Über die Integralgleichung der kinetischen Gastheorie.

Von

E. Hecke in Hamburg.

In seiner Arbeit „Begründung der kinetischen Gastheorie“ hat Herr Hilbert[1]) gezeigt, daß die Grundlage der kinetischen Gastheorie eine lineare Integralgleichung 2. Art mit symmetrischem Kern bildet. Auf diese führte er nämlich die von Maxwell-Boltzmann aufgestellte quadratische Funktionalgleichung zurück. Einer näheren Untersuchung der Hilbertschen Gleichung zu dem Zweck, weitergehende Aussagen über die noch unbekannten Wärmeleitungs- und Reibungsglieder zu machen, stellten sich zunächst erhebliche Schwierigkeiten entgegen, indem nämlich der Kern der Integralgleichung im Unendlichen eine derartig komplizierte Singularität besitzt, daß er *quadratisch nicht mehr integrierbar ist,* also die Anwendbarkeit der klassischen Theorie auf die Hilbertsche Gleichung nicht gesichert ist. Es zeigte sich mir nun, daß zur Entscheidung dieser Frage die Entwicklung des Kernes nach Kugelfunktionen einer Variablen herangezogen werden muß, und daß überhaupt die hierbei auftretenden „Fourierkoeffizienten“ für die Auflösung der Gasgleichung eine besondere Bedeutung haben. Diese Koeffizienten, welche nur noch von zwei Variablen abhängen, setze man nämlich als Kerne von Integralgleichungen in einer Variablen an; Wärmeleitungs- und Reibungsglieder, wie auch alle folgenden Näherungsglieder der Maxwellschen Funktion F bestimmen sich dann als Lösungen je einer solchen linearen (symmetrischen) Integralgleichung in *einer Variablen*, deren rechte Seite eine bekannte, d. h. durch die vorangehenden Näherungen völlig bestimmte Funktion ist. Diese Kerne sind überdies noch so beschaffen, daß jede solche Integralgleichung nur eine andere Schreibweise für eine *gewöhnliche lineare Differentialgleichung* (vierter und höherer Ordnung) ist.

[1]) Math. Ann. 72 (1912), sowie auch Hilbert, Grundzüge der Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1912. Kap. XXII.

Im § 1 beweise ich zunächst, daß die Fredholm-Hilbertsche Theorie der Integralgleichungen auf die vorliegende Gleichung in der Tat noch anwendbar ist: *Der fünffach iterierte Kern ist nämlich quadratisch integrierbar.* Im § 2 gelingt dann auf unerwartet einfachem Wege der Nachweis, daß der *Kern sogar positiv definit* ist und der kleinste Eigenwert gleich 1 ist. Damit ist im Prinzip die Anwendbarkeit des Neumannschen Iterationsverfahrens zur Auflösung der Gleichung erwiesen. Infolge der besonderen Natur der rechten Seiten der Gleichung läßt sich aber noch eine weitere Vereinfachung erzielen; es gelingt nämlich die Reduktion auf Integralgleichungen in *einer* Variablen bzw. *gewöhnliche* lineare *Differentialgleichungen* (§ 3). Endlich setze ich in § 4 eine sehr schöne, von Herrn Enskog herrührende Methode zur Behandlung von linearen Integralgleichungen auseinander.

Die im § 1 erforderlichen komplizierten Rechnungen unterdrücke ich hier; diese sowie auch die Anwendungen auf die feineren Fragen der Gastheorie werde ich ausführlich in einem demnächst bei Teubner erscheinenden Buche zur Darstellung bringen.

Die Kenntnis der Hilbertschen Arbeit wird im folgenden vorausgesetzt.

§ 1.

Die iterierten Kerne.

