Fixpunktklassen.

Teil II.

Homotopieinvarianten der Fixpunkttheorie.

Von

Franz Wecken in Marburg a. d. Lahn.

Einleitung.

Die Ergebnisse der ersten Mitteilung[1]) werden in diesem Teil verschärft und erweitert, wobei besonders die Tendenz leitend ist, möglichst weitgehende homotopieinvariante Aussagen über eine Abbildung f zu erhalten[2]).

Die Fixpunktzahlen[3]) v_k der Fixpunktklassen wurden in W. 1 lediglich als eine ungeordnete, endliche Menge ganzer Zahlen gewonnen. Zur Präzisierung dieses Ergebnisses erscheint es notwendig, diese Zahlen als die Fixpunktzahlen *ganz bestimmter* Fixpunktklassen in einer invarianten Weise individuell zu benennen, indem man die Fixpunktklassen deformationsinvarianten Größen eineindeutig zuordnet. Dies gelingt nach Nielsen mit Hilfe der Fundamentalgruppe Γ von $\mathfrak{P}$ und eines durch f induzierten Automorphismus H von Γ.

Durch die stetige Abbildung f von $\mathfrak{P}$ in sich wird eine Transformation von Γ in sich bekanntlich[4]) nur bis auf einen inneren Automorphismus festgelegt; einen bestimmten Automorphismus H erhält man, sobald man einen Punkt p von $\mathfrak{P}$ durch eine Kurve $\mathfrak{C}$ mit seinem Bildpunkt $f(p) = p'$ verbindet und dadurch die Wegegruppen mit den Aufpunkten p und p' eineindeutig aufeinander bezieht. H ist mit dem System $\{f, \mathfrak{C}\}$ deformationsinvariant.

---

[1]) Fixpunktklassen. I. Math. Annalen **117** (1941), S. 659—671, zit. als W. 1. Dort findet sich in § 1 die Erklärung der häufig benutzten Bezeichnungen. *Druckfehlerberichtigung* zu W. 1: auf S. 663, Zeile 13 v. o. lies $\overline{\mathfrak{R} - \mathfrak{A}} \frown \mathfrak{A}$ statt $\overline{\mathfrak{R} - \mathfrak{A} \frown \mathfrak{A}}$; Zeile 16 v. o. lies „obere" statt „untere". — Weitere Literatur: P. Alexandroff u. H. Hopf, Topologie I. Berlin 1935 (zit. als AH.); J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I. Acta math. **50** (1927), S. 189—358 (zit. als N.); K. Reidemeister, Automorphismen von Homotopiekettenringen. Math. Annalen **112** (1936), S. 586—593 (zit. als R. 1); K. Reidemeister, Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe. Leipzig 1938 (zit. als R. 2); A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937 (zit. als S.); H. Seifert und W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie. Leipzig 1934 (zit. als ST.).

[2]) Vgl. den Vorbericht in W. 1, S. 661.

[3]) Der Ausdruck „Fixpunktzahl" bedeutet in dieser Mitteilung stets die *algebraische* Fixpunktzahl.

[4]) Vgl. ST., S. 155f., 176.

verknüpft oder ist, wie man auch sagen kann, auf der Abbildungsklasse $\mathfrak{f}$ *im kleinen* invariant. Die Gesamtheit der so durch f erzeugbaren Automorphismen, die sogenannte *Automorphismenfamilie* Σ_1, ist dagegen eine homotopieinvariante Eigenschaft von f oder eine Invariante von $\mathfrak{f}$ *im großen* (§ 1). Es erweist sich weiterhin als zweckmäßig, im kleinen invariante Eigenschaften zu untersuchen und hieraus später die angestrebten Invarianten im großen abzuleiten.

Die durch H in Γ erzeugten H-Klassen $\mathfrak{p}_k^H$ entsprechen bei geeigneter Definition eineindeutig den sämtlichen Fixpunktklassen bei f, und dieser Sachverhalt bleibt bei Deformation von $\{f, \mathfrak{C}\}$ bestehen (§ 2). Durch Kombination der $\mathfrak{p}_k^H$ mit den zugehörigen Fixpunktzahlen v_k wird so ein deformationsinvarianter Ausdruck R_0 erhalten, der mehr als die Gesamtheit der v_k beinhaltet.

Für die folgenden Untersuchungen wird als neues Hilfsmittel die *universelle Überlagerung* $\widetilde{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$ eingeführt (§ 3), auf die die ursprüngliche Nielsensche Definition der Fixpunktklassen (N., S. 289) wesentlich Bezug nimmt, die jedoch in § 1 und 2 sowie in Teil I und III nicht benutzt wird. Hierdurch wird ein tieferes Verständnis des Vorangegangenen vermittelt; z. B. wird erkennbar, daß die Deformation des Systems $\{f, \mathfrak{C}\}$ nichts anderes bedeutet als die gleichzeitige Deformation von $f(x)$ und einer darüberliegenden stetigen Abbildung $F(X)$ von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ in sich; eine Fixpunktklasse bei $f(x)$ erscheint als die Punktmenge, über der die bei einer Abbildung $F(X)$ auftretenden Fixpunkte liegen. Gleichzeitig wird durch die Einführung von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ die Brücke geschlagen zu einer Methode der kombinatorischen Topologie, die an den Begriff des universellen Überlagerungskomplexes anknüpft und zur Zeit nicht durch äquivalente stetigkeitstopologische Verfahren ersetzbar ist, nämlich zur Theorie des *Homotopiekettenringes* eines Komplexes K.

Eine simpliziale Abbildung von $\mathfrak{P}$ in sich bestimmt eine Transformation der gewöhnlichen Kettengruppen eines Komplexes K in sich. Eine darüberliegende Abbildung des universellen Überlagerungskomplexes $\widetilde{K}$ in sich transformiert die Ketten von $\widetilde{K}$ oder Homotopieketten von K in sich, und zwar vermöge ihrer Herkunft in spezieller Weise. Es entsteht so ein *Automorphismus* T des Homotopiekettenringes (Reidemeister, R. 1), der also das kombinatorische Äquivalent einer bestimmten über f liegenden Selbstabbildung von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ (entsprechend einem System $\{f, \mathfrak{C}\}$) darstellt.

Die aus den Matrizen von T von Reidemeister gewonnene *Spureninvariante* R wird nun in § 4 als mit der für die simpliziale Abbildung gebildeten Größe R_0 *identisch* nachgewiesen. Es ist damit gezeigt, wie sich R_0 aus einer geeigneten Simplizialapproximation von f berechnen läßt.

Aus R_0 lassen sich alle Fixpunktzahlen v_k, daher auch die Lefschetzsche Zahl $\Lambda = \sum_k v_k$ und die Zahl μ der wesentlichen Fixpunktklassen ablesen. Hierdurch ist eine *verbesserte untere Schranke* für die *Fixpunktmindestzahl* m gewonnen, denn nach W. 1 gilt ja $m \geqq \mu$, während aus der Kenntnis von Λ lediglich im Falle $\Lambda \neq 0$ die Abschätzung $m \geqq 1$ folgt. Wie in Teil III gezeigt werden wird, gilt unter den dortigen Voraussetzungen $m = \mu$; die aus der Homotopietheorie hergeleitete Invarianzaussage verschärft also das Ergebnis der Homologietheorie wesentlich, indem sie die *genaue* untere Schranke der geometrischen Fixpunktzahl liefert.

In § 5 wird durch Berücksichtigung des Einflusses der speziell gewählten Kurve $\mathfrak{C}$ auf H und R_0 ein im großen homotopieinvarianter Ausdruck Σ_2 gewonnen, der die bisher erwähnten Invarianten umfaßt.

Schon nach der Definition der durch einen Deformationsweg geleisteten Zuordnung zwischen den Fixpunktklassen homotoper Abbildungen (W. 1, S. 669) lag die Frage nahe, ob und unter welchen Bedingungen diese Zuordnung vom Wege unabhängig sei; doch erfordert ein genaueres Eingehen auf sie die in den vorigen Paragraphen entwickelten formalen Hilfsmittel. Ein Beispiel in § 6 zeigt, daß die Zuordnung vom Deformationswege wesentlich abhängen kann; es können also durch geschlossene Wege auf $\mathfrak{k}$ Permutationen unter den Fixpunktklassen bei f erzeugt werden. Dafür, daß dies nicht eintritt, wird eine hinreichende Bedingung angegeben, die in wichtigen Fällen erfüllt ist.

