchmesser d_n^* gegen einen Grenzwert $\geqq 1$ konvergieren.*

Dieser Satz X^* gibt eine notwendige Bedingung an, damit eine Menge E unendlich viele Systeme von konjugierten algebraischen gebrochenen Zahlen mit demselben gemeinsamen Nenner a_0 vollständig enthalte. Man kann an einfachen Beispielen zeigen, daß die Erfüllung dieser Bedingung nicht genügt, um die Unendlichkeit der Anzahl der eben besprochenen Zahlensysteme zu sichern. Bisher waren unsere Bemühungen, notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, erfolglos.

Um die Lösung der eingangs gestellten Frage in anderer Richtung weiter zu fördern, wollen wir zuerst den Satz X^* anders formuliert, auch folgendermaßen aussprechen:

XI. *Sei E eine unendliche beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge und E^* ihr symmetrischer Kern. Des weiteren seien $d_1^*, d_2^*, \ldots, d_n^*, \ldots$ die zu E^* gehörigen Durchmesser. Ist*

$$\lim_{n \to \infty} d_n^* < 1,$$

so ist die Anzahl der in X. *charakterisierten Gleichungen endlich.*

Diese Formulierung unseres bisherigen Ergebnisses suggeriert die Frage, ob mit Hilfe der einzelnen Durchmesserwerte nicht etwas Genaueres über die in Frage stehende Anzahl festzustellen wäre, falls sie der Voraussetzung $\lim\limits_{n \to \infty} d_n^* < 1$ zufolge endlich ist?

In dieser Hinsicht ist die bisher nicht völlig ausgebeutete Tatsache von Bedeutung, daß die Durchmesser d_n^* eine monoton abnehmende Folge bilden. Daraus folgt nämlich, daß das Bestehen der Relation $d_n^* < 1$ für einen einzigen Wert von n schon die Ungleichung $\lim\limits_{n \to \infty} d_n^* < 1$ zur Folge hat. *Man kann also auf die Endlichkeit der fraglichen Gleichungsanzahl schließen, sobald die Ungleichheit*

$$d_n^* < 1$$

für einen einzigen Wert von n festgestellt ist.

Wir können aber noch weiter gehen. Es wurde gezeigt, daß für sämtliche Gleichungen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

mit ganzen und demselben höchsten Koeffizienten und mit lauter einfachen und in E fallenden Wurzeln die Beziehung

$$\sqrt[n(n-1)]{M_n} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$$

bestehen muß. Sie ist aber nach der Definition von M_n und d_n gleichbedeutend mit

$$d_n \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$$

und bleibt auch in der verschärften Form

$$d_n^* \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$$

richtig. Ist nun $\lim\limits_{k \to \infty} d_k^* < 1$, so muß wegen des monotonen Abnehmens von d_k^* und $\sqrt[k]{a_0^2}$ von einem Werte des k an

$$(12) \qquad d_k^* < \frac{1}{\sqrt[k]{a_0^2}}$$

bestehen. *Ist* $\nu + 1$ *der kleinste Wert von* k, *für welchen* (12) *gilt, so kann der Grad der fraglichen Gleichungen* ν *nicht übertreffen* und somit bleibt, wie leicht zu beweisen ist, auch die Anzahl derselben unter einer, nur von ν, a_0 und d_2 abhängenden Schranke. Im speziellen Falle $a_0 = 1$ läßt sich sogar diese Anzahl mit Hilfe von ν allein abschätzen, falls $\nu + 1$ wieder den kleinsten Wert von k angibt, für welchen

$$d_k^* < 1$$

besteht. Denn gibt es überhaupt solche ganzzahlige Gleichungen

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

deren sämtliche Wurzeln voneinander verschieden sind und in die Menge E^* fallen und ist

$$\varphi(x) \equiv x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu = 0$$

diejenige unter ihnen, deren Grad möglichst groß ausfällt, so muß $f(x)$ in $\varphi(x)$ aufgehen. Nun ist aber unschwer zu folgern, daß höchstens 2^μ ganzzahlige Polynome in $\varphi(x)$ aufgehen können; daher ist auch die fragliche Gleichungsanzahl $\leqq 2^\mu$. Daraus folgt jedoch die Möglichkeit der behaupteten Abschätzung, da nach dem oben Gesagten $\mu \leqq \nu$ bestehen muß.

§ 6.

