

Über ein spezielles Dreiecksnetz aus Kegelschnitten.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 7. Dezember 1950.)

Das allgemeinste *Dreiecksnetz aus Geraden* wird nach dem bekannten Satz von H. Graf und R. Sauer von den Tangenten einer beliebigen *Kurve dritter Klasse* erzeugt¹. Diese darf auch zerfallen, so daß sich insbesondere auch die Strahlen dreier beliebiger *Büschel* zu einem Dreiecksnetz anordnen lassen.

Im Gegensatz zu diesem restlos geklärten Sachverhalt ist die Frage nach den Dreiecksnetzen, die sich aus *Kegelschnitten* (insbesondere *Kreisen*) aufbauen, keineswegs in voller Allgemeinheit gelöst. Den zahlreichen bekannt gewordenen Beispielen², die zum Großteil mittels quadratischer Transformationen aus geradlinigen Dreiecksnetzen abgeleitet wurden, wird in der vorliegenden Note ein weiteres Beispiel hinzugefügt, das auf der Verwendung einer *kubischen Transformation* beruht.

1.

Seien

$$a_i \equiv \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad b_i \equiv \sum_{j=1}^3 b_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

¹ Vgl. *W. Blaschke-G. Bol: Geometrie der Gewebe* (Berlin 1938), 24; Originalbeweis: *H. Graf-R. Sauer, Sitzungsber. bayer. Ak. Wiss.* 1924; vereinfachte Darstellung von *W. Blaschke: Tôhoku Math. J.* 37 (1933).

² Erwähnt seien etwa: *R. Sauer-O. Baier, Jahresber. d. DMV.* 43 (1934); *W. Schmid, Mh. Math. Phys.* 40 (1933), 45 (1936), 47 (1938), *Čas. mat. fys.* 66 (1937); *K. Strubecker, Mh. Math. Phys.* 39 (1932); *O. Volk, Sitzungsber. bayer. Ak. Wiss.* 1929; *W. Wunderlich, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien*, 147 (1938).

Weitere nichttriviale Kegelschnitts-Dreiecksnetze ließen sich beispielsweise auch mittels Projektion einer *Dupinschen Zyklide* (insbesondere der Torusfläche) gewinnen, da auf einer solchen je drei der vier Kreissysteme Dreiecksnetze erzeugen.

sechs verschiedene Linearformen mit konstanten Koeffizienten. Betrachtet wird die durch das Gleichungstripel

$$x_i^* = a_i/b_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

erklärte *Punkttransformation* $\mathfrak{T} = X \rightarrow X^*$ zweier ebenen Systeme \mathfrak{S} und \mathfrak{S}^* , beschrieben durch die homogenen Punktkoordinaten x_i , bzw. x_i^* . — Die durch Nullsetzen der Linearformen (1) in \mathfrak{S} ausgezeichneten Geraden mögen gleichfalls mit a_i und b_i bezeichnet werden; unter i, k, l stets irgend eine zyklische Anordnung der Indizes 1, 2, 3 verstanden, bedeute A_i den Schnittpunkt der Geraden a_k und a_l , B_i den Schnitt von b_k und b_l , C_i den Schnitt von a_i und b_i .

Wie nach Wegschaffen der Nenner in (2) zu erkennen ist, handelt es sich bei \mathfrak{T} um eine *kubische Verwandtschaft*. Den Geraden g von \mathfrak{S} entsprechen in \mathfrak{S}^* *rationale Kurven 3. Ordnung* g^* . Die Geraden h^* von \mathfrak{S}^* sind hingegen im allgemeinen die Bilder von *elliptischen Kubiken* h aus \mathfrak{S} ; letztere sind einem *linearen Netz* entnommen, das von den drei zerfallenen Kubiken $a_i b_k b_l = 0$ aufgespannt wird, welche den Koordinatenachsen $x_i^* = 0$ zugeordnet sind. Da die Punkte B_i und C_i allen drei Netzkomponenten angehören, sind sie auch sämtlichen Kubiken h gemeinsam; das Netz der h besitzt mithin die *sechs Grundpunkte* B_1, B_2, B_3 und C_1, C_2, C_3 , welche die *Hauptpunkte* der Ebene \mathfrak{S} abgeben. Die Verwandtschaft \mathfrak{T} ist *dreieindeutig*, da im allgemeinen jedem Punkt X vermöge (2) ein einziger Bildpunkt X^* zugeordnet wird, hingegen jeder Punkt X^* , etwa als Schnitt zweier Geraden h^* aufgefaßt, die drei freien Schnittpunkte der entsprechenden Kubiken h als Urbilder X besitzt.