Bei den erwähnten geschlossenen Deformationswegen $\{f_\tau\}$ beschreibt jeder Bildpunkt $f_\tau(p)$ eines festen Punktes p ebenfalls geschlossene Wege; die durch sie bestimmte Untergruppe $\mathfrak{g}_3$ von Γ, die deformationsinvariant mit $\{f, \mathfrak{C}\}$ verknüpft ist, bestimmt die auftretenden Permutationen (§ 7). Aus Σ_2 wird durch Hinzunahme von $\mathfrak{g}_3$ eine erweiterte Invariante Σ_3 gewonnen.

In § 8 werden zur Veranschaulichung der Begriffe die Invarianten für die Abbildungen des Kreises in sich berechnet.

§ 1.

Die durch Abbildungen von $\mathfrak{P}$ erzeugten Automorphismen von Γ.

Es sei p ein Punkt des Polyeders $\mathfrak{P}$. Die in p beginnenden geschlossenen Kurven $\mathfrak{W}$ — homotope Kurven als nicht verschieden gerechnet — bilden bekanntlich[5]) die *Wegegruppe* oder *Fundamentalgruppe* Γ von $\mathfrak{P}$. Die Klasse der zu $\mathfrak{W}$ homotopen Wege bezeichnen wir mit $[\mathfrak{W}]$, im übrigen die Elemente von Γ mit $\alpha, \beta, \ldots$[6]). Nicht notwendig geschlossene Kurven werden mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet. Auch für sie ist (bei Festhaltung der Endpunkte, vgl. W. 1,

---

[5]) Zur Theorie der Fundamentalgruppe vgl. ST., Kap. VII.

[6]) Geschweifte Klammern $\{\}$, die bei ST. Wegeklassen bezeichnen, benutzen wir für Mengen allgemeiner Art.

S. 665) eine Homotopie und die Bildung von Klassen $[\mathfrak{C}]$ erklärt. Für das formale Rechnen mit diesen Klassen bestehen einfache Regeln[7]), die wir im folgenden stillschweigend benützen. Die Klasse der in einem Punkte q beginnenden geschlossenen und zusammenziehbaren Wege bezeichnen wir mit $[q]$.

$f(x) = x'$ sei eine stetige Selbstabbildung von $\mathfrak{P}$ und Γ_p die Wegegruppe von $\mathfrak{P}$ mit dem Aufpunkt p. Nach den Überlegungen in ST. (Schluß von § 42) wird durch f eine homomorphe Abbildung[8]) von Γ_p in $\Gamma_{p'}$ erzeugt. Da Γ_p und $\Gamma_{p'}$ isomorph sind, kann man von einem Autohomomorphismus (wir sagen kurz *Automorphismus*) H von Γ sprechen, sobald Γ_p und $\Gamma_{p'}$ durch eine von p nach p' verlaufende Kurve $\mathfrak{C}$ eineindeutig aufeinander bezogen sind. Als Automorphismus von Γ_p läßt sich H definieren durch

$$H\,[\mathfrak{W}] = [\mathfrak{C}\, f(\mathfrak{W})\, \mathfrak{C}^{-1}], \tag{1}$$

wenn $\mathfrak{W}$ ein geschlossener in p beginnender Weg und $f(\mathfrak{W})$ sein Bild ist. H ist also durch f und $\mathfrak{C}$ eindeutig festgelegt und ändert sich auch nicht (ST., § 50), wenn wir f, $\mathfrak{C}$ und p einzeln oder gleichzeitig deformieren, wenn wir nur dafür sorgen, daß stets zwischen p und seinem Bildpunkt Verbindung gehalten wird. Wir sagen also, daß *H dem System $\{f, \mathfrak{C}\}$ deformationsinvariant zugeordnet* ist. Allgemeiner kann man sagen: Wenn der Abbildung f (durch zusätzliche Angaben) ein bestimmter Automorphismus H von Γ zugeordnet ist, so läßt sich diese Zuordnungsvorschrift stets auf benachbarte Abbildungen g ausdehnen, und der Automorphismus ist daher auf der Abbildungsklasse $\mathfrak{f}$ *im kleinen invariant.*

Schreibt man $\mathfrak{C}$ nicht vor, so ist die Transformation von Γ nur bis auf einen inneren Automorphismus T_γ bestimmt (ST., § 42); genauer: ersetzt man $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{C}_2$ mit $[\mathfrak{C}_2] = \gamma\,[\mathfrak{C}]$, so erhält man statt (1)

$$[\mathfrak{C}_2\, f(\mathfrak{W})\, \mathfrak{C}_2^{-1}] = \gamma(H\,[\mathfrak{W}])\,\gamma^{-1} = T_\gamma H\,[\mathfrak{W}] \tag{2}$$

mit $T_\gamma\,\alpha = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, H ist also durch $T_\gamma H$ ersetzt. Die Gesamtheit

$$\Sigma_1 = \{T_\gamma H \ (\gamma \in \Gamma)\}$$

der so erhältlichen Automorphismen nennen wir eine *Automorphismenfamilie*[9]). Jeder Automorphismus aus Σ_1 kann durch jede Abbildung aus $\mathfrak{f}$ erzeugt werden, Σ_1 ist demnach *auf $\mathfrak{f}$ im großen invariant* oder ist eine *Homotopieinvariante* der Abbildungen.

---

[7]) Die $[\mathfrak{C}]$ bilden ein *Gruppoid* nach H. Brandt, Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. Math. Annalen **96** (1927), S. 360—366; vgl. auch S., S. 4ff.

[8]) Vgl. S., § 9. — Statt „mehrstufig isomorph" sagen wir stets „*homomorph*".

[9]) Dieser Wortsinn ist weiter als bei Nielsen (N., S. 244), der nur Auto*iso*morphismen betrachtet.

Bei spezieller Gestalt von $\mathfrak{P}$ erweist sich Σ_1 als so gehaltvolle Eigenschaft von $\mathfrak{f}$, daß $\mathfrak{f}$ durch Σ_1 schon völlig festgelegt wird[10]) und alle weiteren Aussagen über $\mathfrak{f}$ aus Σ_1 folgen; allgemein ist dies jedoch nicht der Fall.

§ 2.

Zuordnung zwischen Fixpunktklassen und H-Klassen.

Haben p, f und $\mathfrak{C}$ die obige Bedeutung, so kann man jedem Fixpunkt q bei f gewisse Elemente $\alpha \in \Gamma$ zuordnen, indem man eine Kurve $\mathfrak{C}_1$ von p nach q wählt und

$$\alpha = [\mathfrak{C}\, f(\mathfrak{C}_1)\, \mathfrak{C}_1^{-1}] \tag{3}$$

bildet (Fig. 1). Jedem Fixpunkt entspricht also eine nicht leere Menge von Gruppenelementen α, und jedem $\alpha \in \Gamma$ eine (vielleicht leere) Menge von Fixpunkten.

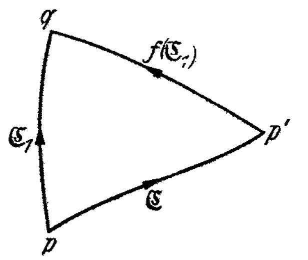

Fig. 1.

Bezeichnet man nach Reidemeister (R. 1, S. 589) zwei Elemente α, $\beta \in \Gamma$ als *konjugiert bezüglich H*, wenn

$$\beta = (H\gamma)\alpha\,\gamma^{-1} \tag{4}$$

mit passendem $\gamma \in \Gamma$ ist, so erhält man eine Einteilung von Γ in Klassen konjugierter Elemente, kurz *H-Klassen*[11]).

Hilfssatz. *Die angegebene Vorschrift* (3) *ordnet jedem Fixpunkt genau eine ganze H-Klasse, jedem Gruppenelement entweder nichts oder eine ganze Fixpunktklasse zu. Diese Zuordnung bleibt bei Deformation von $\{f, \mathfrak{C}\}$ bestehen, soweit die Fixpunktklassen erhalten bleiben. Durch Deformation läßt sich erreichen, daß einem vorgeschriebenen Gruppenelement eine Fixpunktklasse zugeordnet wird.*

Beweis. Wir ersetzen in (3) $\mathfrak{C}_1$ durch einen beliebigen Weg von p nach q. Jeder solche Weg kann durch homotope Deformation, die hier offenbar belanglos ist, in die Form $\mathfrak{W}\mathfrak{C}_1$ gebracht werden, und $[\mathfrak{W}] = \gamma$ kann hierbei jedes Element aus Γ sein. Mit $\mathfrak{W}\mathfrak{C}_1$ statt $\mathfrak{C}_1$ erhält man nun nach (3) und (1) statt α ein Element

$$\begin{aligned}\beta = [\mathfrak{C}\, f(\mathfrak{W})\, f(\mathfrak{C}_1)\mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{W}^{-1}] &= [\mathfrak{C}\, f(\mathfrak{W})\, \mathfrak{C}^{-1}]\, [\mathfrak{C}\, f(\mathfrak{C}_1)\, \mathfrak{C}_1^{-1}]\, [\mathfrak{W}^{-1}] \\ &= (H\,[\mathfrak{W}])\alpha\,[\mathfrak{W}^{-1}] = (H\gamma)\alpha\gamma^{-1}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck durchläuft in der Tat nach (4) eine H-Klasse. — Sind q_1 und q_2 Fixpunkte von gleicher Fixpunktklasse, so sei die Kurve $\mathfrak{C}_0$ von q_1

---

[10]) N., §§ 22, 27. Nielsen benutzt diesen Umstand zur Definition der Abbildungsklasse.

