Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron.

Von

A. Khintchine in Moskau.

Die (wegen äußerer Umstände sehr verspätete) Lektüre der schönen Arbeit von Herrn O. Perron „Über diophantische Approximationen"[1]) veranlaßt mich, die beiden nachstehenden, den Gegenstand der genannten Abhandlung sehr nahe berührenden Bemerkungen zu veröffentlichen.

1.

Die lineare Form mit reellen Koeffizienten $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta_k x_k + x_{n+1} \tag{1}$$

heiße *extrem*, wenn ein $C = C(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n) > 0$ existiert derart, daß, wie auch die ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ gewählt sein mögen,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k a_k + a_{n+1}\right| > \frac{C}{r^n}$$

gilt, wo $r = \operatorname{Max}(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$ gesetzt ist.

Andererseits soll ein System von n reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ als *extrem* bezeichnet werden, wenn es ein $B = B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) > 0$ gibt derart, daß, wie auch die ganzen Zahlen $q > 0$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gewählt sein mögen, wenigstens eine von den n Ungleichungen

$$\left|\alpha_k - \frac{p_k}{q}\right| > \frac{B}{q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt ist.

Im § 1 der zitierten Abhandlung von Herrn Perron[2]) ist implizite der Beweis für den folgenden Satz enthalten:

---

[1]) Math. Annalen 83 (1921), S. 77—84.

[2]) Vgl. S. 79.

Ist die Form (1) *extrem, so bilden ihre Koeffizienten* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ *ein extremes Zahlensystem.*

Nun scheint mir bemerkenswert, daß auch die Umkehrung hiervon gilt, nämlich:

Wenn die Koeffizienten $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ *der Form* (1) *ein extremes Zahlensystem bilden, so ist die Form* (1) *extrem.*

Es ist demnach die Extremeigenschaft des Koeffizientensystems für diejenige der Form charakteristisch. Infolge bekannter Sätze über Diophantische Approximationen bedeutet das in leicht verständlicher Ausdrucksweise folgendes: Damit die Form (1) von der „schlechtestmöglichen Ordnung" unendlich klein wird, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Koeffizienten ein Zahlensystem bilden, welches eine „schlechtestmögliche" gemeinsame Approximation mittels rationaler Brüche gestattet. In der Tat kann man ja bekanntlich die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k a_k + a_{n+1}\right| < \frac{1}{r^n}$$

für *jede* Form, sowie die Ungleichungen

$$\left|\alpha_k - \frac{p_k}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für *jedes* Zahlensystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ auf unendlich viele Weisen mit ganzen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ resp. q, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ erfüllen.

Beweis. Die Form sei nicht extrem, $\eta < 1$ positiv und beliebig klein. Dann ist nur zu beweisen, daß ganze Zahlen $q > 0$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ so gewählt werden können, daß

$$\left|\Theta_k - \frac{p_k}{q}\right| < \frac{\eta}{q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt.

Zu dem Ende setze man $C = C(n) = 2(n+2)(\sqrt{n})^n$ und

$$\varepsilon = \frac{\eta^{n^2}}{2^{2n+1}\, C^{n+1}}, \tag{2}$$

was jedenfalls

$$\varepsilon < \frac{1}{2^{n+1}\, C} \tag{3}$$

zur Folge hat.

Nach unserer Voraussetzung ist es dann möglich, ganze, nicht sämtlich verschwindende Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ derart zu wählen, daß

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k a_k + a_{n+1}\right| < \frac{\varepsilon}{r^n} \tag{4}$$

wird, wobei wieder $r = \operatorname{Max}(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$ und folglich $r \geqq 1$ ist.

Aus (3) folgt a fortiori

$$\frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}}(2C)^{\frac{1}{n}}}{r} < \frac{1}{2}, \tag{5}$$

während (2) in Hinsicht auf (5)

$$(2C)^{\frac{n+1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{n}} < \eta^n \left(1 - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}}(2C)^{\frac{1}{n}}}{r}\right),$$

also

$$\frac{2C}{\eta^n} < \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{r}$$

ergibt.