Gleichungen mit höchstem Koeffizienten $a_0 \leqq \alpha\beta^n$.

Im vorigen Paragraphen haben wir den Zusammenhang untersucht, welcher zwischen dem „*transfiniten Durchmesser*" einer beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge oder ihres symmetrischen Kernes E^*, d. h. zwischen $\lim\limits_{n \to \infty} d_n$ oder $\lim\limits_{n \to \infty} d_n^*$ und der Anzahl derjenigen Gleichungen

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ ganz}; \ a_0 > 0)$$

besteht, die einen gemeinsamen ersten Koeffizienten a_0 und lauter einfache, in E fallende Wurzeln haben.

Nunmehr wollen wir die Anzahl aller Gleichungen von der Form (1) bei Aufrechterhaltung der die Wurzeln bezüglichen Bedingungen unter einer neuen Voraussetzung betreffs des ersten Koeffizienten a_0 untersuchen, indem wir ihn von nun an nicht fest vorschreiben, sondern mit dem Gleichungsgrad n anwachsen lassen, mit der einzigen Beschränkung, daß immer

$$a_0 \leqq \alpha\beta^n \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 1) \tag{13}$$

bestehe.

Da, wie bei festem a_0, auch jetzt nur endlich viele Gleichungen mit den angegebenen Eigenschaften existieren können, deren Grad vorgeschrieben ist, so können wir behaupten, daß mit der Anzahl dieser Gleichungen auch deren Grad ins Unendliche wachsen muß.

Nun besteht, wie wir sahen, für irgendeine der fraglichen Gleichungen (1) vom n-ten Grade die Ungleichheit $d_n \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$ bzw. $d_n^* \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$, wo d_n bzw. d_n^* den n-ten Durchmesser von E bzw. E^* bezeichnet, also ist nach (13)

$$d_n \geqq \frac{1}{\beta^2 \sqrt[n]{\alpha^2}}, \qquad d_n^* \geqq \frac{1}{\beta^2 \sqrt[n]{\alpha^2}}.$$

Daraus folgt, daß nur dann unendlich viele Gleichungen mit den festgesetzten Eigenschaften existieren können, wenn die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} d_n \geqq \frac{1}{\beta^2} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} d_n^* \geqq \frac{1}{\beta^2}$$

besteht.

Mit Hinsicht auf die offenbar bestehende Relation

$$\lim_{n\to\infty} d_n \geqq \lim_{n\to\infty} d_n^*$$

können wir also den Satz aussprechen:

XII. *Sei E eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge, deren symmetrischer Kern E^* den transfiniten Durchmesser δ^* besitzt. Ist $\alpha > 0$, $\beta > 1$, $\beta^2\delta^* < 1$, so gibt es nur endlich viele Gleichungen*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \ \textit{ganz};\ a_0 > 0)$$

mit lauter einfachen, in E liegenden Wurzeln, deren höchster Koeffizient a_0 der Ungleichheit

$$a_0 < \alpha\beta^n$$

genügt.

Dieser Satz enthält offenbar unsere Sätze X, X*, XI und kann als eine Verallgemeinerung der beiden Sätze V und XIV des Herrn Schur aufgefaßt werden[13]).

[13]) A. a. O. S. 388 und S. 398.

Zum Schluß dieses Paragraphen stehe noch hier folgendes Theorem, zu welchem die Verknüpfung der Sätze IX und XII unmittelbar hinführt:

XIII. *Sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der x-Ebene, deren Komplementärmenge einen einfach zusammenhängenden Bereich B bildet. Bedeute*

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \frac{\tau_2}{z^2} + \dots + \frac{\tau_n}{z^n} + \dots$$

eine Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ schlicht auf den Bereich B abbildet, während die Punkte $z = \infty$, $x = \infty$ einander entsprechen. Ist

$$\alpha > 0, \quad \beta > 1, \quad \beta^2 |\tau| < 1,$$

so gibt es nur endlichviele ganzzahlige Gleichungen (1) *mit lauter einfachen, in E liegenden Wurzeln, deren höchster Koeffizient a_0 der Ungleichheit*

$$a_0 < \alpha \beta^n$$

genügt.

Um die Tragweite des Satzes XIII zu erleuchten, wollen wir einige wichtige spezielle Fälle von Punktmengen E hier anführen, in welchen der Wert des Abbildungsmodul τ bekannt ist[14]).