Im folgenden seien $\xi\,\eta\,\zeta$ (auch mit Indizes 1, 2 versehen) unbeschränkt variable reelle Größen, wir deuten sie als rechtwinkelige Cartesische Koordinaten im R_3. Das Raumelement werde $d\xi\, d\eta\, d\zeta = d\omega$ gesetzt. Wir benutzen auch nach Bedarf Polarkoordinaten $r, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, wobei

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \qquad \mathfrak{x} = \frac{\xi}{r}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{\eta}{r}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{\zeta}{r},$$

und es sei dk das Flächenelement der Einheitskugel an der Stelle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, also

$$d\omega = r^2\, dr\, dk.$$

Endlich bedeute auch l, m, n, wo $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, einen Punkt der Einheitskugel, und das Flächenelement der Kugel an dieser Stelle sei $d\mathfrak{S}$. Das Zeichen Σ ohne weiteren Zusatz soll im folgenden immer die Summation über die drei Koordinatenrichtungen bedeuten, also z. B.

$$r^2 = \sum \xi^2, \qquad l\xi + m\eta + n\zeta = \sum l\xi, \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}\mathfrak{z}_1 = \sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1.$$

In der Theorie spielen die „Stoßtransformationen" eine Rolle, definiert durch die orthogonal-invarianten Formeln

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
\xi' &= \xi + l\,W & \xi_1' &= \xi_1 - l\,W\\
\eta' &= \eta + m\,W & \eta_1' &= \eta_1 - m\,W\\
\zeta' &= \zeta + n\,W & \zeta_1 &= \zeta_1 - n\,W,
\end{aligned}
$$

wobei

$$W = \sum l(\xi_1 - \xi).$$

Es ist eine lineare homogene Transformation der $\xi\,\eta\,\zeta\,\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ auf die gestrichenen Größen, welche mit ihrer Inversen identisch ist und überdies W in $-W$ überführt. Wir verabreden die Bezeichnung

$$\varphi' = \varphi(\xi'\,\eta'\,\zeta'), \qquad \varphi_1' = \varphi(\xi_1', \eta_1', \zeta_1'), \qquad \varphi_1 = \varphi(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$$

für eine beliebige Funktion $\varphi(\xi\,\eta\,\zeta)$.

Der Hilbertsche Integralausdruck für eine Funktion $\varphi(\xi\,\eta\,\zeta)$ lautet nun

$$J(\varphi) = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}(\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1')\,d\omega_1\,d\mathfrak{s}.$$

Die Integrationen sind, wie auch weiterhin, stets über den gesamten Raum $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ und die ganze Oberfläche der Einheitskugel l, m, n zu erstrecken. Herr Hilbert zeigt, daß man setzen kann[2])

$$J(\varphi) = k(r)\,\varphi - \int K\left(r, r_1, \sum \mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1\right)\varphi_1\,d\omega_1,$$

worin

$$k = k(r) = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}\,d\omega_1\,d\mathfrak{s} = 4\pi^2 e^{-r^2}\left(\frac{e^{-r^2}}{2} + \left(r + \frac{1}{2r}\right)\int_0^r e^{-u^2}\,du\right)$$

und

$$K = 2A - B$$

mit

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{\Sigma(\xi_1 - \xi)^2}}\, e^{-r^2 - \frac{(\Sigma\,\xi_1(\xi_1 - \xi))^2}{\Sigma(\xi_1 - \xi)^2}},$$

$$B = 2\pi\sqrt{\Sigma(\xi_1 - \xi)^2}\; e^{-r^2 - r_1^2}.$$

Es kommt weiterhin nicht auf diese Gestalt von A und B an, sondern auf ihre ursprüngliche Definition, wonach für jede Funktion $\varphi(\xi\,\eta\,\zeta)$

$$(2)\qquad \int A\,\varphi_1\,d\omega_1 = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}\varphi'\,d\omega_1\,d\mathfrak{s} = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}\varphi_1'\,d\omega_1\,d\mathfrak{s},$$

$$(3)\qquad \int B\,\varphi_1\,d\omega_1 = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}\varphi_1\,d\omega_1\,d\mathfrak{s}.$$

K ist symmetrisch in den beiden Variablenreihen $\xi\,\eta\,\zeta$ und $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ und überdies eine Orthogonalinvariante. Gegenstand der Untersuchnng ist die Integralgleichung

$$J(\varphi) \equiv k\,\varphi - \int K\,\varphi_1\,d\omega_1 = f(\xi\,\eta\,\zeta),$$

---

[2]) In der Hilbertschen Arbeit lautet die Bezeichnung $-K$ statt K.

worin f gegeben und φ gesucht. Durch die Substitution

$$\Phi = \varphi\sqrt{k}, \qquad K^* = \frac{K}{\sqrt{k \cdot k_1}}$$

gelangt man zu einer Integralgleichung 2. Art mit symmetrischem Kern

$$\Phi - \int K^* \Phi_1 \, d\omega_1 = \frac{f}{\sqrt{k}}$$

für die Funktion Φ. Da die Funktion k im Unendlichen wie $r e^{-r^2}$ verschwindet, so schließt man durch eine kleine Rechnung, daß zwar K^{*2} nach $d\omega_1$ integrierbar ist, aber ***nicht*** noch ein zweites Mal nach $d\omega$.