Folglich existiert eine ganze Zahl $t > 0$, die wir fortan fixiert denken und die den Ungleichungen

$$\frac{2C}{\eta^n} < \frac{t}{r} < \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{n}}} \tag{6}$$

genügt.

Nun folgt aus der zweiten dieser Ungleichungen, daß

$$1 - C\varepsilon\left(\frac{t}{r}\right)^n > \frac{1}{2},$$

was mit der ersten der Ungleichungen (6)

$$\frac{t}{r}\left(1 - C\varepsilon\left(\frac{t}{r}\right)^n\right) = \frac{t}{r} - C\varepsilon\left(\frac{t}{r}\right)^{n+1} > \frac{2C}{\eta^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{C}{\eta^n}$$

zur Folge hat.

Daraus folgt weiter

$$Cr < t\eta^n - \frac{C\varepsilon t^{n+1}\eta^n}{r^n},$$

dann a fortiori

$$Cr < t\eta^n - \frac{C\varepsilon t^{n+1}\eta^n}{r^n} + \frac{C\varepsilon t}{r^n},$$

woraus man leicht

$$\frac{Crt^{n-1} - 1}{1 - \frac{C\varepsilon t^n}{r^n}} < (t\eta)^n - 1$$

erschließt.

Folglich existiert eine ganze Zahl $M > 0$, die nunmehr fixiert gedacht werden soll und die den Ungleichungen

$$(7) \qquad \frac{C r t^{n-1} - 1}{1 - \frac{C \varepsilon t^n}{r^n}} < M < (t\eta)^n$$

Genüge leistet.

Die erste dieser Ungleichungen ergibt

$$(8) \qquad M + 1 > C\left(r t^{n-1} + \frac{M \varepsilon t^n}{r^n}\right).$$

Nun soll q die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, M$ durchlaufen. Zu jedem Werte von q wähle man dann die ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$, so daß

$$0 \leqq \alpha_k^{(q)} = q\,\Theta_k - p_k < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt. Wenn dann $\alpha_1^{(q)}, \alpha_2^{(q)}, \ldots, \alpha_n^{(q)}$ als Koordinaten eines Punktes $\alpha^{(q)}$ im n-dimensionalen Raume aufgefaßt werden, liegen alle $M+1$ Punkte $\alpha^{(q)}$ $(q = 0, 1, 2, \ldots, M)$ im Einheitswürfel. Nun teile man diesen Würfel in t^n gleiche Würfel von der Kantenlänge $\frac{1}{t}$ und dem Volumen $\frac{1}{t^n}$. Wenn man übliche Bedingungen über die Begrenzung dieser Würfel voraussetzt, muß jeder der Punkte $\alpha^{(q)}$ einem und nur einem dieser Teilwürfel angehören. Aber nicht alle Teilwürfel können wirklich Punkte $\alpha^{(q)}$ enthalten, und das ist natürlich der Kern des Beweises. Aus (4) folgt nämlich

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k^{(q)} = q \sum_{k=1}^{n} a_k\,\Theta_k - \sum_{k=1}^{n} a_k p_k = q\frac{\vartheta\varepsilon}{r^n} - q\,a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k p_k = q\frac{\vartheta\varepsilon}{r^n} - c,$$

wo c ganz und $|\vartheta| < 1$ ist, also

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k^{(q)} + c\right| < \frac{M\varepsilon}{r^n}.$$