Sei E eine Kreisfläche $|x| \leqq R$; dann ist $|\tau| = R$.

Ist E eine Ellipsenfläche, begrenzt durch die Ellipsenlinie

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \qquad (x = \xi + \eta i),$$

so ist

$$|\tau| = \frac{a+b}{2}.$$

Ist E eine Halbkreisfläche, begrenzt durch einen Halbkreis und einen Durchmesser von der Länge $2R$, so ist

$$|\tau| < \frac{4R}{3\sqrt{3}}.$$

Bilden die Randpunkte von E ein symmetrisches Kreisbogenzweieck mit der Sehne h und mit dem Winkel $2k\pi$ $(k < 1)$, so ist

$$|\tau| = \frac{h}{4} \cdot \frac{1}{1-k}.$$

In allen diesen Fällen läßt der Satz XIII mit Hilfe der charakteristischen geometrischen Daten Bedingungen aufstellen, unter welchen die Anzahl der Gleichungen (1) ohne mehrfachen und mit insgesamt in den genannten Mengen liegenden Wurzeln bei $a_0 < \alpha \beta^n$ endlich ist.

[14]) Vgl. Herrn Szegös Aufsatz a. a. O. Fußnote [11]), S. 253–254.

§ 7.

Über die Annäherung der Null durch ganzzahlige Polynome in gegebener Punktmenge. Anwendung.

In diesem Paragraphen wollen wir die Frage nach der Anzahl sämtlicher ganzzahliger Gleichungen, mit festem höchsten Koeffizienten und mit lauter einfachen, in einer gegebenen Punktmenge liegenden Wurzeln, mit Hilfe einer neuen Methode angreifen. Diese Methode ist nicht nur zur wiederholten Herleitung der bisherigen Ergebnisse geeignet, sondern wirft auch neues Licht auf dieselben. Insbesondere läßt sie alle ganzzahligen Gleichungen *mit dem höchsten Koeffizienten Eins*, deren sämtliche Wurzeln in eine Punktmenge von transfinitem Durchmesser < 1 fallen, interessant charakterisieren.

Unser neues Verfahren stützt sich auf die folgende, auch an und für sich bemerkenswerte Tatsache:

XIV. *Ist E eine beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge, deren nicht-reelle Punkte symmetrisch zur reellen Achse gelegen sind und deren transfiniter Durchmeser < 1 ist, so gibt es ein nicht-identisch verschwindendes Polynom $g(x)$ mit lauter ganzzahligen Koeffizienten, das dem Betrage nach überall auf E kleiner als 1 ist*[15]).

Mit a. W.: In jeder beschränkt-abgeschlossenen symmetrischen Punktmenge von einem transfinitem Durchmesser < 1 kann die Null durch ganzzahlige Polynome beliebig fein approximiert werden.

Zum Beweise werden wir zunächst für jedes ganzes $n \geqq 1$ und für symmetrische Punktmengen E vom beliebigen transfiniten Durchmesser die Existenz eines nicht-identisch verschwindenden ganzzahligen Polynoms

$$g_n(x) = g_0 + g_1 x + \ldots + g_n x^n$$

nachweisen, dessen Grad $\leqq n$ ist, und welches überall auf E der Beziehung

$$|g_n(x)| \leqq (n+1)\, d_{n+1}^{\frac{n}{2}}$$

genügt, wobei d_{n+1} den zu E gehörigen n-ten Durchmesser bedeutet.

In der Tat, ist

$$\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_n x^n$$

irgendein Polynom, dessen Grad $\leqq n$ ist, so kann man es als ein lineares Aggregat der zu E gehörigen Tschebyscheffschen Polynome $t_0(x) \equiv 1$, $t_1(x), t_2(x), \ldots, t_n(x)$ in der Form

$$\gamma(x) = \lambda_0 t_0(x) + \lambda_1 t_1(x) + \ldots + \lambda_n t_n(x) \tag{14}$$

---

[15]) Satz XIV läßt sich offenbar umkehren.

