Über die Gaußsche Krümmung der reellen Minimalflächen im R_4.

Von

M. Pinl, Dacca (Pakistan).

(Eingelangt am 14. Juli 1953.)

In einer Untersuchung „Über einen Satz von *L. Berwald* und die *Gauß*sche Krümmung der Minimalflächen"[1] wurde gezeigt: unter den *Eisenhart*schen Minimalflächen des euklidischen vierdimensionalen Raumes, R_4, gibt es keine mit konstanter nichtverschwindender *Gauß*scher Krümmung. Dabei handelt es sich um Minimalflächen, deren Erzeugende durch ebene in vollisotropen Ebenen des R_4 gelegene konjugiert-komplexe isotrope Kurven gegeben sind. Auf diesen Minimalflächen existieren keine *Study-Vessiot*schen Flächenparameter. Demgegenüber setzen wir im folgenden zunächst die Existenz *Study-Vessiot*scher Flächenparameter voraus und betrachten vorzugsweise allgemeine Minimalflächen des R_4 mit nichtebenen isotropen Erzeugenden:

$$\mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2), \quad \mathfrak{y}'^2 = \dot{\mathfrak{z}}^2 = 0, \quad \mathfrak{y}''^2 = \ddot{\mathfrak{z}}^2 = -1.$$

Im dreidimensionalen Raum folgt bekanntlich in dieser Normierung der Quadrate der zweiten Ableitungen $\mathfrak{y}''$ und $\ddot{\mathfrak{z}}$ für die *Gauß*sche Krümmung K der Minimalflächen die von *E. Study* angegebene Form $K = -\frac{1}{(\mathfrak{y}'\,\dot{\mathfrak{z}})^2}$. Für konstante *Gauß*sche Krümmung $K = -k^2$ ergibt sich so unmittelbar $\mathfrak{y}'\,\dot{\mathfrak{z}} = g_{12} = \text{const}$ und daher wegen $g_{11} = \mathfrak{y}'^2 = g_{22} = \dot{\mathfrak{z}}^2 = 0$ für K im Widerspruch zur Voraussetzung der Wert $k = 0$. Um dies Ergebnis auf euklidische Einbettungsräume beliebiger Dimensionszahl $n > 3$ zu verallgemeinern, müßte man für $n > 3$ die Existenz von isotropen Flächenparametern beweisen, in welchen die *Gauß*sche Krümmung der in Rede stehenden Minimalflächen die *Study*sche Form $-\frac{1}{g_{12}{}^2}$ annimmt. Nur dann könnte das Resultat der drei-

---

[1] Vgl. *M. Pinl,* Monatshefte für Mathematik **55**/3 (1951), S. 188—199.

dimensionalen Einbettung im Falle konstanter *Gauß*scher Krümmung für allgemeine Werte $n > 3$ behauptet werden. Während nun die Existenz solcher Parameter in R_3 unmittelbar durch die Einführung *Study-Vessiot*scher Flächenparameter auf der Minimalfläche bewiesen wird, ist im R_4 das Gegenteil der Fall: die *Gauß*sche Krümmung einer reellen Minimalfläche des R_4 gewinnt durch Verwendung *Study-Vessiot*scher Parameter als Flächenparameter nur dann die Form $K = -\frac{1}{g_{12}^2}$, wenn die Minimalfläche in einem linearen dreidimensionalen Unterraum liegt[2].

Aus diesem Grunde wie auch deshalb, weil wir im folgenden vornehmlich an reellen Minimalflächen interessiert sind, empfiehlt es sich, die Untersuchung der *Gauß*schen Krümmung der Minimalflächen in nicht isotropen Parametern zu führen. Wir wählen als solche isotherme Parameter u_1, u_2 und gewinnen eine Methode, welche für $n = 3$ wie auch für $n = 4$ zum Ziel führt.

§ 1. $n = 3$.

Der Realteil $\Re\,\mathfrak{y}(u) = \mathfrak{x}(u_1, u_2)$ des Ortsvektors einer isotropen Kurve $\mathfrak{y}(u)$ $(u = u_1 + i\,u_2)$ ist Ortsvektor einer auf isotherme Parameter u_1, u_2 bezogenen reellen Minimalfläche[3] mit der Metrik

$$g_{11} = g_{22} = \lambda(u_1, u_2),\ g_{12} = 0. \tag{1}$$

Da die mittlere Krümmung H auf $\mathfrak{x}$ verschwindet, sind erste und dritte Fundamentalform proportional und die *Gauß*sche sphärische Abbildung der Minimalfläche konform zu dieser:

$$K\,g_{ik} = -e_{ik},\ e_{ik} = \mathfrak{n}_i\,\mathfrak{n}_k,\ \mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2}{|g_{ik}|^{1/2}} = \frac{\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2}{\lambda},\quad i, k = 1, 2. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

---

[2] Vgl. (1), S. 195.