Einer Geraden h_i^* durch die — einen *Hauptpunkt* abgebende — Ecke A_i^* des Koordinatendreiecks in \mathfrak{S}^* , dargestellt durch

$$x_k^*/x_l^* = \lambda_i, \tag{3}$$

entspricht in \mathfrak{S} eine zerfallende Kubik, bestehend aus der festen Geraden b_i und dem veränderlichen *Kegelschnitt* h_i

$$a_k b_l/a_l b_k = \lambda_i. \tag{4}$$

Dieser gehört dem von den Geradenpaaren a_k, b_l und a_l, b_k aufgespannten *Büschel* an, enthält also die festen Punkte A_i, B_i, C_k und C_l . — Das aus den drei Strahlbüscheln A_i^* aufgebaute *geradlinige Dreiecksnetz* wird mithin durch \mathfrak{T}^{-1} in ein *Dreiecksnetz aus Kegelschnitten* verwandelt. Drei zusammengehörige — d. h. durch einen Punkt gehende — Gerade h_1^*, h_2^*, h_3^* sind gekennzeichnet durch

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \tag{5}$$

ebenso die drei zusammengehörigen Kegelschnitte h_1, h_2, h_3 des Dreiecksnetzes in \mathfrak{C} .

Damit hat sich ergeben der

Satz I: *Sind $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ zwei Dreiecke in der Ebene und C_1, C_2, C_3 die Schnittpunkte entsprechender Seiten, so erzeugen die den drei Büscheln $A_1B_1C_2C_3, A_2B_2C_3C_1$ und $A_3B_3C_1C_2$ entnommenen Kegelschnitte ein Dreiecksnetz. Je drei zusammengehörige Kegelschnitte haben drei Punkte gemein.*

2.

Ein aus diskret angeordneten Exemplaren gebildetes Dreiecksnetz ergibt sich bei Benützung der Parameterwerte

$$\lambda_i = m_i q^n \text{ mit } m_1 m_2 m_3 = 1, \quad q \neq 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Sind die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ reell, so muß für ein reelles Dreiecksnetz auch q reell vorausgesetzt werden; das Netz enthält dann (von der trivialen Ausnahme $q = -1$ abgesehen) unendlich viele Kegelschnitte.

Reelle Dreiecksnetze existieren jedoch auch zu konjugiert-imaginären Grunddreiecken. Die Punkte C_i fallen hierbei auf jeden Fall reell aus, und die Parameterwerte λ müssen gemäß (4) lediglich mit Einheitsbetrag angenommen werden:

$$\lambda_j = \exp 2i\varphi_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Zusammengehörige Netzlinien sind nun durch

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (8)$$

gekennzeichnet, und man erhält ein diskretes Dreiecksnetz, wenn man $\varphi_j = \mu_j + n\delta$ mit $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \equiv 0 \pmod{\pi}$, $\delta \neq 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (9) wählt. Es besteht aus endlich vielen Kegelschnitten, die die Ebene einfach überdecken, wenn $N = \pi/2\delta$ ganz ist; im allgemeinen ist dann die Anzahl der Kegelschnitte $3N$, die Anzahl der eigentlichen Knoten $3N^2$.

In Abb. 1 ist ein derartiges Kegelschnitts-Dreiecksnetz dargestellt, das sich überdies durch dreizählige Drehsymmetrie auszeichnet. Mit Benützung inhomogener Normalkoordinaten x, y und ausgehend von dem Grundpunktepaar $A_1(0, i), B_1(0, -i)$, aus welchem die übrigen durch Drehungen um $\pm 120^\circ$ hervorgehen, ergeben sich die Grundseiten

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv 2y + i = 0, & a_{2,3} &\equiv \pm x\sqrt{3} + y - i = 0; \\ b_1 &\equiv 2y - i = 0, & b_{2,3} &\equiv \pm x\sqrt{3} + y + i = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

die Punkte C_j fallen in drei um je 120° versetzten Richtungen ins Unendliche.