Es ist nun, wenn $N = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}$ gesetzt wird,

$$\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \alpha_k^{(q)} + c\right|}{N} < \frac{M\varepsilon}{N r^n} \leqq \frac{M\varepsilon}{r^{n+1}}$$

die „Entfernung" des Punktes $\alpha^{(q)}$ von der „Ebene"

$$(9) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + c = 0.$$

Für jeden Punkt $\alpha^{(q)}$ gibt es somit eine „Ebene" (9), von welcher dieser Punkt um weniger als $\frac{M\varepsilon}{r^{n+1}}$ entfernt ist. Wenn man also um jede solche „Ebene“ eine „Schicht“ der Dicke $\frac{2M\varepsilon}{r^{n+1}}$ begrenzt denkt, so muß jeder Teilwürfel, der ein $\alpha^{(q)}$ enthalten soll, mit einer dieser „Schichten“ gemeinsame Punkte haben. Nun ist $\frac{\sqrt{n}}{t}$ die größte „Entfernung“ zweier Punkte eines Teilwürfels. Wenn wir folglich die Dicke einer jeden der eben definierten „Schichten“ beiderseits um $\frac{\sqrt{n}}{t}$ erweitern, so muß jeder Teilwürfel, der ein $\alpha^{(q)}$ enthalten soll, einer von diesen neuen „Schichten“ von der Dicke $\frac{2M\varepsilon}{r^{n+1}}+\frac{2\sqrt{n}}{t}$ vollständig angehören. Im folgenden soll V die Summe der Volumina aller dieser „Schichten“ bedeuten, soweit sie dem Einheitswürfel angehören.

Was erstens die Anzahl der „Schichten“ betrifft, so kann sie folgendermaßen abgeschätzt werden. Zwei benachbarte von den „Ebenen“ (9) haben den Abstand $\frac{1}{N}$. Da die größte „Entfernung“ zweier Punkte des Einheitswürfels $\sqrt{n}$ beträgt, können den Einheitswürfel nicht mehr als $\frac{\sqrt{n}}{1/N} \leqq n r$ von diesen „Ebenen“ durchstreifen, also nicht mehr als $n r + 2$ „Schichten“ mit diesem Würfel gemeinsame Punkte haben.

Ferner ist die Dicke einer jeden „Schicht“ gleich $\frac{2M\varepsilon}{r^{n+1}}+\frac{2\sqrt{n}}{t}$, während das Inhaltsmaß eines jeden zur Dicke senkrechten „Schnittes“ offenbar $(\sqrt{n})^{n-1}$ nicht übertreffen kann.

Alles in allem ist

$$V < (n r + 2)(\sqrt{n})^{n-1}\left\{\frac{2M\varepsilon}{r^{n+1}}+\frac{2\sqrt{n}}{t}\right\}$$

$$\leqq 2r(n+2)(\sqrt{n})^{n}\left\{\frac{M\varepsilon}{r^{n+1}}+\frac{1}{t}\right\} = C\left\{\frac{M\varepsilon}{r^{n}}+\frac{r}{t}\right\}.$$

Nun bezeichne K die Anzahl der Teilwürfel, welche Punkte $\alpha^{(q)}$ enthalten. Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{K}{t^n} \leqq V,$$

also

$$K < C\left\{\frac{M\varepsilon t^n}{r^n}+r t^{n-1}\right\},$$

also wegen (8)

$$K < M+1.$$

Da genau $M+1$ Punkte $\alpha^{(q)}$ vorhanden sind, müssen deswegen irgend zwei derselben einem und demselben Teilwürfel angehören. In üblicher Weise schließt man daraus die Existenz ganzer Zahlen $q > 0,\ p_1, \ldots, p_n$, so daß

$$|q\,\Theta_k - p_k| < \frac{1}{t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

also wegen (7)

$$|q\,\Theta_k - p_k| < \frac{\eta}{M^{\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und a fortiori

$$|q\,\Theta_k - p_k| < \frac{\eta}{q^{\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt, womit alles bewiesen ist.

2.

Herr Perron hat in seiner genannten Abhandlung zum erstenmal die Existenz extremer Zahlensysteme für jede Gliederzahl n bewiesen. Aus seinem diesbezüglichen Hauptsatz folgt speziell, daß, wenn Θ eine reelle algebraische Zahl vom Grade $n+1$ ist, die Zahlen $\Theta, \Theta^2, \Theta^3, \ldots, \Theta^n$ ein extremes System bilden. Dieser Satz kann als eine Verschärfung des bekannten Liouvilleschen Satzes über algebraische Zahlen betrachtet werden, denn letzterer kann aus ihm leicht gefolgert werden (für $n = 1$ fallen die beiden Sätze zusammen).