[3] Da $\mathfrak{y}(u) = \mathfrak{x}(u_1, u_2) + i\,\mathfrak{z}(u_1, u_2)$ in u analytisch, folgt nach *Cauchy Riemann*

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{z}_1,\ \Delta\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{11} + \mathfrak{x}_{22} = 0,\ \Delta\,\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{11} + \mathfrak{z}_{22} = 0$$

und da $\mathfrak{y}$ isotrop

$$\mathfrak{y}'^2 = (\mathfrak{x}_1 + i\,\mathfrak{z}_1)^2 = (\mathfrak{x}_1 - i\,\mathfrak{x}_2)^2 = (i\,\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)^2 = 0.$$

Daher ist

$$\mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_2^2 = \lambda,\ \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2 = 0 \text{ bzw. } g_{11} = g_{22} = \lambda(u_1, u_2) \neq 0,\ g_{12} = 0.$$

Die Indizes der Vektoren bedeuten partielle Ableitungen, z. B.:

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{\partial\,\mathfrak{x}}{\partial u_1},\ \mathfrak{x}_2 = \frac{\partial\,\mathfrak{x}}{\partial u_2},\ \mathfrak{x}_{11} = \frac{\partial^2\,\mathfrak{x}}{\partial u_1^2},\ \mathfrak{x}_{12} = \frac{\partial^2\,\mathfrak{x}}{\partial u_1\,\partial u_2},\ \mathfrak{x}_{22} = \frac{\partial^2\,\mathfrak{x}}{\partial u_2^2},\ \mathfrak{z}_1 = \frac{\partial\,\mathfrak{z}}{\partial u_1},\ \mathfrak{z}_2 = \frac{\partial\,\mathfrak{z}}{\partial u_2},\ldots$$

$$\mu = e_{11} = e_{22},\ e_{12} = 0,\ |g_{ik}| = \lambda^2,\ |e_{ik}| = \mu^2$$

und daher:

$$\iint K\,|g_{ik}|^{1/2}\,du_1\,du_2 = \iint \lambda\,K\,du_1\,du_2 = \iint \mu\,du_1\,du_2,$$
$$\iint (\lambda\,K - \mu)\,du_1\,du_2 = 0.$$

Im Falle konstanter negativer *Gauß*scher Krümmung $K = -k^2$ ergibt sich

$$\iint (\lambda\,k^2 + \mu)\,du_1\,du_2 = 0. \tag{3}$$

Da $\mathfrak{x}$ eine reelle Fläche darstellt, gilt:

$$\lambda = g_{11} = g_{22} = \mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_2^2 > 0,\ \mu = e_{11} = e_{22} = \mathfrak{n}_1^2 = \mathfrak{n}_2^2 > 0.$$

Auch die Zahl k ist reell und ihr Quadrat daher positiv. Dann ist jedoch die Gleichung (3) unmöglich. Damit haben wir den bekannten Sachverhalt bestätigt:

(I) *Im euklidischen dreidimensionalen Raum gibt es keine Minimalflächen mit konstanter negativer Gaußscher Krümmung.*

§ 2. $n = 4$.

Der Wert des Ergebnisses (I) liegt für uns allein in der Methode des Beweises. Im Gegensatz zu anderen Beweisen dieses Resultates (I) kann die in § 1 verwendete Methode auch noch für die Minimalflächen des R_4 verwendet werden. $\mathfrak{y}(u)$ bezeichne nunmehr den Ortsvektor einer allgemeinen isotropen Kurve des R_4. Dann sind u_1, u_2 wiederum isotherme Parameter auf der reellen Minimalfläche

$$\Re\,\mathfrak{y}(u) = \mathfrak{x}(u_1, u_2),\ g_{11} = g_{22} = \lambda,\ g_{12} = 0,\ (\Delta\,\mathfrak{x} = 0)$$

des R_4. Auf $\mathfrak{x}$ verwenden wir das begleitende normierte und orthogonalisierte Vierbein:

$$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3;\ \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad i, k = 0, 1, 2, 3,$$

dessen Vektoren $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ aus dem Ortsvektor der Minimalfläche explizit berechnet werden können:

$$\mathfrak{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\,\mathfrak{h}_{12},\ \mathfrak{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\mathfrak{h}_{11} = -\frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\mathfrak{h}_{22},$$
$$\lambda = \mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_2^2,\ \nu = \mathfrak{h}_{11}^2 = \mathfrak{h}_{22}^2,\ \varrho = \mathfrak{h}_{12}^2. \tag{4}$$