[11]) Nach Nielsen (N., S. 260) heißen in diesem Falle α^{-1} und β^{-1} *isogredient*; an der Stelle der H-Klassen stehen dort die *Isogredienzklassen*.

nach q_2 gewählt mit $[\mathfrak{C}_0] = [f(\mathfrak{C}_0)]$. Man erhält dann nach (3) für q_1 und q_2 dasselbe Element α, sobald man von p nach q irgendeinen Weg $\mathfrak{C}_1$ und von p nach q_2 den Weg $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_0$ wählt (Fig. 2). Sind umgekehrt q_1 und q_2 zwei Fixpunkte bei f, denen dasselbe Element

$$[\mathfrak{C} f(\mathfrak{C}_1)\mathfrak{C}_1^{-1}] = [\mathfrak{C} f(\mathfrak{C}_2)\mathfrak{C}_2^{-1}]$$

zugeordnet ist, so folgt sofort

$$[f(\mathfrak{C}_1)\mathfrak{C}_1^{-1}] = [f(\mathfrak{C}_2)\mathfrak{C}_2^{-1}],$$

$$[\mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{C}_2] = [f(\mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{C}_2)],$$

und q_1 und q_2 müssen der gleichen Fixpunktklasse angehören, da der Weg $\mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{C}_2$ von q_1 nach q_2 führt (Fig. 3).

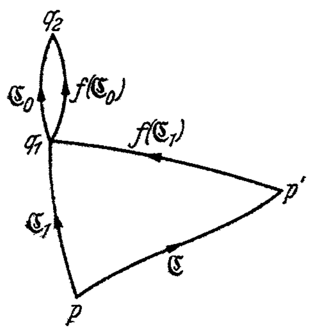

Fig. 2.

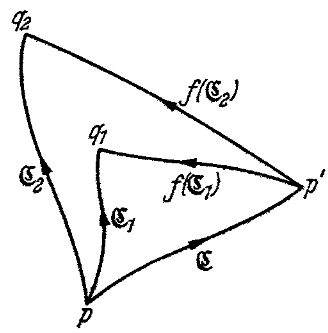

Fig. 3.

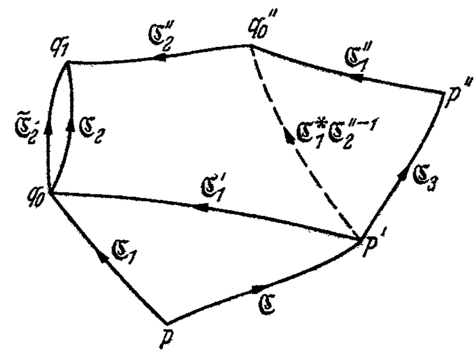

Fig. 4.

Sind durch einen Deformationsweg zwei Fixpunktklassen verschiedener Abbildungen einander zugeordnet (W. 1, § 3), so ist zu zeigen, daß ihnen dieselbe H-Klasse zukommt. Es sei also $\{f_\tau \ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$ ein Deformationsweg von $f = f_0$ nach f_1, es sei weiter $f_0(q_0) = q_0$, $f_1(q_1) = q_1$, $\mathfrak{C}_2 = \{q_\tau \ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$, $\tilde{\mathfrak{C}}_2 = \{f_\tau(q_\tau) \ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$,

$$\{\tilde{\mathfrak{C}}_2\} = \{\mathfrak{C}_2\}. \tag{5}$$

Wir schreiben $f_0(x) = x'$, $f_1(x) = x''$, entsprechend sei $\mathfrak{C}_k'$, $\mathfrak{C}_k''$ erklärt (Fig. 4). $\mathfrak{C}_1 = \{p_\tau (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$ sei ein Weg von p nach q_0, $\mathfrak{C}_3 = \{f_\tau(p) \ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$. Als Weg von p nach q_1 wählen wir $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$ und haben nun zu zeigen, daß die beiden Wegeklassen

$$[\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_1^{-1}], \quad [\mathfrak{C}\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_1''\mathfrak{C}_2''\mathfrak{C}_2^{-1}\mathfrak{C}_1^{-1}] \tag{6}$$

bezüglich H konjugiert sind; wir werden sogar finden, daß beide Klassen identisch sind.

Durch die stetige Kurvenschar

$$\mathfrak{C}_\sigma^* = \{f_{\sigma\tau}(p_\tau) \ (0 \leqq \tau \leqq 1); \ \ f_{\sigma+\tau-\sigma\tau}(q_\tau) \ (0 \leqq \tau \leqq 1)\} \ (0 \leqq \sigma \leqq 1)$$

wird $\mathfrak{C}_0^* = \mathfrak{C}_1'\widetilde{\mathfrak{C}}_2$ in

$$\mathfrak{C}_1^* = \{f_\tau(p_\tau)\ (0 \leqq \tau \leqq 1);\ f_1(q_\tau)\ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$$

deformiert, es ist also nach (5)

$$(7) \qquad [\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_2] = [\mathfrak{C}_1'\widetilde{\mathfrak{C}}_2] = [\mathfrak{C}_1^*].$$

Weiter wird die Kurve $\mathfrak{C}_1^*$, die sich auch als

$$\mathfrak{C}_1^* = \left\{f_{\frac{\tau}{2}}(p_{\frac{\tau}{2}})\ (0 \leqq \tau \leqq 1);\quad f_{\frac{1+\tau}{2}}(p_{\frac{1+\tau}{2}})\ (0 \leqq \tau \leqq 1);\quad f_1(q_\tau)\ (0 \leqq \tau \leqq 1)\right\}$$

schreiben läßt, durch

$$\mathfrak{C}_\sigma^* = \Big\{f_{\frac{\sigma}{2}\tau}\ (p_{\frac{2-\sigma}{2}\tau})\ (0 \leqq \tau \leqq 1);\quad f_{1-(1-\tau)\frac{2-\sigma}{2}}(p_{1-\frac{1-\tau}{2}\sigma})\ (0 \leqq \tau \leqq 1);$$
$$f_1(q_\tau)\ (0 \leqq \tau \leqq 1)\Big\} \quad (1 \leqq \sigma \leqq 2)$$

stetig überführt in

$$\mathfrak{C}_2^* = \{f_\tau(p_0)\ (0 \leqq \tau \leqq 1);\ f_1(p_\tau)\ (0 \leqq \tau \leqq 1);\ f_1(q_\tau)\ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$$
$$= \mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_1''\mathfrak{C}_2'',$$

also folgt nach (7)

$$[\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_2] = [\mathfrak{C}_1^*] = [\mathfrak{C}_2^*] = [\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_1''\mathfrak{C}_2''], \quad [\mathfrak{C}_1'] = [\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_1''\mathfrak{C}_2''\mathfrak{C}_2^{-1}],$$

und damit die Identität der Ausdrücke (6). —

Zum Beweise der dritten Behauptung nehmen wir $\{f, \mathfrak{C}\}$ sowie ein Element $\gamma \in \Gamma$ als gegeben an und haben nun einen solchen bei $f = f_0$ beginnenden Deformationsweg $\{f_\tau\ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$ anzugeben, daß einem bei f_1 auftretenden Fixpunkt das Element γ zugeordnet wird. $\mathfrak{C}_0 = \{p_\tau\ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$ sei ein Weg von $f(p)$ nach p, so daß $[\mathfrak{C}\mathfrak{C}_0] = \gamma$ ist. Den Deformationsweg wählen wir so, daß

$$(8) \qquad f_\tau(p) = p_\tau\ (0 \leqq \tau \leqq 1)$$

ist; die Existenz werden wir sogleich zeigen. p ist dann Fixpunkt bei f_1. Als Weg von p nach $f_1(p)$ ($\mathfrak{C}$ in Formel (3)) haben wir $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_0$ zu verwenden; den Weg $\mathfrak{C}_1$ in (3) unterdrücken wir, da der Fixpunkt mit p zusammenfällt. Dann wird nach (3) in der Tat $\alpha = [\mathfrak{C}\mathfrak{C}_0] = \gamma$. — Um die Existenz von $\{f_\tau\}$ einzusehen, führen wir in einer geeigneten Umgebung von p „Polarkoordinaten" r, φ ein[12]); $u(r, \varphi)$ sei für $0 \leqq r \leqq 2\,\varepsilon$ der Punkt mit den Polarkoordinaten r