Wegen der Drehsymmetrie genügt es, das erste Kegelschnittsbüschel (4) zu betrachten, wobei gemäß (7) $\lambda = e^{2i\varphi}$ zu setzen ist. Nach kurzer Rechnung erhält man über den verschwindenden Imaginärteil von

$$(x\sqrt{3} + y - i)(-x\sqrt{3} + y + i)(\cos\varphi - i\sin\varphi) \quad (11)$$

die Kegelschnittsgleichung

$$(x\sqrt{3}\sin\varphi + \cos\varphi)^2 - (y\sin\varphi)^2 = 1. \quad (12)$$

Es liegen durchwegs *Hyperbeln* mit 120° Asymptotenwinkel vor; Mittelpunktsabszisse und Halbachsen betragen der Reihe nach $-1/\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi$, $1/\sqrt{3}\sin\varphi$, $1/\sin\varphi$. Die Konstruktion gestaltet sich recht einfach, wenn man beachtet, daß auch die *Scheitelkreise* der Hyperbeln einem *Büschel* — mit den Grundpunkten $(0, \pm 1/\sqrt{3})$ — angehören.

Den Parameterwerten der Figur liegen die Ausgangsgrößen $\mu_j = 0$ und $\delta = 15^\circ$ zugrunde ($N = 6$).

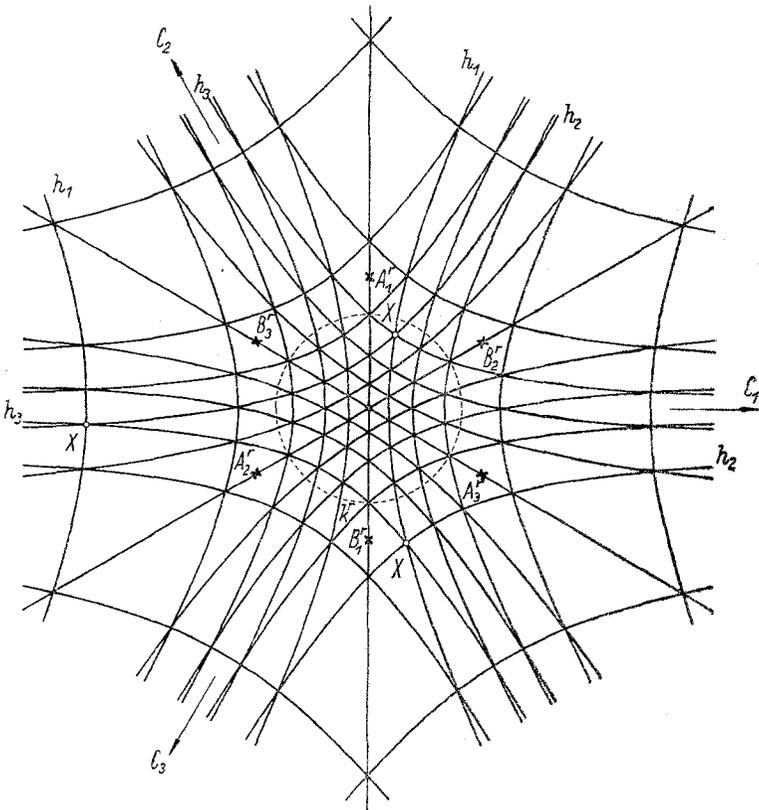


Abb. 1. Dreiecksnetz aus ähnlichen Hyperbeln. Die Ecken A, B der zugrundeliegenden konjugiert-imaginären Grunddreiecke sind durch ihre reellen Vertreter A^r, B^r wiedergegeben. — Je drei verbundene Knotenpunkte X bilden ein Poldreieck bezüglich des nullteiligen Kreises k , dessen reeller Vertreter gestrichelt eingetragen ist.

3.