Die Frage, welcher von den *iterierten Kernen* quadratisch nach $d\omega\, d\omega_1$ integrierbar ist, beantworten wir durch Entwicklung von $K^* = K^*(r, r_1, \Sigma \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1)$ nach Kugelfunktionen der Variablen $x = \Sigma \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$. Es sei $P_n(x)$ die Kugelfunktion eines Argumentes mit dem Index n, definiert etwa durch die Gleichung

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2}\right)^n d\varphi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sie erfüllt die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}.$$

Wir definieren die „Fourierkoeffizienten"

$$k_n^*(r, r_1) = \int_{-1}^{+1} K^*(r, r_1, x)\, P_n(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int K^*\left(r, r_1, \sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\right) P_n\left(\sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\right) dk_1.$$

Die Rechnung ergibt folgendes:

Satz 1. *Es ist $k_n^*(r, r_1)$ symmetrisch in r, r_1 und es gilt*

$$k_n^*(r, r_1) = \frac{e^{-r^2 - r_1^2}}{\sqrt{k(r)\, k(r_1)}} \left\{ \frac{8\pi}{2n+1} \frac{M^{2n+1}}{(r r_1)^{n+1}} + \frac{4\pi M^{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)(r r_1)^{n-1}} - \frac{4\pi M^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(r r_1)^{n+1}} + \frac{8\pi}{r r_1}\int_{|x|<M} x\, e^{x^2} E(x)\, P_n\left(\frac{x}{r}\right) P_n\left(\frac{x}{r_1}\right) dx \right\}.$$

Darin bedeutet

M die kleinere der beiden Zahlen r, r_1,

$$E(x) = \int_0^x e^{-u^2}\, du.$$

Satz 2. *Es ist k_n^* quadratisch nach $d\omega\, d\omega_1$ integrierbar, d. h. es existiert*

$$c_n = \int\!\!\int k_n^{*2}(r, r_1)\, d\omega\, d\omega_1 = (4\pi)^2 \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty k_n^{*2}(r, r_1)\, r^2 r_1^2\, dr\, dr_1.$$

Beim Beweise dieses Satzes ist wesentlich, daß der Nenner $k(r)$ von k_n^* sich im Unendlichen wie $r e^{-r^2}$, nicht wie e^{-r^2}, der Null nähert.

Die Frage nach dem Verhalten der iterierten Kerne wird beantwortet durch

Satz 3. *Der p-fach iterierte Kern zu K^* ist jedenfalls dann quadratisch nach $d\omega\, d\omega_1$ integrierbar, wenn die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, c_n^p$$

konvergiert.

Zum Beweise bedenken wir zunächst, daß für jede Funktion $H(r, r_1, x)$, welche für $-1 \leqq x \leqq +1$ in x stetig ist, die Vollständigkeitsrelation gilt

$$\int_{-1}^{+1} H^2(r, r_1, x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Big(\int_{-1}^{+1} H(r, r_1, x) P_n(x)\, dx \Big)^2$$

und diese Gleichung darf, wenn die Integrale stetig in r, r_1 sind, auch noch gliedweise nach r, r_1 integriert werden. Daher konvergiert das Integral

$$\iint H^2\Big(r, r_1, \sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\Big)\, d\omega\, d\omega_1$$

sicher dann, wenn die unendliche Reihe

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_{r=0}^{\infty} \int_{r_1=0}^{\infty} r^2 r_1^2 \Big\{ \int_{-1}^{+1} H(r, r_1, x) P_n(x)\, dx \Big\}^2 dr\, dr_1$$

konvergiert. Wir setzen nun für H den p-fach iterierten Kern zu K^* ein ($p \geqq 2$), welcher definiert ist durch die Formel

$$K_p^*\Big(r, r_1, \sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\Big) = \int K_{p-1}^*\Big(r, r_2, \sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_2\Big)\, K^*\Big(r_2, r_1, \sum \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\Big)\, d\omega_2 .$$