Dieser Satz verschärft aber den Liouvilleschen in einer ganz anderen Richtung, als es die bekannten Resultate der Herren Thue[3]) und Siegel[4]) tun; und in einer bestimmten Hinsicht kann er als eine stärkere Verschärfung betrachtet werden, wie ich hier zeigen will.

Keines der hier zitierten, für den algebraischen Charakter einer Zahl notwendigen Kennzeichen ist für denselben hinreichend; auch das Perronsche nicht. Da aber die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar, also a fortiori von Lebesgueschem Maße Null ist, kann man ein Kennzeichen für algebraische Zahlen desto schärfer nennen, je kleiner das Maß der Menge der Zahlen ist, welche zwischen 0 und 1 liegen und dem vorliegenden Kennzeichen Genüge leisten. Nun ist im Falle des Liouvilleschen Kennzeichens, abgesehen vom Falle $n = 1$, das Maß der betreffenden Menge gleich 1; und die Verschärfungen von Thue und Siegel[5]) verbessern nichts in dieser Beziehung. Diese Kennzeichen sind also sämtlich nicht nur für algebraische, sondern auch für fast alle transzendente Zahlen erfüllt. Im Gegensatz dazu soll hier gezeigt werden, daß dem Perronschen Kriterium nur eine Zahlenmenge vom Maße Null genügen kann; für eine angegebene transzendente Zahl besteht also eine Wahrscheinlichkeit $= 1$, daß sie dem Kennzeichen nicht genügt.

---

[3]) Journal für die reine und angew. Mathematik 135 (1909).

[4]) Math. Zeitschrift 10 (1921).

[5]) Auch nicht der tieferliegende Satz von Siegel, Math. Annalen 83 (1921), S. 80.

Um das einzusehen, genügt es offenbar, folgendes zu beweisen.

Satz. *Jede Zahl α zwischen 0 und 1, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, erfüllt folgende Bedingung: Es seien $\varepsilon > 0$ beliebig und k ganz positiv. Dann gibt es solche $k+1$ ganze rationale Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k, q$ $(q > 0)$, daß*

$$\left|\alpha^i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q^{1+\frac{1}{k}}} \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq k$$

ist.

Beweis. Da die Vereinigung einer abzählbaren Menge von Mengen, deren Maß gleich Null ist, wieder eine Menge derselben Art bildet, so genügt es offenbar, den Satz für beliebige, aber fest gewählte ε und k zu beweisen.

Es sei α eine beliebige Zahl zwischen 0 und 1, die wir jetzt noch *irrational* voraussetzen.

Wir betrachten irgendeine orthogonale und normale Matrix

$$(1) \qquad \left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \ldots & \alpha_{kk} \end{matrix}\right\|,$$

deren erste Zeile durch

$$\alpha_{1i} = i\alpha^{i-1} \cdot M, \qquad M = \frac{1}{+\sqrt{1^2 + (2\alpha)^2 + (3\alpha^2)^2 + \ldots + (k\alpha^{k-1})^2}}$$

bestimmt sei, während die übrigen beliebig sein mögen, und die zugehörige Koordinatentransformation

$$x_i' = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \ldots + \alpha_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

im k-dimensionalen Raume.

Wir setzen $\sigma = \frac{\varepsilon}{3k}$ und teilen den Raum in Parallelepipeda, deren einzelnes durch die Ungleichungen

$$\frac{i_1}{\sigma^{k-1} t} \leqq x_1' < \frac{i_1 + 1}{\sigma^{k-1} t},$$

$$i_s \frac{\sigma}{t} \leqq x_s' < (i_s + 1)\frac{\sigma}{t} \qquad (s = 2, 3, \ldots, k)$$

bestimmt sein möge, wo t eine feste, später näher zu bestimmende positive Zahl bedeutet, während $i_1, i_2, \ldots, i_k$ unabhängig voneinander alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen. Jedes Parallelepipedum hat offenbar ein Volumen $= \frac{1}{t^k}$.