Das in Abb. 1 dargestellte Dreiecksnetz ist nicht bloß in metrischer, sondern auch in projektiver Hinsicht ausgezeichnet: *Die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ sind perspektiv, die Hauptpunkte C_1, C_2, C_3 liegen also auf einer Geraden.*

Eine Transformation \mathfrak{T} dieses Typs tritt bei der *Spiegelung am elliptischen Paraboloid* auf und stellt unter Voraussetzung achsenparalleler Blickrichtung den Zusammenhang zwischen einem ebenen Feld \mathfrak{S}^* und seinem primären Spiegelbild \mathfrak{S} her. In einer diesbezüglichen Untersuchung³ ergab sich die Feststellung, daß die drei primären Spiegelbilder eines Raumpunktes stets ein *Poldreieck* eines gewissen Kegelschnittes bilden, der als Spiegelbild des absoluten Kugelkreises aufzufassen ist. Entsprechend gilt auch hier

Satz II: *Im Falle perspektiver Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ bilden die drei gemeinsamen Schnittpunkte dreier zusammengehöriger Netzkegelschnitte stets ein Poldreieck jenes festen Kegelschnittes, bezüglich dessen die Grunddreiecke polar liegen.*

Wird nämlich ein beliebiger der Kegelschnitte h_1 herausgegriffen, so bilden auf ihm die von den Kegelschnitten h_2 und h_3 der anderen Büschel (neben C_3 , bzw. C_2) ausgeschnittenen Punkttripel X eine *kubische Involution*. Die von solchen Tripeln aufgespannten Dreiecke sind dann bekanntlich einem bestimmten Kegelschnitt l_1 umgeschrieben und *Poldreiecke* eines weiteren Kegelschnittes k_1 . Betrachtung der drei zerfallenden Kegelschnitte h_2 lehrt, daß die Pole von a_1, b_1 und A_2B_2 bezüglich k_1 der Reihe nach in B_1, A_1 und im zweiten Schnittpunkt $D_2 \neq C_3$ von C_1C_3 und h_1 zu suchen sind. Im Falle perspektiver Grunddreiecke fällt nun D_2 mit C_2 zusammen und es kann weitergeschlossen werden, daß der Geraden $a_2 (= A_1C_2)$ der Pol B_2 zugewiesen ist, analog a_3 der Pol B_3 . Die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ liegen also *polarreziprok* bezüglich des Kegelschnittes k_1 , wodurch dieser umgekehrt vollständig bestimmt ist; er fällt jedenfalls unabhängig von h_1 aus und gilt daher für alle Tripel X im Felde \mathfrak{S} .

Soll andererseits eine gemeinsame Polarität für alle Tripel X bestehen, so muß sie den Punkten A_i die Seiten b_i zuordnen, und die Grunddreiecke müssen als polare Dreiecke notwendig *perspektiv* liegen.

Der Fundamentalkegelschnitt k spielt bei einer solchen besonderen Verwandtschaft \mathfrak{T} offenbar die Rolle der *Doppelkurve* des Systems \mathfrak{S} ,

³ W. Wunderlich, Mh. Math. 52 (1948).

da sich verbundene Punkte X nur auf k vereinigen können. Der Doppelkurve entspricht im Feld \mathfrak{S}^* eine *Grenzkurve 6. Ordnung* mit Doppelpunkten in A_1, A_2, A_3 ; sie wird von den den Geraden g entsprechenden ∞^2 Kubiken g^* — die übrigens den der Achse $C_1C_2C_3$ entsprechenden Hauptpunkt C^* gemein haben — doppelt berührt.⁴

Jedes geradlinige Dreiecksnetz der Ebene \mathfrak{S} , das aus Strahlbüscheln mit Hauptpunkten als Scheiteln gebildet wird — es stehen hierfür die Punkte B_i und C_i zur Verfügung — wird durch die Transformation \mathfrak{X} gleichfalls in ein Dreiecksnetz aus *Kegelschnitten* in \mathfrak{S}^* verwandelt. Auf solche Dreiecksnetze, die die Grenzsextik als Einhüllende besitzen und eine kompliziertere Bauart aufweisen, soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden.

⁴ Im allgemeinen Falle (nichtperspektiver Grunddreiecke) wird die Doppelkurve von einer die Hauptpunkte C_i enthaltenden *Kubik* gebildet, der wieder eine *Grenzkurve 6. Ordnung* mit den Knoten A_i entspricht. Letztere wird von den Geradenbildern g^* dreifach berührt, hingegen fehlt der nur im Sonderfalle vorhandene gemeinsame Hauptpunkt C^* .