Für dessen Fourierkoeffizienten

$$k_n^{*(p)}(r, r_1) = \int_{-1}^{+1} K_p^*(r, r_1, x) P_n(x)\, dx$$

gilt dann auf Grund bekannter Integraleigenschaften der $P_n(x)$ eine ähnliche Rekursionsformel

$$k_n^{*(p)}(r, r_1) = \frac{1}{2} \int k_n^{*(p-1)}(r, r_2)\, k_n^*(r_1, r_2)\, d\omega_2$$

und daher vermöge der Schwarzschen Ungleichung

$$k_n^{*(p)}(r, r_1)^2 \leqq \frac{1}{4} \int k_n^{*(p-1)}(r, r_2)^2\, d\omega_2 \cdot \int k_n^*(r_1, r_2)^2\, d\omega_2$$

und durch vollständige Induktion bezüglich p

$$\iint k_n^{*(p)}(r, r_1)^2\, d\omega\, d\omega_1 \leqq \frac{c_n^p}{4^{p-1}} .$$

Nehmen wir in (4) für H den p-fach iterierten Kern zu K^*, so konvergiert jene Reihe also sicher dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)c_n^p$ konvergiert. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Die *Abschätzung von* c_n als Funktion von n ergibt nun die Aussage: $|\sqrt{n}\, c_n|$ ist beschränkt; daraus folgt die Konvergenz jener Reihe für $p \geqq 5$ und somit

Satz 4. *Der fünffach iterierte Kern zu* K^* *ist quadratisch nach* $d\omega\, d\omega_1$ *integrierbar.*

§ 2.

Die Eigenwerte der Integralgleichung.

Wir fragen nach denjenigen Werten λ, wofür die homogene Gleichung

$$k\varphi - \lambda \int K \varphi_1\, d\omega_1 = 0 \tag{5}$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung φ besitzt. Es ist bereits bekannt, daß für $\lambda = 1$ die Gleichung genau fünf linear unabhängige Lösungen hat, nämlich $\varphi = 1, \xi, \eta, \zeta, \Sigma\xi^2$. Und zwar folgt das aus der Identität in φ

$$\int \varphi J(\varphi)\, d\omega = \frac{1}{4}\int\!\!\int\!\!\int |W|\, e^{-r^2-r_1^2}(\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1')^2\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s},$$

also

$$\int \varphi J(\varphi)\, d\omega \geqq 0. \tag{6}$$

Diese Ungleichung hat weiterhin zur Folge

Satz 5. *Das Intervall* $0 < \lambda < 1$ *ist von Eigenwerten frei.*

Die Gleichung (5) läßt sich nämlich auch schreiben

$$\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) k\varphi + J(\varphi) = 0.$$

Nach Multiplikation mit $\varphi\; d\omega$ und Integration nach $d\omega$ ergibt sich wegen (6) hieraus

$$\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\int k\varphi^2\, d\omega \leqq 0,$$

d. h.

$$\frac{1}{\lambda} - 1 \leqq 0,$$

also entweder $\lambda \geqq 1$ oder $\lambda < 0$.

Ferner gilt aber der wesentlich tiefer liegende

Satz 6. *Alle Eigenwerte von* K^* *sind positiv.*

Nach den Ergebnissen von § 1 hat nämlich jeder Eigenwert nur endliche Vielfachheit. Es sei nun $\Phi_i = \sqrt{k}\, \varphi_i(\xi\eta\zeta)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

ein vollständiges System orthogonaler und normierter Eigenfunktionen von K^*, welche zum Eigenwert λ gehören. Bedeute S das Zeichen für eine orthogonale Transformation der $\xi\eta\zeta$, so sind die Funktionen $\Phi_i(S(\xi\eta\zeta))$ offenbar ebenfalls Eigenfunktionen von K^*, zum Eigenwert λ gehörig, da ja der Kern K^* eine Orthogonalinvariante ist. Überdies sind die n Funktionen $\Phi_i(S(\xi\eta\zeta))$ wiederum orthogonal und normiert. Folglich sind die $\Phi_i(S(\xi\eta\zeta))$ lineare Kombinationen der $\Phi_i(\xi\eta\zeta)$