Nun bedeute n die Anzahl der Parallelepipeda, welche vollständig oder auch nur zum Teil dem durch die Ungleichungen

$$(2) \qquad 0 \leqq x_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

definierten Würfel angehören. Es sei ferner $P(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ ein Punkt, der einem Parallelepipedum A angehört, welches seinerseits mit dem Würfel (2) den Punkt $Q(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ gemeinsam haben möge.

Dann ist für $1 \leqq r \leqq k$

$$|y_r - z_r| = |\beta_{r1}(y_1' - z_1') + \beta_{r2}(y_2' - z_2') + \ldots + \beta_{rk}(y_k' - z_k')| < \frac{k}{\sigma^{k-1} t},$$

wo unter $\|\beta_{il}\|$ die zu (1) inverse Matrix gemeint ist. Daraus folgt nun, daß der Punkt P dem Würfel angehört, welcher aus dem Würfel (2) durch eine Vergrößerung im linearen Verhältnis $2:1$ vom Mittelpunkte aus entsteht, wenn nur

$$\frac{k}{\sigma^{k-1} t} < \frac{1}{2}, \quad \text{also wenn} \quad t > \frac{2k}{\sigma^{k-1}}$$

ist, was wir jetzt annehmen wollen.

Es sind also alle n Parallelepipeda, von denen eben die Rede war, in diesem neuen Würfel vom Volumen 2^k enthalten; folglich ist

$$n \cdot \frac{1}{t^k} \leqq 2^k, \qquad n \leqq (2t)^k.$$

Nun soll q der Reihe nach die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, (2t)^k$$

durchlaufen. Zu jedem dieser q bestimmen wir dann k Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ derart, daß

$$0 \leqq q\alpha^i - p_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

ist. Der Punkt $x_i = q\alpha^i - p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ des k-dimensionalen Raumes ist folglich für jedes q im Würfel (2) und folglich in einem unserer n Parallelepipeda enthalten. Da q dabei $(2t)^k + 1$ verschiedene Werte erhält und $n \leqq (2t)^k$ ist, so müssen wenigstens in eines der Parallelepipeda zwei von den konstruierten Punkten fallen. Es seien dies die Punkte $x_i = q^{(1)}\alpha^i - p_i^{(1)}$ und $x_i = q^{(2)}\alpha^i - p_i^{(2)}$; der Bestimmtheit wegen setze man $q^{(1)} < q^{(2)}$ voraus; man setze ferner

$$q = q^{(2)} - q^{(1)}$$
$$p_i = p_i^{(2)} - p_i^{(1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Dann findet man

$$\left|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(q\alpha^s - p_s)\right| = \left|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(q^{(2)}\alpha^s - p_s^{(2)}) - \sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(q^{(1)}\alpha^s - p_s^{(1)})\right|$$

$$< \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^{k-1}t} & \text{für } i = 1, \\ \dfrac{\sigma}{t} & \text{für } 2 \leqq i \leqq k. \end{cases}$$

Wegen $q \leqq (2t)^k$, also $t \geqq \frac{1}{2}q^{\frac{1}{k}}$, erhält man daraus, indem man durch q dividiert,

$$\left|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}\left(\alpha^s - \frac{p_s}{q}\right)\right| < \begin{cases} \dfrac{2}{\sigma^{k-1}q^{1+\frac{1}{k}}} & \text{für } i = 1, \\ \dfrac{2\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}} & \text{für } 2 \leqq i \leqq k. \end{cases}$$