darstellen; hierbei sind $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ selbst linear aus den Koeffizienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ zusammengesetzt und zwar derart, daß λ_k nur die Größen $\gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n$ enthält, die erste von ihnen mit dem Koeffizienten Eins, die übrigen mit reellen Koeffizienten:

$$(15)\qquad \begin{cases} \lambda_0 = \gamma_0 + \alpha_0^{(1)}\gamma_1 + \alpha_0^{(2)}\gamma_2 + \ldots + \alpha_0^{(n)}\gamma_n, \\ \lambda_1 = \qquad\quad \gamma_1 + \alpha_1^{(2)}\gamma_2 + \ldots + \alpha_1^{(n)}\gamma_n, \\ \lambda_2 = \qquad\qquad\qquad \gamma_2 + \ldots + \alpha_2^{(n)}\gamma_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \gamma_n. \end{cases}$$

Die k-te Potenz von x läßt nämlich offenbar folgende Darstellung zu:

$$x^k = t_k(x) + \alpha_{k-1}^{(k)} t_{k-1}(x) + \alpha_{k-2}^{(k)} t_{k-2}(x) + \ldots + \alpha_0^{(k)} t_0(x) \qquad (1 \leqq k \leqq n),$$

wobei die Größen α *reelle* Zahlen bezeichnen, da (wegen der symmetrischen Lage von E) *auch die T-Polynome lauter reelle Koeffizienten besitzen*[16]). Daraus folgt (14) unmittelbar, mit Koeffizienten λ, die dem Gleichungssystem (15) genügen.

Nun folgt aus der Beziehung (14) in jedem Punkte x der Menge E die Ungleichung

$$(16)\qquad |\gamma(x)| \leqq |m_0 \lambda_0| + \ldots + |m_n \lambda_n|,$$

wo $m_0, m_1, \ldots, m_n$ der Reihe nach das Maximum des absoluten Betrages von $t_0(x) \equiv 1$, $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ auf E bezeichnen.

Von dieser Relation gelangt man zur Existenz von $g(x)$, wenn man auf die linearen Formen $m_0\lambda_0, m_1\lambda_1, \ldots, m_n\lambda_n$ der $(n+1)$ Größen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ mit der Determinante $m_0 m_1 \ldots m_n$ das folgende Theorem von Minkowski anwendet.

Es seien ν Formen

$$y_k = \sum_{l=1}^{\nu} b_{kl} x_l \qquad (1 \leqq k \leqq \nu)$$

mit reellen Koeffizienten und positiver Determinante D gegeben. Dann gibt es ν ganze rationale nicht sämtlich verschwindende Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ so, daß für alle k

$$y_k \leqq \sqrt[\nu]{D}.$$

Nach diesem Theorem kann man in (15) den Größen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ solche ganze, nicht sämtlich verschwindende Werte $g_0, g_1, \ldots, g_n$ geben, daß

$$(17)\qquad |\lambda_k| \leqq \frac{\sqrt[n+1]{m_0 m_1 \ldots m_n}}{m_k}$$

für alle $k \geqq 0$, $\leqq n$ bestehe.

[16]) Das ist eine leicht ersichtliche Folge der Unität dieser Polynome.

Bildet man mit diesen λ das Polynom

$$\gamma(x) = \lambda_0 t_0(x) + \lambda_1 t_1(x) + \dots + \lambda_n t_n(x),$$

so erhält man ein Polynom

$$g_n(x) = g_0 + g_1 x + \dots + g_n x^n$$

mit lauter ganzen Koeffizienten, welches nicht identisch verschwindet und nach (16) und (17) der Bedingung

$$(18) \qquad |g_n(x)| \leqq (n+1) \sqrt[n+1]{m_1 m_2 \dots m_n}$$

überall auf E genügt. Nun ist aber nach (8) und (2)

$$\sqrt[n+1]{m_1 m_2 \dots m_n} \leqq \sqrt[n+1]{V_{n+1}} = d_{n+1}^{\frac{n}{2}},$$

also involviert (18) die Ungleichung

$$|g_n(x)| \leqq (n+1) d_{n+1}^{\frac{n}{2}};$$

damit ist die behauptete Existenz bewiesen. Daraus folgt schon die Richtigkeit des Satzes XIII fast unmittelbar. Ist nämlich der transfinite Durchmesser von $E < 1$, d. h. ist $\lim\limits_{n\to\infty} d_n < 1$, so gibt es einen Wert des n, von welchem an $(n+1) d_{n+1}^{\frac{n}{2}} < 1$; dann genügt aber $g_n(x)$ den Bedingungen des Satzes XIII. W. z. b. w.