$$\Phi_i(S(\xi\eta\zeta)) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\,\Phi_i(\xi\eta\zeta),$$

worin das Koeffizientenschema c_{ik} selbst wieder eine orthogonale Matrix bildet, und folglich ist der Ausdruck

$$h(\xi\eta\xi, \xi_1\eta_1\zeta_1) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi\eta\zeta)\,\varphi_i(\xi_1\eta_1\zeta_1) = \frac{1}{\sqrt{k(r)\,k(r_1)}}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(\xi\eta\zeta)\,\Phi_i(\xi_1\eta_1\zeta_1)$$

eine Orthogonalinvariante der beiden Variablenreihen $\xi\eta\zeta$ und $\xi_1\eta_1\zeta_1$.

Aus der Gleichung

$$k\,\varphi_i(\xi\eta\zeta) - \lambda\int K\,\varphi_i(\xi_1\eta_1\zeta_1)\,d\omega_1 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

folgt nun durch Multiplikation mit $\varphi_i(\xi\eta\zeta)\,d\omega$, Integration nach $d\omega$ und Summation über i

$$\sum_{i=1}^{n}\int k\,\varphi_i^2(\xi\eta\zeta)\,d\omega = \lambda\iint K\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi\eta\xi)\,\varphi_i(\xi_1\eta_1\zeta_1)\Bigr)\,d\omega\,d\omega_1.$$

Zum Beweise von Satz 6 braucht man daher nur zu zeigen:

$$Z \equiv \iint K\,h(\xi\eta\zeta, \xi_1\eta_1\zeta_1)\,d\omega\,d\omega_1 \geqq 0.$$

Nach der Definition von K ist nun bei festem $\xi\eta\zeta$ für jede Funktion $g(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ (vgl. Gl. (2))

$$\begin{aligned}\int K\,g_1\,d\omega_1 &= \int(2A - B)\,g_1\,d\omega_1\\ &= \iint|W|\,e^{-r^2-r_1^2}\bigl(2\,g(\xi_1', \eta_1', \zeta_1') - g(\xi_1\eta_1\zeta_1)\bigr)\,d\omega_1\,d\mathfrak{Z}.\end{aligned}$$

Für den folgenden Schluß ist dabei wesentlich, daß die Integralbestandteile mit g' und g_1' einander gleich sind. Wir setzen in dieser Gleichung an Stelle von $g(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ unsere Größe $h(\xi\eta\zeta, \xi_1\eta_1\zeta_1)$ und integrieren sodann nach $d\omega$. Damit wird

$$\begin{aligned}&\iint K\,h(\xi\eta\zeta, \xi_1\eta_1\zeta_1)\,d\omega\,d\omega_1\\ &= \iiint|W|\,e^{-r^2-r_1^2}\bigl\{2\,h(\xi\eta\zeta, \xi_1'\eta_1'\zeta_1') - h(\xi\eta\zeta, \xi_1\eta_1\zeta_1)\bigr\}\,d\omega\,d\omega_1\,d\mathfrak{Z}.\end{aligned}$$

In diesem Integral denken wir uns nun zuerst die Integrationen nach $d\omega\,d\omega_1$ ausgeführt. Das Resultat ist nur Funktion des Punktes $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ auf der Einheitskugel; da der Integrand aber, wie oben gezeigt, eine Orthogonalinvariante ist, so ist diese Funktion eine Funktion nur von $l^2+m^2+n^2=1$, d. h. von l, m, n ganz unabhängig. Ohne den Integralwert zu ändern, kann man daher in dem Integranden für l, m, n ein spezielles Wertsystem, etwa

$$l=1, \qquad m=n=0$$

setzen. Hierfür sind nach (1)

$$W=\xi_1-\xi, \qquad \xi_1'=\xi, \qquad \eta_1'=\eta_1, \qquad \zeta_1'=\zeta_1$$

also unser Integral Z, wenn wir noch für h seinen Wert eintragen,

$$4\pi\iint|\xi-\xi_1|\,e^{-r^2-r_1^2}\sum_{i=1}^{n}\Big(2\,\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,\varphi_i(\xi\,\eta_1\,\zeta_1)-\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,\varphi_i(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\Big)\,d\omega\,d\omega_1.$$