Man setze nun

$$C_q = \sum_{s=1}^{k}\alpha_{1s}\left(\alpha^s - \frac{p_s}{q}\right), \quad \text{also} \quad |C_q| < \frac{2}{\sigma^{k-1}q^{1+\frac{1}{k}}},$$

und

$$r = M \cdot \sum_{i=1}^{k}(i\alpha^{i-1})^2 = \frac{1}{M}.$$

Wir betrachten das Intervall, das durch die Ungleichungen

$$\alpha - \frac{C_q}{r} - \frac{\sigma}{rq^{1+\frac{1}{k}}} < y < \alpha - \frac{C_q}{r} + \frac{\sigma}{rq^{1+\frac{1}{k}}} \tag{3}$$

bestimmt und dessen Länge folglich $\frac{2\sigma}{rq^{1+\frac{1}{k}}}$ ist. Wir setzen noch

$$\varphi_i(y) = \alpha_{i1}\left(y - \frac{p_1}{q}\right) + \alpha_{i2}\left(y^2 - \frac{p_2}{q}\right) + \ldots + \alpha_{ik}\left(y^k - \frac{p_k}{q}\right).$$

Gehört nun y dem Intervall (3) an, so ist offenbar

$$|\varphi_1(y)| = \left|C_q + \sum_{s=1}^{k}\alpha_{1s}(y^s - \alpha^s)\right| = |C_q + (y-\alpha)[r + O(y-\alpha)]|$$

$$= |C_q + (y-\alpha)r + O(y-\alpha)^2| < \frac{\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}} + O(y-\alpha)^2.$$

Wegen der Irrationalität von α wächst dabei offenbar q mit t über alle Grenzen, und kann folglich beliebig groß gedacht werden. Wegen $|y-\alpha|<\frac{A}{q^{1+\frac{1}{k}}}$, wo A von q unabhängig ist, muß also für genügend großes q

$$|\varphi_1(y)|<\frac{3\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Andererseits findet man für $i>1$ infolge der Orthogonalität der Matrix (1)

$$|\varphi_i(y)|=\left|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(y^s-\alpha^s)+\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}\left(\alpha^s-\frac{p_s}{q}\right)\right|<\left|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(y^s-\alpha^s)\right|+\frac{2\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}$$

$$=\frac{2\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}+\left|(y-\alpha)\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}[s\alpha^{s-1}+O(y-\alpha)]\right|$$

$$=\frac{2\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}+O(y-\alpha)^2<\frac{3\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}$$

für genügend großes q.

Alles in allem, ist also für $i=1,2,\ldots,k$, für genügend großes q und für jedes dem Intervall (3) angehörende y

$$|\varphi_i(y)|<\frac{3\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Folglich ist für dieselben y, i und q

$$\left|y^i-\frac{p_i}{q}\right|=|\beta_{i1}\varphi_1(y)+\beta_{i2}\varphi_2(y)+\ldots+\beta_{ik}\varphi_k(y)|<\frac{3k\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}=\frac{\varepsilon}{q^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Nun ist die Länge des Intervalls (3) gleich

$$\frac{2\sigma}{rq^{1+\frac{1}{k}}},$$

und die Entfernung seines Mittelpunktes von α

$$\frac{C_q}{r}<\frac{2}{r\sigma^{k-1}q^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Das Verhältnis dieser beiden Zahlen ist also größer, als die Konstante σ^k, die weder von α noch von q abhängt. Da dieses Intervall (3) beliebig nahe an α angenommen werden darf, so schließt man weiter so: Die Menge der Zahlen, welche der im Wortlaut des Satzes III aufgestellten Bedingung für unsere festen ε, k nicht Genüge leisten, soll mit E bezeichnet werden. Wir haben durch das Vorangehende bewiesen, daß die Menge E im Punkte α nicht eine Dichtigkeit $=1$ besitzen kann. Und da α eine beliebige irrationale Zahl ist, so folgt aus bekannten Sätzen der metrischen Mengenlehre, daß E eine Menge vom Maße Null ist, w. z. b. w.

Andererseits zeigt unsere Betrachtung, daß die Menge E nirgends dicht ist. Daraus folgt bekanntlich, daß die Menge der Zahlen, welche der Bedingung des Satzes nicht Genüge leisten, eine *Menge der I. Kategorie* ist nach der Baireschen Klassifikation.

Moskau, den 24. Dez. 1923.

(Eingegangen am 15. Januar 1924.)