[12]) Es sei eine Zerlegung K von $\mathfrak{P}$ gewählt, bei der p als Ecke auftritt; der offene Simplexstern $O_k(p)$ (vgl. AH., S. 131) enthalte alle $x \in \mathfrak{P}$ mit $\varrho(x, p) \leqq 2\,\varepsilon$. Setzt man den Abstand $\varrho(x, p) = r(x)$ und versteht unter $\varphi(x)$ für $r(x) \leqq 2\,\varepsilon$ den Punkt des Begrenzungskomplexes $B_k(p)$ (nach AH., S. 131; des „Ringes um p" nach R. 2, S. 50), in den x von p aus projiziert wird, so sind $r(x)$ und $\varphi(x)$ als Polarkoordinaten von x verwendbar.

und φ; er durchfegt die $2\,\varepsilon$-Umgebung von p. Dann sei für $0 \leqq \tau \leqq 1$ (mit $r = r(x)$, $\varphi = \varphi(x)$)

$$f_\tau(x) = \begin{cases} p_{\tau - \frac{r}{\tau}} & \text{für } 0 \leqq r \leqq \varepsilon\tau, \\ f\left(u(r - \varepsilon\tau,\ \varphi)\right) & \text{für } \varepsilon\tau \leqq r \leqq \varepsilon, \\ f\left(u(\varepsilon\tau + r - 2\,\varepsilon\tau,\ \varphi)\right) & \text{für } \varepsilon \leqq r \leqq 2\,\varepsilon, \\ f(x) & \text{sonst für } x \in \mathfrak{P}. \end{cases}$$

Die Stetigkeit in τ und x sowie die Bedingungen (8) und $f_0 = f$ sind leicht zu verifizieren. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Da die Zahl der Fixpunktklassen stets endlich ist (W. 1, Satz 1), die Zahl der H-Klassen $\mathfrak{p}_1^H, \mathfrak{p}_2^H, \ldots$ jedoch unendlich sein kann (hierfür sind sehr leicht Beispiele zu bilden), gibt es im allgemeinen H-Klassen ohne zugeordnete Fixpunktklassen. Eine einer H-Klasse $\mathfrak{p}_k^H$ zugeordnete Fixpunktklasse $\mathfrak{f}_k$ kann bei Deformation der Abbildung verschwinden und wieder auftauchen; da sie aber durch die H-Klasse $\mathfrak{p}_k^H$ individuell kenntlich ist, ist es gerechtfertigt, *stets* von der zu $\mathfrak{p}_k^H$ gehörigen Fixpunktklasse $\mathfrak{f}_k$ zu sprechen, indem man $\mathfrak{f}_k$ als *leer* bezeichnet, wenn keine Fixpunkte $\mathfrak{p}_k^H$ zugeordnet sind. Zufolge der letzten Behauptung des Hilfssatzes kommt dann bei jeder Abbildung aus $\mathfrak{k}$ *jeder* H-Klasse eine Fixpunktklasse zu. Jede leere Fixpunktklasse soll durch Definition die Fixpunktzahl 0 erhalten. Diese erweiterte Definition der Fixpunktklassen ermöglicht es, die Sätze 2 und 3 aus W. 1 in verschärfter Form auszusprechen, und wir gewinnen zusammenfassend folgendes Ergebnis:

Satz 1. *Nach Wahl von f und $\mathfrak{C}$ besteht zufolge* (3) *eine eineindeutige und deformationsinvariante Zuordnung zwischen den H-Klassen und den Fixpunktklassen. Die algebraischen Fixpunktzahlen aller Fixpunktklassen sind deformationsinvariant. Bei jeder Abbildung sind alle Fixpunktklassen bis auf endlich viele leer, aber keine Fixpunktklasse bleibt bei Deformation der Abbildung beständig leer.*

Nach Satz 1 erscheinen die Fixpunktzahlen v_k mittelbar den H-Klassen $\mathfrak{p}_k^H$ zugeordnet. Man kann in vektorieller Schreibweise[13])

$$R_0 = \sum_k v_k \mathfrak{p}_k^H \tag{9}$$

die H-Klassen mit den zugeordneten Fixpunktzahlen zusammenfassen. In der Kombination

$$\{H, R_0\} \tag{10}$$

sind alle von uns abgeleiteten deformationsinvarianten Eigenschaften von $\{f, \mathfrak{C}\}$ enthalten.

---

[13]) Die additive Auffassung wird später (§ 4) gerechtfertigt werden.

§ 3.

Eine andere Definition der Fixpunktklassen.

Die von Nielsen bevorzugte geometrische Deutung der (von ihm rein algebraisch eingeführten) Fixpunktklassen ist nicht die von uns angegebene. Wir benötigen sie jetzt, um die Identität von R_0 mit der Reidemeisterschen Spureninvarianten nachzuweisen (§ 4), und führen dazu die *universelle Überlagerung* $\widetilde{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$ ein.

Wir definieren in üblicher Weise[14]) $\widetilde{\mathfrak{P}}$ als die *Gesamtheit der Klassen in* p *beginnender Wege in* $\mathfrak{P}$, wo p wie bisher ein fest gewählter Punkt von $\mathfrak{P}$ ist[15]). Als *Punkte* von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ bezeichnen wir jene Wegeklassen auch mit $P, Q, X, Y, \ldots$; insbesondere sei $[p] = P$. Die Abhängigkeit der Überlagerung $\widetilde{\mathfrak{P}} = \widetilde{\mathfrak{P}}_p$ von p ist nur eine scheinbare, da die Klassen von $\widetilde{\mathfrak{P}}_q$ aus denen von $\widetilde{\mathfrak{P}}_p$ gewonnen werden können durch eine triviale Linksmultiplikation, die alle wichtigen Eigenschaften von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ erhält.

Es sei $q \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{C}_0$ ein Weg von p nach q; wir setzen $[\mathfrak{C}_0] = Q$. Jeder solche Punkt von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ erlaubt eine Multiplikation von links mit Elementen aus Γ:

$$\alpha Q = [\mathfrak{W}\mathfrak{C}_0],$$

wenn $\alpha = [\mathfrak{W}]$ ist. Γ ist somit gleichzeitig eine Gruppe von Selbstabbildungen (*Decktransformationen*) von $\widetilde{\mathfrak{P}}$. Die Punkte αQ mit $\alpha \in \Gamma$ heißen die *über* q *liegenden* Punkte von $\widetilde{\mathfrak{P}}$. Topologische und metrische Eigenschaften von $\mathfrak{P}$ lassen sich auf $\widetilde{\mathfrak{P}}$ übertragen, z. B. durch die Festsetzung, daß als *Entfernung* $\tilde{\varrho}(Q_1, Q_2)$ zweier Punkte von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ die untere Grenze der Durchmesser aller Wege $\mathfrak{C}$ mit $Q_1[\mathfrak{C}] = Q_2$ gelten soll. $\widetilde{\mathfrak{P}}$ wird hierdurch zu einem metrischen Raum. Die Decktransformationen sind stetig, isometrisch und fixpunktfrei.

Durch die Funktion

$$\Phi(Q) = q,$$

die jedem Punkt $Q = [\mathfrak{C}]$ den Endpunkt q der Wege $\mathfrak{C}$ zuordnet, wird $\widetilde{\mathfrak{P}}$ stetig und im kleinen topologisch auf $\mathfrak{P}$ abgebildet. Durch ihre Umkehrung Φ^{-1} wird jedem Wege $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{P}$ eindeutig ein über $\mathfrak{C}$ liegender Weg $\widetilde{\mathfrak{C}}$ in $\widetilde{\mathfrak{P}}$ zugeordnet, sobald dessen Anfangspunkt aus den über dem Anfangspunkt von $\mathfrak{C}$ liegenden Punkten gewählt ist. Hierdurch wird es auch möglich, jede Simplizialzerlegung von $\mathfrak{P}$ nach $\widetilde{\mathfrak{P}}$ durchzudrücken; $\widetilde{\mathfrak{P}}$ ist, wie man alsbald erkennt, homöomorph

---

[14]) Vgl. H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche. Leipzig 1913. S. 51. B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I. Berlin 1923. S. 176.