Hierin führen wir zur Abkürzung ein

$$\psi_i(\xi)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2-\zeta^2}\,\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,d\eta\,d\zeta$$

und erhalten

$$Z=4\pi\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}|\xi-\xi_1|\,e^{-\xi^2-\xi_1^2}\sum_{i=1}^{n}\{2\,\psi_i^2(\xi)-\psi_i(\xi)\,\psi_i(\xi_1)\}\,d\xi\,d\xi_1.$$

Dies ist in der Tat $\geqq 0$; denn man vertausche im ersten Bestandteil mit ψ_i^2 das ξ und ξ_1; dann erhält man

$$Z=4\pi\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}|\xi-\xi_1|\,e^{-\xi^2-\xi_1^2}\sum_{i=1}^{n}\{\psi_i^2(\xi)+\psi_i^2(\xi_1)-\psi_i(\xi)\,\psi_i(\xi_1)\}\,d\xi\,d\xi_1$$

und hierin ist die Klammer gleich

$$\frac{\psi_i^2(\xi)+\psi_i^2(\xi_1)}{2}+\frac{1}{2}(\psi_i(\xi)-\psi_i(\xi_1))^2\geqq 0, \qquad Z\geqq 0, \text{ q. e. d.}$$

§ 3.

Reduktion auf Integralgleichungen in einer Variablen und gewöhnliche Differentialgleichungen.

Nach Satz 5 und 6 kann man zur Lösung der inhomogenen Integralgleichung

$$\Phi-\int K^*\,\Phi_1\,d\omega_1=\frac{f}{\sqrt{k}}$$

die bekannte Iterationsmethode verwenden, welche Φ in Form einer unendlichen Reihe liefert. Macht man nun aber von der Tatsache Gebrauch, daß die zur Bestimmung der Wärmeleitungs- und Reibungsglieder dienende

Funktion f eine besonders einfache Gestalt hat, so gelangt man zu einer erheblichen Vereinfachung und zwar auf Grund folgenden allgemeinen Satzes[3]):

Satz 7. *Sei $Y_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ eine Kugelfunktion n-ter Ordnung des Punktes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ auf der Einheitskugel. Wenn dann die Gleichung*

$$(7) \qquad k\varphi - \int K\left(r, r_1, \sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\right) \varphi_1 \, d\omega_1 = Y_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) f(r)$$

überhaupt eine Lösung φ hat, so hat sie gewiß auch eine Lösung von der Form

$$\varphi = Y_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \psi(r),$$

worin $\psi(r)$ der Gleichung

$$(8) \qquad k \cdot \psi(r) - \int_0^\infty 2\pi k_n(r, r_1) \, \psi(r_1) \, r_1^2 \, dr_1 = f(r)$$

genügt, und

$$k_n(r, r_1) = \int_{-1}^{+1} K(r, r_1, x) P_n(x) \, dx$$

eine symmetrische Funktion von r, r_1 ist.

Zunächst gilt nämlich für jede stetige Funktion $G(x)$ die Integralformel

$$\int G\left(\sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\right) Y_n(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1) \, dk_1 = 2\pi Y_n(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}) \int_{-1}^{+1} G(x) P_n(x) \, dx.$$

Denn wenn $G(x)$ eine Kugelfunktion $P_m(x)$ ist, drückt die Formel eine bekannte Beziehung zwischen Y_n, P_m aus. Als lineare homogene Relation für G gilt sie daher allgemein für jede stetige Funktion. Hieraus ergibt sich: Wenn $\psi(r)$ der Gl. (8) genügt, so genügt $\varphi = Y_n \psi(r)$ jedenfalls der Gl. (7). Die homogene Gl. (8) hat daher nur solche Lösungen ψ, wofür $Y_n \psi$ die homogene Gl. (7) erfüllt, wofür also $Y_n \psi$ gleich einer Kombination der fünf Lösungen $1, r\mathfrak{x}, r\mathfrak{y}, r\mathfrak{z}, r^2$ ist. Daraus folgt: Die homogene Gl. (8) hat nur die Lösungen

$$\begin{array}{ll} \psi = 1, r^2 & \text{für } n = 0, \\ \psi = r & \text{für } n = 1, \\ \text{keine Lösung} & \text{für } n \geqq 2. \end{array}$$