Nunmehr wollen wir auf Grund des eben bewiesenen Satzes XIII zunächst den Satz XI von neuem herleiten.

Sei also E eine unendliche, beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der x-Ebene und E^* ihr symmetrischer Kern, dessen Durchmesser d_n^* der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} d_n^* < 1$$

genügt. Dann gibt es nach XIII ein nicht-identisch verschwindendes ganzzahliges Polynom

$$g(x) = e_0 x^k + e_1 x^{k-1} + \dots + e_k,$$

welches überall auf E^* dem Betrage nach $\leqq M < 1$ ausfällt. Ist nun

$$(19) \qquad \varphi(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu$$

irgendein ganzzahliges irreduzibles Polynom mit lauter in E^* liegenden Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$, dessen höchster Koeffizient ein Teiler von a_0 (d. h. von dem gemeinsamen höchsten Koeffizienten der zu betrachtenden Polynome) ist, so gilt für die Sylvestersche Resultante von $\varphi(x)$ und $g(x)$

$$R = \alpha_0^k g(\xi_1) g(\xi_2) \dots g(\xi_\nu)$$

die Abschätzung

$$(20) \qquad |R| < a_0^k M^\nu.$$

Daraus folgt aber, daß die nach unseren Voraussetzungen ganzwertige Zahl R verschwinden muß, sobald ν eine, nur von a_0 abhängige Grenze ν_0 übersteigt. Daher kann das Polynom $\varphi(x)$ seine sämtlichen Nullstellen nur dann in E^* haben, wenn entweder sein Grad $\leqq \nu_0$ ist, oder für mindestens eine seiner Nullstellen $g(x)$ verschwindet; im letzteren Falle ist $\varphi(x)$ notwendigerweise ein Teiler von $g(x)$.

Um aus diesen Ergebnissen zum Satze XI zu gelangen, beachte man nun, daß jedes ganzzahlige Polynom

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 > 0)$$

mit dem höchsten Koeffizienten a_0 und mit lauter einfachen, in E^* liegenden Wurzeln entweder selbst ein irreduzibles Polynom, wie das oben charakterisierte $\varphi(x)$ ist, oder sich, wenn es reduzibel ist, als Produkt aus solchen, voneinander verschiedenen Polynomen $\varphi(x)$ darstellen läßt. Da aber die Anzahl der ganzzahligen Polynome mit höchstem Koeffizienten $\leqq a_0$ und vom Grade $\leqq \nu_0$, deren sämtliche Wurzeln in E^* fallen, sowie die Anzahl der Teiler von $g(x)$ endlich ist, so muß auch die Anzahl der in Frage stehenden Polynome $f(x)$ endlich ausfallen. W. z. b. w.

Indem wir erwähnen, daß auch der Satz XII, den wir im vorigen Paragraphen nach der „Diskriminantenmethode" des Herrn Schur hergeleitet haben, sich mit unserer oben angewandten „Resultantenmethode" beweisen läßt, wollen wir mit Hilfe der letzteren Methode den Satz XI ergänzen für den speziellen Fall, wo der höchste Koeffizient $a_0 = 1$ ist.

Sei E eine Punktmenge, wie in XI und $g(x)$ irgendein Polynom, dessen Existenz für den symmetrischen Kern E^* von E aus dem Satz XIII folgt. Ferner sei $f(x)$ irgendein ganzzahliges Polynom der Gestalt

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

mit lauter einfachen, in E^* liegenden Wurzeln und $\varphi(x)$ irgendein ganzzahliger irreduzibler Teiler von $f(x)$. Dann gilt nach (20) für die Sylvestersche Resultante R der Polynome $\varphi(x)$ und $g(x)$ die Abschätzung

$$|R| < 1,$$

also muß R verschwinden und $\varphi(x)$ in $g(x)$ aufgehen.

Wir haben somit folgendes bewiesen:

XIV. *Ist E eine beliebige Punktmenge, wie in* XI *und $g(x)$ irgendein ganzzahliges nicht-identisch verschwindendes Polynom, dessen absoluter Betrag auf dem symmetrischen Kerne E^* von E überall < 1 ist, so muß jedes ganzzahlige Polynom mit höchstem Koeffizienten Eins und mit lauter einfachen in E liegenden Nullstellen in $g(x)$ aufgehen,*

Budapest, den 17. Juli 1922.

(Eingegangen am 20. Juli 1922.)