[15]) Daß die Klassen geschlossener Wege aus p gleichzeitig Gruppenelemente sind, wird nicht zu Mißverständnissen Anlaß geben.

zu einem lokal-endlichen Polyeder[16]) von gleicher Dimensionszahl wie $\mathfrak{P}$, ist also ein „Komplex"[17]). Ein einbettender euklidischer Raum wird durch diese Konstruktion nicht geliefert.

Ist eine stetige Abbildung $f(x)$ von $\mathfrak{P}$ in sich gegeben und ein Punkt $P' = [\mathfrak{C}]$ über $f(p)$ gewählt, so gibt es genau eine stetige Selbstabbildung $F(X)$ von $\widetilde{\mathfrak{P}}$, so daß

$$F(P) = P' \tag{11}$$

ist und aus $F(X) = Y$ stets $f(\Phi(X)) = \Phi(Y)$ folgt. (Die Konstruktion von F erfolgt wieder mittels der Funktion Φ^{-1}.) Man sagt, daß $F(X)$ eine über $f(x)$ liegende Selbstabbildung von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ ist; die sämtlichen über f liegenden derartigen Abbildungen sind die Funktionen $\alpha F(X)$ mit $\alpha \in \Gamma$. Es zeigt sich, daß mit der oben getroffenen Wahl von $\mathfrak{C}$ gerade eine bestimmte unter den über f liegenden Abbildungen festgelegt ist.

An Hand der Überlegungen von § 1 ersieht man, daß für $\alpha \in \Gamma$

$$F(\alpha P) = (H\alpha) F(P)$$

ist, wenn (11) vorausgesetzt ist; da $F(\alpha X)$ über $f(x)$ liegt, folgt allgemein

$$F(\alpha X) = (H\alpha) F(X). \tag{12}$$

Ist q Fixpunkt bei $f(x)$ und liegt Q über q, so muß mit passendem $\alpha \in \Gamma$

$$F(Q) = \alpha Q \tag{13}$$

sein; α hat den in (3) angegebenen Wert, denn aus $F([p]) = [\mathfrak{C}]$ folgt nach Fig. 1 aus Stetigkeitsgründen

$$F([\mathfrak{C}_1]) = [\mathfrak{C} f(\mathfrak{C}_1)] = [\mathfrak{C} f(\mathfrak{C}_1) \mathfrak{C}_1^{-1}] \, [\mathfrak{C}_1] = \alpha [\mathfrak{C}_1].$$

Die durch (13) erklärte Zuordnung zwischen Fixpunkten und Gruppenelementen ist also die uns bekannte. Zufolge (13) liegt über q ein Fixpunkt bei der Abbildung $\alpha^{-1} F(X)$. Ist q_1 ein Fixpunkt der gleichen Klasse wie q, ist also etwa

$$F(Q_1) = (H\gamma) \alpha \gamma^{-1} Q_1,$$

so folgt nach (12)

$$F(\gamma^{-1} Q_1) = \alpha (\gamma^{-1} Q_1),$$

d. h. auch über q_1 liegt ein Fixpunkt (nämlich $\gamma^{-1} Q_1$) bei derselben Abbildung. Daß umgekehrt jeder Fixpunkt bei $\alpha^{-1} F$ über einem Fixpunkt bei f aus der genannten Fixpunktklasse liegt, ist nach dem Gesagten klar. So ergibt sich der Satz[18]): *Liegen über $f(x)$ die Funktionen $\alpha^{-1} F(X)$ $(\alpha \in \Gamma)$ mit den Fix-*

[16]) Vgl. AH., S. 129 und 149.

[17]) Im Sinne von ST., S. 42.

[18]) N., Satz 13.

punktmengen $\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha$, *so stellen die Punktmengen* $\mathfrak{f}_\alpha = \Phi(\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha)$ *die Fixpunktklassen bei* $f(x)$ *dar.*

Es ist $\mathfrak{f}_\alpha = \mathfrak{f}_\beta$, wenn α und β bezüglich H konjugiert sind. — Der eben ausgesprochene Satz liefert die angekündigte Definition der Fixpunktklassen, die sich rein geometrisch formulieren läßt, sobald die universelle Überlagerung $\tilde{\mathfrak{P}}$ und die über f liegenden Selbstabbildungen von $\tilde{\mathfrak{P}}$ eingeführt sind.

§ 4.

Die Reidemeistersche Spureninvariante.

Zur praktischen Berechnung der Fixpunktzahlen knüpfen wir an frühere Überlegungen an. Aus W. 1, S. 663 und AH., S. 528, 538, 542 entnehmen wir folgenden Hilfssatz: *Es sei* K_1 *eine Unterteilung der Zerlegung* K *von* $\mathfrak{P}$, $g(x)$ *eine simpliziale Abbildung von* K_1 *in* K *mit nur Grund-Fixsimplexen und* $g(\mathfrak{c}^r)$ *der von* $g(x)$ *in der r-dimensionalen Kettengruppe* $L^r(K_1)$ *induzierte Automorphismus. Jedes Fixsimplex* $\mathfrak{a}_i^r$ *bei* $g(\mathfrak{c}^r)$ *enthält genau einen Fixpunkt bei* $g(x)$; *ist* j *sein Index, so ist*

$$g(\mathfrak{a}_i^r) = \sum_k l_{ik}^r \mathfrak{a}_k^r, \quad l_{ii}^r = j. \tag{14}$$

Abbildungen $g(x)$ *der bezeichneten Art liegen überall dicht in jeder Abbildungsklasse.*

Diese Tatsachen, die in derselben Gruppierung zum Beweis des Fixpunktsatzes verwendet wurden, kombinieren wir mit dem im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Satze.

$\tilde{K}_1$, der universelle Überlagerungskomplex[19]) von K_1, stellt eine Zerlegung von $\tilde{\mathfrak{P}}$ dar, und eine über $g(x)$ liegende Abbildung $G(X)$ ist eine Simplizialabbildung, die eine Transformation $T(\tilde{\mathfrak{c}})$ der Ketten von $\tilde{K}_1$ induziert. T ist ein Automorphismus des zu K_1 gehörigen Homotopiekettenringes[20]) im Sinne von R. 1. Die Abbildung $\varkappa G(X)$ $(\varkappa \in \Gamma)$ induziert den Automorphismus $\varkappa T(\tilde{\mathfrak{c}})$. Die Zellen von $\tilde{K}_1$ bezeichnen wir mit $\gamma \mathfrak{a}_k^r$ $(\gamma \in \Gamma)$ und schreiben für $1\mathfrak{a}_k^r$ wieder $\mathfrak{a}_k^r$. Ist etwa

$$T(\mathfrak{a}_i^r) = \sum_k t_{ik}^r \mathfrak{a}_k^r, \tag{14'}$$

$g(q) = q$, $q \in \mathfrak{a}_i^r$, Q über q, $\alpha^{-1}G(Q) = Q$, *so ist das über* $\mathfrak{a}_i^r$ *liegende,* Q *enthaltende Simplex* $\gamma^{-1}\mathfrak{a}_i^r$ *von* $\tilde{K}_1$ *Fixsimplex bei* $\alpha^{-1}T$, und die Kette $\alpha^{-1}T(\gamma^{-1}\mathfrak{a}^r)$ muß nach (14) das Glied

$$j\gamma^{-1}\mathfrak{a}_i^r$$

[19]) Vgl. ST., S. 194; R. 2, S. 182.

[20]) Zur Definition der Homotopieketten vgl. auch R. 2, § 17 · 5.

enthalten. Wegen

$$T(\gamma\tilde{\mathfrak{c}}) = (H\gamma)T(\tilde{\mathfrak{c}})$$

[vgl. (11) und R. 1, (2)] und (14′) ist aber

$$\alpha^{-1}T(\gamma^{-1}\mathfrak{a}_i^r) = \alpha^{-1}(H\gamma)^{-1}\sum_k t_{ik}^r \mathfrak{a}_k^r,$$

also $j\gamma^{-1} = \alpha^{-1}(H\gamma)^{-1}\, t_{ii}^r$,

$$t_{ii}^r = j(H\gamma)\alpha\gamma^{-1}.$$

Es ist also t_{ii}^r der Index des betreffenden Fixpunktes, multipliziert mit einem Element der zugehörigen H-Klasse. Versteht man für $\gamma \in \Gamma$ unter $|\gamma|$ die γ enthaltende H-Klasse $\mathfrak{p}_l^H$ und setzt für Gruppenringelemente[21]) $t = \sum_i n_i\gamma_i$

$$|t| = \sum_i' n_i|\gamma_i| = \sum_i n_i \mathfrak{p}_{l_i}^H,$$

so stellt die *Reidemeistersche Spureninvariante*[22])

$$R(T) = \Big|\sum_{i,r}(-1)^r t_{ii}^r\Big| = \sum_l v_l \mathfrak{p}_l^H \tag{15}$$

genau das System der H-Klassen, jede mit der zugehörigen Fixpunktzahl versehen, also den Ausdruck (9) aus § 2 dar. Wir können demnach folgendes feststellen:

Satz 2. *Es sei K eine Zerlegung von $\mathfrak{P}$ und K_1 eine Unterteilung von K; $g(x)$ sei eine Simplizialabbildung von K_1 in K mit nur Grund-Fixsimplexen, $g(\mathfrak{c})$ der dadurch erzeugte Automorphismus der Ketten von K_1. Bezeichnet R_0 nach* (9) *das System der Fixpunktklassen bei $g(x)$, so liegt über $g(\mathfrak{c})$ ein Automorphismus T des Homotopiekettenringes von K_1 mit*

$$R(T) = R_0. \tag{16}$$

Korollar 1. *Die Invariante R_0 einer Abbildung f läßt sich berechnen, indem man für eine Simplizialapproximation $g(x)$ nach Satz* 2 *die Spureninvariante $R(T)$ bildet; es gilt* (16).