Auf (8) ist aber nach § 1 die **Fredholm-Hilbert**sche Theorie anwendbar, und folglich ist notwendig und hinreichend, damit die inhomogene Gl. (8) eine Lösung besitzt, das Erfülltsein der Orthogonalitätsbedingungen

[3]) Vgl. hierzu meine Note: Über orthogonalinvariante Integralgleichungen, Math. Ann. 78, S. 398.

$$\int_0^\infty f(r)\, r^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r^2 \end{Bmatrix} dr = 0, \qquad \text{wenn } n = 0.$$

$$\int_0^\infty f(r)\, r^3\, dr = 0, \qquad \text{wenn } n = 1.$$

Das sind aber genau die Lösbarkeitsbedingungen von (7), denn Kugelfunktionen verschiedener Ordnung sind immer orthogonal zu einander. Somit erhält man in der Tat die allgemeinste Lösung von (7), indem man aus einer Lösung der Integralgleichung *einer Variablen* (8) $\psi(r)$ die Funktion $Y_n \psi(r)$ bildet und eine Lösung der homogenen Gleichung hinzufügt.

Zur Bestimmung der sog. Wärmeleitungsglieder der Maxwellschen Funktion F erhält man nun eine Gleichung wie (8) mit $n = 1$, ebenso für die Reibungsglieder eine solche mit $n = 2$. Daraus folgt:

Satz 8. *In der Hilbertschen Theorie besteht das Problem, die Maxwellsche Funktion F in zweiter Näherung zu bestimmen, darin, zwei Funktionen einer Variablen aus je einer linearen Integralgleichung 2. Art zu berechnen*[4]).

Verfolgt man auch die höheren Näherungen in der Hilbertschen Theorie, so findet man auch da einen ähnlichen Satz: Bei jedem Schritt handelt es sich immer um die Bestimmung von endlich vielen Funktionen *einer* Variablen aus einer Integralgleichung.

Es ist nun bemerkenswert und für einen Konvergenzbeweis des Hilbertschen Verfahrens vielleicht wichtig, daß die eben gefundenen Integralgleichungen mit den Kernen k_n aus gewöhnlichen Differentialgleichungen entspringen. Man überzeugt sich davon leicht auf folgende Weise: Nach Satz 1 ist $k_n(r, r_1)$ symmetrisch und ist für $r_1 \leqq r$ als endliche Summe von Produkten darstellbar,

$$2\pi k_n(r, r_1) = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu(r) \beta_\nu(r_1),$$

wo α_ν, β_ν nur von je einer der Variablen r, r_1 abhängen. Somit hat die Integralgleichung (8) die Gestalt

$$k(r)\psi(r) - \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu(r) \int_0^r \beta_\nu(r_1) \psi(r_1) r_1^2\, dr_1$$
$$- \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu(r) \int_r^\infty \alpha_\nu(r_1) \psi(r_1) r^2\, dr_1 = f(r).$$

---

[4]) Auf anderem Wege ist dieser Satz zuerst bewiesen worden von D. Enskog, Kinetische Theorie d. Vorgänge in mäßig verdünnten Gasen, Dissertation, Upsala 1917.

Differentiiert man diese Gleichung nun genügend oft nach r, so erhält man durch Kombination der so entstehenden Gleichungen eine lineare Differentialgleichung für $\psi(r)$. Für die Wärmeleitungsfunktion $(n=1)$ erhält man so eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung, die man noch auf eine solche der 3. Ordnung reduzieren kann, da man ein Integral der homogenen Gleichung kennt. Auch für $n=2$ (Reibungsglieder) erhält man eine Gleichung 4. Ordnung. Die Ordnung wächst übrigens mit n ins Unendliche.

§ 4.

Eine neue Methode zur Auflösung von Integralgleichungen.

Zur numerischen Auflösung der Hilbertschen Integralgleichung hat Herr D. Enskog[4]) eine andere, auf einem sehr einfachen und schönen mathematischen Gedanken beruhende Methode angegeben. Da diese Arbeit in mathematischen Kreisen wenig bekannt zu sein scheint, auch die Darstellung des Herrn Enskog die Allgemeinheit seiner Methode nicht deutlich erkennen läßt, so bringe ich hier ihren mathemathischen Inhalt einmal losgelöst von dem physikalischen Problem zur Darstellung.