Korollar 2. *Sind T_1 und T_2 Automorphismen desselben Homotopiekettenringes, die über homotopen Simplizialabbildungen der in Satz* 2 *bezeichneten Art liegen, so ist mit passendem $\gamma \in \Gamma$*

$$R(T_2) = \gamma R(T_1).$$

In Korollar 1 wird von dem Umstand Gebrauch gemacht, daß die Simplizialapproximation $g(x)$ durch eine *kleine* Deformation aus $f(x)$ hervorgeht; es ist darauf zu achten, daß der richtige, d. h. dem System $\{f, \mathfrak{C}\}$ entsprechende Automorphismus T genommen wird. — In Korollar 2 mußte berücksichtigt werden, daß T durch die Abbildung des Grundkomplexes nur bis auf einen

---

21) Der Übergang von t zu $|t|$ im Gruppenring ist eine Restklassenbildung nach der (additiven) Untergruppe der t_0 mit $|t_0| = 0$.

22) In R. 1 mit $|s|$ bezeichnet.

inneren Automorphismus und R daher nur bis auf einen links stehenden Faktor aus Γ bestimmt ist (R. 1, S. 592).

Die Frage, ob (16) stets gilt, sobald für eine Abbildung beide Seiten Sinn haben, kann hier übergangen werden, da bereits die in Satz 2 zugelassenen Abbildungen in $\mathfrak{k}$ überall dicht liegen. Die Identität (16) kann deshalb nicht in gleicher Allgemeinheit wie diejenige zwischen der Lefschetz-Hopfschen Spureninvarianten Λ und der Fixpunktgesamtzahl ausgesprochen werden, weil R zur Zeit nicht als stetigkeitstopologische Größe definiert werden kann. Λ dagegen ließ sich durch Homologiegruppen ausdrücken und war deshalb schon unabhängig vom Fixpunktsatz deformationsinvariant.

§ 5.

Invariante Formulierung des Ergebnisses.

Aus der in § 2, (10) gewonnenen von $\{f, \mathfrak{C}\}$ abhängigen deformationsinvarianten Größe haben wir nun eine von $\mathfrak{C}$ unabhängige Homotopieinvariante abzuleiten. Es wäre unzweckmäßig gewesen, von vornherein nur mit Invarianten im großen zu arbeiten, da die Übersichtlichkeit der Ausdrücke und die Durchsichtigkeit der Methode hierunter gelitten hätten.

Wir wissen aus § 1: bei Ersatz von $[\mathfrak{C}]$ durch $\gamma\,[\mathfrak{C}]$ geht H in $T_\gamma H$ über[23]). Aus (3) entnimmt man, daß dann die den Fixpunkten zugeordneten Gruppenelemente alle links den Faktor γ erhalten. Jede H-Klasse ist also zu ersetzen durch die entsprechende $T_\gamma H$-Klasse

$$\mathfrak{p}_l^{T_\gamma H} = \gamma\,\mathfrak{p}_l^H,$$

der dieselbe Fixpunktklasse, also auch die gleiche Fixpunktzahl zugeordnet ist. Der Ausdruck R_0 (Formel (9)) geht über in $\sum\limits_k v_k \gamma\,\mathfrak{p}_k^H = \gamma R_0$.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{k}$ eine Klasse von Abbildungen des Polyeders $\mathfrak{P}$ in sich, Γ die Wegegruppe von $\mathfrak{P}$ mit dem Aufpunkt p. Wählt man eine Abbildung f aus $\mathfrak{k}$ und einen Weg $\mathfrak{C}$ von p nach $f(p)$ und bildet nach § 2 H und R_0, so ist*

$$\Sigma_2 = \{T_\gamma H,\ \gamma R_0\ (\gamma \in \Gamma)\} \tag{17}$$

eine von f und $\mathfrak{C}$ unabhängige Invariante.

Der Ausdruck (17) soll die Menge aller Paare $\{T_\gamma H, \gamma R_0\}$ bezeichnen, die erhalten wird, wenn man γ ganz Γ durchlaufen läßt. — Der Beweis wurde soeben erbracht.

Die Tatsache, daß $\mathfrak{k}$ eine Automorphismenfamilie Σ_1 invariant zugeordnet ist, ist in Satz 3 als Teilaussage enthalten. Desgleichen lassen sich aus (17),

---

[23]) Im Falle mehrstufiger Automorphismen ist der Ausdruck $T_\gamma H$ allgemeiner als $H T_\gamma = T_{H\gamma} H$; vgl. R. 1, S. 592.

ja schon aus dem Ausdruck R_0 (Formel (9)), die Fixpunktzahlen v_k ablesen; etwa nach nicht wachsenden Absolutbeträgen geordnet und bei gleichem Betrag die positiven den negativen Zahlen vorangestellt, bilden sie eine wohlbestimmte $\mathfrak{k}$ invariant zugeordnete Folge von Zahlen

$$(18) \qquad v_1, v_2, \ldots, v_\nu \text{ (für } \nu < \infty) \text{ bzw. } v_1, v_2, \ldots \text{ (für } \nu = \infty).$$

Hier ist ν die durch Γ und H oder $\{T_\gamma H\ (\gamma \in \Gamma)\}$ festgelegte Zahl der H-Klassen. Es ist $v_k = 0$ für $k > \mu$, falls $\nu > \mu$; $v_k \neq 0$ für $k \leqq \mu$. Die Zahlenfolge $v_1, \ldots, v_\mu$ war freilich bereits durch W. 1 als Invariante der Abbildungsklasse erkannt, doch enthält (17) natürlich mehr als dies. Durch (18) ist auch die Gesamtzahl der Fixpunkte, die Lefschetzsche Zahl $\Lambda = \sum_{k=1}^{\mu} v_k = \sum_{k=1}^{\nu} v_k$ ausdrückbar. Aus der Zahlenfolge (18) ist ferner zu ersehen, wieviel unwesentliche Fixpunktklassen bei einer Abbildung aus $\mathfrak{k}$ auftreten können; denn aus dem Beweis des letzten Teiles des Hilfssatzes, in dem eine leere Fixpunktklasse „sichtbar gemacht" wird, liest man ab, daß jenes Verfahren gleichzeitig für beliebig (endlich) viele Fixpunktklassen durchführbar ist, da es nur eine Abänderung auf einem beliebig kleinen Teilbereich an beliebiger Stelle erfordert. Es folgt: Im Falle $\nu < \infty$ gibt es *maximal* $\nu - \mu$ *unwesentliche* Fixpunktklassen, im Falle $\nu = \infty$ enthält $\mathfrak{k}$ Abbildungen mit *beliebig vielen* Fixpunktklassen. In § 8 werden hierfür Beispiele gegeben.

§ 6.

Zuordnung zwischen Fixpunktklassen verschiedener Abbildungen im großen.

Nach W. 1, Satz 2 besteht zwischen den Fixpunktklassen bei homotopen Abbildungen f und g eine eineindeutige Zuordnung, die durch einen Deformationsweg vermittelt wird. Die Frage liegt nahe, ob und wann diese Zuordnung vom Wege unabhängig ist, wann also eine Fixpunktklasse bei allen Abbildungen von $\mathfrak{k}$ individuell wiedererkennbar ist. Die Invariante Σ_2 gibt hierüber keinen Aufschluß.

Bei solchen Fixpunktklassen, deren Fixpunktzahl in der Folge (18) nur einmal auftritt, ist es trivialerweise der Fall. Daß aber nicht stets durch den erwähnten Satz eine eindeutige Fixpunktklassenzuordnung „im großen", unabhängig vom Deformationswege, geliefert wird, ist an folgendem einfachen Beispiel zu erkennen.

Mit ξ^* bezeichnen wir für reelles ξ die Restklasse der λ mit $\lambda \equiv \xi$ (mod 1). $\mathfrak{P}$ sei homöomorph zu einem Kreis; wir betrachten $\mathfrak{P}$ als Menge der ξ^* $(0 < \xi \leqq 1)$. Eine Schar von Abbildungen wird gegeben durch

$$f_\tau(\xi^*) = \tau^* - \xi^* \quad (0 \leqq \tau \leqq 1);$$

es entstehen bei f_τ die beiden Fixpunkte

$$p_\tau = \left(\frac{\tau}{2}\right)^*, \quad q_\tau = \left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right)^*.$$

Man sieht leicht, daß p_0 und q_0 bei f_0 verschiedenen Fixpunktklassen angehören; jedoch ist $f_0 = f_1$ und der Deformationsweg $\{f_\tau \ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$ ordnet offenbar p_0 und $p_1 = q_0$, q_0 und $q_1 = p_0$ einander zu, vertauscht also die beiden Fixpunktklassen.

Die Redeweise „in der gleichen Fixpunktklasse liegen" ist daher, wenn es sich um verschiedene Abbildungen handelt, mit der gleichen Vorsicht zu verwenden wie der Ausdruck „dem gleichen Blatt angehören" bei Überlagerungen. (In der Tat handelt es sich hier um eine Überlagerungsbeziehung.) Die geschlossenen bei einer festen Abbildung $f \in \mathfrak{f}$ beginnenden Deformationswege erzeugen Permutationen unter den Fixpunktklassen; diese bilden eine Gruppe $\mathfrak{g}$, die augenscheinlich ein homomorphes Bild der Fundamentalgruppe von $\mathfrak{f}$ ist.

Wir fragen nun nach hinreichenden Bedingungen, unter denen die Zuordnung der Fixpunktklassen vom Wege unabhängig bleibt; oder, was auf dasselbe hinausläuft, nach notwendigen Bedingungen dafür, daß zwei bei einer Abbildung f auftretende Fixpunktklassen $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ durch die Gruppe $\mathfrak{g}$ transitiv verbunden[24]) sind. Diese Aussage hat einen geometrischen Sinn; es besteht dann zwischen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ die in W. 1, § 3 erklärte Zuordnung.

Es sei

$$\{H, \sum_k v_k \mathfrak{p}_k^H\} \tag{19}$$

ein Wert der Invarianten (10), der durch $\{\mathfrak{f}, \mathfrak{C}\}$ bestimmt ist, und $\mathfrak{g}$ habe mindestens zwei Elemente. Durch einen bei f beginnenden geschlossenen Deformationsweg realisieren wir eine von der Identität verschiedene Permutation; die Invariante hat ihren Wert behalten, doch hat $[\mathfrak{C}]$ an der Deformation teilgenommen und ist etwa in $\varkappa^{-1}[\mathfrak{C}]$ übergegangen, und die den $\mathfrak{p}_k^H$ zugeordneten Fixpunktklassen sind permutiert. Ersetzen wir nun wieder $\varkappa^{-1}[\mathfrak{C}]$ durch $[\mathfrak{C}]$, so nimmt die Invariante den Wert

$$\{T_\varkappa H, \sum_k v_k \varkappa \mathfrak{p}_k^H\}$$

an, der jedoch mit (19) identisch sein muß. Es folgt, daß

$$T_\varkappa H = H \tag{20}$$

ist und daß unter den H-Klassen durch die Linksmultiplikation mit $\varkappa$ eine Permutation erzeugt wird, bei der aus $\varkappa \mathfrak{p}_i^H = \mathfrak{p}_l^H$ stets $v_i = v_l$ folgt. Die Bedingung (20) besagt, daß $\varkappa$ mit jedem Element der Bildgruppe $H\Gamma$ vertauschbar ist; jedes derartige $\varkappa$ erzeugt unter den H-Klassen eine Permutation,

[24]) Über Permutationsgruppen vgl. S., S. 110.

der aber nicht ohne weiteres eine geometrische Bedeutung zuzukommen braucht. Wir fassen das Ergebnis zusammen.

Satz 4. *Damit zwei bei einer Abbildung* f *auftretende Fixpunktklassen* $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ *durch* $\mathfrak{g}$ *transitiv verbunden sind, ist notwendig,*

a) daß ihre algebraischen Fixpunktzahlen gleich sind: $v_1 = v_2$;

b) daß in Γ *ein* $\varkappa \neq 1$ *existiert, das mit jedem Element der Gruppe* $H\Gamma$ *vertauschbar ist;*

c) daß mit einem solchen $\varkappa \in \Gamma$ $\varkappa \mathfrak{p}_1^H = \mathfrak{p}_2^H$ *gilt. Hierbei ist* H *irgendein durch* f *erzeugter Automorphismus von* Γ.

Die Bedingung b) ist besonders bequem anwendbar, weil sie nur die Kenntnis von Γ und H voraussetzt. Sie ist sicher nicht erfüllt, wenn folgende zwei Bedingungen gelten:

α) *H ist einstufig*, d. h. $H\Gamma = \Gamma$.

β) *Das Zentrum von* Γ *enthält nur das Einselement.*

Bedingung α) ist insbesondere bei topologischen Abbildungen stets erfüllt. Beide Bedingungen sind in dem von Nielsen vorwiegend untersuchten Falle (geschlossene Flächen mit einem Geschlecht größer als 1) erfüllt. Dort ist also die Aussage, daß zwei Fixpunkte homotoper Abbildungen der gleichen Fixpunktklasse angehören, ohne weiteres sinnvoll. Im allgemeinen aber kann man höchstens die Aussage machen, daß zwei solche Fixpunktklassen dem gleichen transitiven System angehören.

§ 7.

Eine weitere Invariante.

Aus den Überlegungen von § 6 entnehmen wir, daß ein geschlossener, bei f beginnender Deformationsweg $\{f_\tau \; (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$ nur dann eine von der Identität verschiedene Permutation unter den Fixpunktklassen bei f erzeugen kann, wenn das System $\{f, \mathfrak{C}\}$ durch die Deformation wesentlich geändert wird. Der Bildpunkt von p beschreibe hierbei den Weg

$$\mathfrak{W}_1 = \{f_\tau(p) \; (0 \leqq \tau \leqq 1)\}; \tag{21}$$

es gehe $[\mathfrak{C}]$ dadurch über in

$$[\mathfrak{C}\mathfrak{W}_1] = \varkappa_1^{-1}[\mathfrak{C}] \tag{22}$$

und die Fixpunktklassen bei f mögen die Permutation Π_1 erleiden. $[\mathfrak{W}_1]$ und $\varkappa_1$ bestimmen sich nach (22) gegenseitig eindeutig. Die Menge aller in (22) möglichen Elemente $\varkappa_1$ heiße $\mathfrak{g}_3$. Indem man in (22) einen anderen derartigen Weg $\mathfrak{W}_2$ (mit zugehörigem $\varkappa_2$, Π_2), dann $\mathfrak{W}_1^{-1}$ und $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2$ einsetzt, erkennt man, daß $\mathfrak{g}_3$ eine Untergruppe von Γ ist, die durch die Zuordnung $\varkappa \to \Pi$ homomorph auf die Gruppe $\mathfrak{g}$ der Permutationen Π abgebildet wird. Umfaßt $\mathfrak{g}_4$ diejenigen Elemente $\varkappa_0$ von $\mathfrak{g}_3$, die die identische Permutation erzeugen, für die also

$$(23) \qquad \varkappa_0 \mathfrak{p}_k^H = \mathfrak{p}_k^H \ (k = 1, \ldots, \nu)$$

ist, so ist $\mathfrak{g}_4$ Normalteiler von $\mathfrak{g}_3$, und $\mathfrak{g}$ *ist isomorph zur Faktorgruppe* $\mathfrak{g}_3/\mathfrak{g}_4$.

Ist $\mathfrak{g}_1$ die Menge der $\gamma \in \Gamma$, die die Bedingung b) in Satz 4 (oder (20)) erfüllen, so ist $\mathfrak{g}_1$ Obergruppe von $\mathfrak{g}_3$; bezeichnet man noch mit $\mathfrak{g}_2$ die Untergruppe von $\mathfrak{g}_1$, deren Elemente $\varkappa$

$$(24) \qquad \{T_\varkappa H, \ \varkappa R_0\} = \{H, \ R_0\}$$

erfüllen, also nur solche H-Klassen permutieren, deren Fixpunktzahlen gleich sind (Bedingung a) und c) in Satz 4), so hat man

$$(25) \qquad \Gamma \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \mathfrak{g}_3 \supset \mathfrak{g}_4.$$

Hier ist $\mathfrak{g}_1$ durch Γ und H, $\mathfrak{g}_2$ durch Γ, H und R_0, $\mathfrak{g}_4$ und damit auch $\mathfrak{g}$ durch Γ, H und $\mathfrak{g}_3$ bestimmt. Jedoch kann $\mathfrak{g}_3$ aus den bisher besprochenen Invarianten nicht abgelesen werden; es lassen sich Beispiele finden, aus denen ersichtlich ist, daß selbst durch Σ_2 noch nicht festgelegt wird, ob $\mathfrak{g}$ mehr als nur ein Element enthält.