Es sei ein Integralausdruck

$$J(\varphi)\equiv k(s)\varphi(s)-\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

vorgelegt. Hierin seien $k(s)$ und $K(s,t)$ bestimmte stetige Funktionen der reellen Variablen s und t im Gebiet $a\leqq {s \atop t}\leqq b$, überdies $K(s,t)$ symmetrisch in s,t. Es handelt sich nun um die Auflösung der Gleichung

$$J(\varphi)=f(s)$$

bei gegebenem stetigen $f(s)$.

Wir machen die *Voraussetzung*:

Der quadratische Integralausdruck $\int_a^b \varphi J(\varphi)\,ds$ sei positiv definit, d. h. für jedes nicht identisch verschwindende stetige $\varphi(s)$ sei

$$\int_a^b k(s)\varphi^2(s)\,ds-\int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt>0\,.$$

Nun sei $u_n(s)$ $(n=1,2\ldots)$ ein solches System linearer unabhängiger Funktionen, daß man jede im Intervall $a\ldots b$ stetige Funktion durch eine lineare Kombination endlich vieler $u_n(s)$ mit beliebiger Genauigkeit gleichmäßig approximieren kann. Statt nun auf das System $u_n(s)$ das gewöhnliche Orthogonalisierungsverfahren anzuwenden, setzen wir vielmehr eine *andere, mit Bezug auf* $J(\varphi)$ *definierte Normierung fest*: Es bedeute nämlich

$$v_n(s)=A_{n1}u_1(s)+A_{n2}u_2(s)+\ldots+A_{nn}u_n(s)$$

eine solche Kombination der $u_1, \ldots, u_n$ mit konstanten A, daß

$$\int_a^b v_n J(v_m)\, ds = \delta_{nm}, \quad 1 \leqq m \leqq n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Wegen der Annahme

$$\int_a^b \varphi J(\varphi)\, ds > 0$$

ist die sukzessive Bestimmung der v_n offenbar eindeutig möglich. Mit diesem so normierten Funktionensystem kann man jetzt zu jeder stetigen Funktion $g(s)$ ein System verallgemeinerter „Fourierkoeffizienten"

$$c_k = \int_a^b g(s) J(v_k)\, ds = \int_a^b v_k(s) J(g)\, ds$$

bilden, derart, daß wegen der „Vollständigkeit" des Systems der u auch für die v die „Vollständigkeitsrelation"

$$\int_a^b g(s) J(g)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

besteht, und folglich auch für zwei stetige Funktionen $g(s)$ und $h(s)$ immer die Gleichung

$$\int_a^b g(s) J(h)\, ds = \int_a^b h(s) J(g)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$$

gilt, worin die c_k und a_k jene Fourierkoeffizienten von g und h sind.

Durch die Koeffizienten c_k ist die stetige Funktion $g(s)$ wieder eindeutig bestimmt, und es ist

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(s),$$

falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert.

Aus der Gleichung $J(\varphi) = f(s)$ lassen sich nun die Fourierkoeffizienten der gesuchten Funktion φ sofort ermitteln; sie sind nämlich

$$a_k = \int_a^b \varphi(s) J(v_k)\, ds = \int_a^b v_k(s) J(\varphi)\, ds = \int_a^b v_k(s) f(s)\, ds,$$

und die Lösung ist

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(s),$$

falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert. *In jedem Falle* aber gilt

$$\int_a^b \varphi J(\varphi)\,ds = \int_a^b \varphi(s) f(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f(s)\,v_k(s)\,ds\right)^2.$$

Grade die hierzu analogen Integrale sind es aber, welche aus der Hilbertschen Integralgleichung den *Wärmeleitungs-* und *Reibungs-Koeffizienten* definieren. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, daß man über die Schnelligkeit der Konvergenz dieser Reihe von vornherein nichts aussagen kann. Deshalb scheinen mir auch die numerischen Resultate von Herrn Enskog vorläufig nur heuristischen Wert zu haben.

Hamburg, Mathem. Seminar, August 1921.

(Eingegangen am 22. August 1921.)