Die Gruppe $\mathfrak{g}_3$, die hier durch $\{f, \mathfrak{C}\}$ bestimmt wurde, ist offenbar deformationsinvariant. Um eine homotopieinvariante Aussage zu erhalten, fragen wir nach dem Einfluß einer unstetigen Abänderung von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{g}_3$.

Aus (21) erkennt man, daß ein Ersatz von $[\mathfrak{C}]$ durch $\gamma[\mathfrak{C}]$ eine Transformation $\varkappa_1 \to T_\gamma \varkappa_1$ zur Folge hat. Es geht also $\mathfrak{g}_3$ (entsprechend übrigens auch $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_4$) in eine konjugierte Untergruppe $T_\gamma \mathfrak{g}_3$ über. Durch Kombination dieses Ergebnisses mit Σ_2 erhalten wir den invarianten Ausdruck $\{T_\gamma H, \ \gamma R_0, \ T_\gamma \mathfrak{g}_3 \ (\gamma \in \Gamma)\}$.

Satz 5. *Die Menge*

$$(26) \qquad \Sigma_3 = \{T_\gamma H, \ \gamma R_0, \ T_\gamma \mathfrak{g}_3 \ (\gamma \in \Gamma)\}$$

ist eine Homotopieinvariante. $\mathfrak{g}_3$ *ist die Menge der* $\varkappa_1 \in \Gamma$, *für die* (21) *und* (22) *erfüllbar ist. Die Gruppe* $\mathfrak{g}$ *der Permutationen der Fixpunktklassen bei* f *ist isomorph zu* $\mathfrak{g}_3/\mathfrak{g}_4$, *wo* $\mathfrak{g}_4$ *die Menge der* $\varkappa_0 \in \mathfrak{g}_3$ *mit* (23) *ist.*

§ 8.

Beispiele.

Zur Veranschaulichung der Verhältnisse betrachten wir (wie schon in § 6) Abbildungen des Kreises in sich. $\mathfrak{P}$ sei wieder die Menge der ξ^* mit $0 \leqq \xi < 1$; $\check{p} = 0^*$; α sei die den Weg $\{\tau^* \ (0 \leqq \tau \leqq 1)\}$ enthaltende Klasse. Γ ist eine freie zyklische Gruppe mit dem erzeugenden Element α. Da Γ abelsch ist, enthält jede Automorphismenfamilie nur ein Element; es ist $\mathfrak{g}_1 = \Gamma$. Ein Automorphismus H von Γ wird völlig festgelegt durch Angabe von $H\alpha$; es gibt unendlich viele Automorphismen, sie werden definiert durch

$$H_n \alpha = \alpha^n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Die Abbildung

$$f^{(n)}(\xi^*) = n\,\xi^*$$

erzeugt den Automorphismus H_n; jedes $f^{(n)}$ gehört also einer besonderen Abbildungsklasse $\mathfrak{f}_n$ an. Wir übergehen den sehr leichten Beweis, daß hiermit sämtliche Abbildungsklassen erschöpft sind. (In dem Beispiel in § 6 war $n = -1$). Für jedes n ist $f^{(n)}(p) = p$. Stets ist ein geschlossener Deformationsweg angebbar, bei dem der Bildpunkt von p einen Weg der Klasse α beschreibt, nämlich $f_\tau^{(n)}(\xi^*) = f^{(n)}(\xi^*) + \tau^*$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$; daher ist $\mathfrak{g}_3 = \Gamma$. Die Bedingung für die Konjugiertheit zweier Elemente α^k, α^l nach H_n lautet

$$\alpha^l = (H_n \alpha^r)\,\alpha^k \alpha^{-r} = \alpha^{r(n-1)} \alpha^k;$$

die H_n-Klassen sind daher die Restklassen (oder Nebengruppen) nach der von α^{n-1} oder $\alpha^{|n-1|}$ erzeugten Untergruppe $\Gamma_{|n-1|}$. Die Zahl der H-Klassen ist also

$$\nu_n = |n-1| \quad \text{für} \quad n \neq 1,$$
$$\nu_1 = \infty.$$

Da $\mathfrak{g}_3$ das Element α enthält, das, als linker Faktor zu den Restklassen nach $\Gamma_{|n-1|}$ gesetzt, eine zyklische Vertauschung bewirkt, sind jeweils sämtliche Fixpunktklassen durch $\mathfrak{g}$ transitiv verbunden. Es ist $\mathfrak{g}_4 = \Gamma_{|n-1|}$, daher ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3/\mathfrak{g}_4$ zyklisch von der Ordnung $|n-1|$ (für $n \neq 1$) bzw. von der Ordnung ∞ (für $n = 1$).

Alle Fixpunktzahlen $v_k^{(n)}$ müssen bei festem n gleich sein, daher ist $\mu = \nu$ oder $\mu = 0$. Im Falle $n = 1$ (Klasse der Identität) folgt hieraus schon $\mu = 0$, da nicht $\mu = \infty$ sein kann. Es gibt also bei $\mathfrak{f}_1$ keine wesentlichen Fixpunktklassen; in der Tat gestattet ja der Kreis fixpunktfreie Deformationen in sich. Es gibt aber unendlich viele unwesentliche Klassen; es muß also Deformationen des Kreises mit beliebig vielen nicht leeren Fixpunktklassen geben. Solche erhält man in der Tat z. B. in der Gestalt

$$f_\omega^{(1)}(\xi^*) = (\xi + \omega \sin 2\pi\xi)^* \qquad (\omega > 0 \text{ fest}). \tag{27}$$

Die (aus der Hopfschen Spurformel berechenbare) Gesamtfixpunktzahl von $\mathfrak{f}^n$ ist $\Lambda^{(n)} = 1 - n$, daher haben wir

$$\mu = \nu = n - 1, \quad v_k = -1 \quad \text{für} \quad n > 1,$$
$$\mu = \nu = 1 - n, \quad v_k = 1 \quad \text{für} \quad n < 1,$$
$$\mu = 0,\ \nu = \infty, \quad v_k = 0 \quad \text{für} \quad n = 1.$$

Für $n \neq 1$ gibt es also nur $|n-1|$ wesentliche Klassen und *keine unwesentlichen*.

Da $\widetilde{\mathfrak{P}}$ die Zahlengerade ist, sind die über den f aus $\mathfrak{k}^n$ liegenden Abbildungen von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ stetige reelle Funktionen

$$F(\xi) = \eta,$$

die einer Funktionalgleichung

$$F(\xi + 1) = F(\xi) + n$$

genügen. Hieraus sind die obigen Angaben über μ und ν ebenfalls leicht zu entnehmen. Insbesondere erhält man die Fixpunkte von (27) klassenweise, wenn man die über $f_\omega^{(1)}$ liegenden Abbildungen

$$\alpha^k F_\omega^{(1)}(\xi) = \xi + \omega \sin 2\pi\xi + k$$

betrachtet und für verschiedene Werte von k diesen Ausdruck mit ξ gleichsetzt.

Bei diesen Beispielen war stets $\Gamma = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_3$. Daß der Fall $\mathfrak{g}_1 = \{1\}$ eintreten kann, d. h. daß schon $\mathfrak{g}_1$ nur das Einselement von Γ enthält, wurde auf S. 231 erwähnt. — Wäre stets $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_3$, so wäre $\mathfrak{g}_3$ durch Σ_2 bestimmt, was, wie schon in § 7 behauptet, nicht der Fall ist. Dann und nur dann, wenn $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_3$ ist, wenn also aus (20) (24) folgt, kann man R_0 als Funktion von $\mathfrak{k}$ und H, insbesondere bei festem H die Fixpunktzahlen als eindeutige Funktionen der H-Klassen betrachten. Jedoch lassen sich auch für $\mathfrak{g}_2 \neq \mathfrak{g}_3$ leicht Beispiele bilden. Man kann deshalb nicht allgemein die Fixpunktzahlen den H-Klassen eindeutig zuordnen.

(Eingegangen am 16. 4. 1941.)