Dabei sind die Vektoren $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ die kovarianten Ableitungen

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \mathfrak{x}_\gamma,\quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$$

des Ortsvektors $\mathfrak{r}$. Sie liegen alle in der Normalebene der Fläche; $\mathfrak{h}_{11}$ und $\mathfrak{h}_{22}$ sind linear abhängig, da der mittlere Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ der Fläche nach Voraussetzung verschwindet:

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta}\,\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 1/\lambda\,(\mathfrak{h}_{11} + \mathfrak{h}_{22}) = 0,\ \mathfrak{h}_{11} = -\mathfrak{h}_{22},\ \mathfrak{h}_{11}{}^2 = \mathfrak{h}_{22}{}^2 = \nu^2.$$

Ist u *Study-Vessiot*scher Parameter auf $\mathfrak{y}(u)$, so folgt überdies $\mathfrak{h}_{11}\,\mathfrak{h}_{12} = \mathfrak{h}_{22}\,\mathfrak{h}_{12} = 0$. Dann sind alle Vektoren (4) normiert und orthogonalisiert. Ist dies nicht der Fall, so sind $\mathfrak{h}_{11} = -\mathfrak{h}_{22}$ und $\mathfrak{h}_{12}$ durch geeignete Linearkombinationen zu ersetzen. Für die Vektoren des begleitenden Vierbeins (4) gelten *E. Cartans* Ableitungsgleichungen:

$$d\mathfrak{a}_i = \sum_{k=0}^{3} \mathfrak{a}_k\,\tau_{ik},\ \tau_{ik} + \tau_{ki} = 0,\quad i = 0, 1, 2, 3$$

und die *Pfaff*schen binären Formen $\tau_{ik} = -\mathfrak{a}_i\,d\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_k\,d\mathfrak{a}_i$ lassen sich aus (4) berechnen. Wie ist nun die *Gauß*sche sphärische Abbildung der Minimalflächen des R_3 auf solche des R_4 zu verallgemeinern? Hier hat *W. Blaschke* in seiner Arbeit „Sulla geometrie differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4" den Weg gewiesen[4]. Die Komponenten a_{ik} der Vektoren (4) bilden eine orthogonale Matrix der Determinante $+1$. Mit ihrer Hilfe bilde man die konjugierten Quaternionen:

$$\boldsymbol{a}_i = a_{i0} + a_{i1}\,e_1 + a_{i2}\,e_2 + a_{i3}\,e_3,\ \bar{\boldsymbol{a}} = a_{i0} - a_{i1}\,e_1 - a_{i2}\,e_2 - a_{i3}\,e_3,$$
$$i = 0, 1, 2, 3$$

und betrachte speziell die Quaternionenprodukte

$$\boldsymbol{a}_\alpha\,\bar{\boldsymbol{a}}_0 = \boldsymbol{r}_\alpha,\ \bar{\boldsymbol{a}}_0\,\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha',\ \alpha = 1, 2, 3.$$

Ihre „Skalarteile" verschwinden wegen der Orthogonalität der Matrix $\|a_{ik}\|$. Ihre „vektoriellen Teile" lassen sich als Vektoren eines R_3 deuten. Darunter sind insbesondere die Quaternionen $\boldsymbol{r}_3$ und $\boldsymbol{r}_3'$ invariant gegenüber Drehungen der Flächentangentialebene in sich. Die $\boldsymbol{r}_3$ und $\boldsymbol{r}_3'$ entsprechenden Vektoren $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ deutet *W. Blaschke* als Ortsvektoren eines Paars zweier Kugelbilder in R_3 der Fläche R_4. Damit wird jeder zweidimensionalen Fläche des R_4 ein Paar Kugelbilder zugeordnet. Berechnet man jetzt die *Pfaff*schen Formen $\tau_{ik} = -\mathfrak{a}_i\,d\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_k\,d\mathfrak{a}_i$ aus (4) und benutzt die auf Minimalflächen in isothermen Parametern gültige Relation $\Delta\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{r}_{22} = 0$, so ergibt sich: *W. Blaschke*'s Kugelbilder der Minimalflächen des R_4 sind konform gleichwie die *Gauß*schen

[4] Vgl. *W. Blaschke*, Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV-Tomo XXVIII — 1949, p. 205—209.

Kugelbilder der Minimalflächen des R_3[5]. Die entsprechenden binären quadratischen Differentialformen

$$\langle d\mathfrak{x}_3,\ d\mathfrak{x}_3 \rangle \quad \text{und} \quad \langle d\mathfrak{x},\ d\mathfrak{x} \rangle = \lambda\,(du_1^2 + du_2^2)$$

bzw.

$$\langle d\mathfrak{x}_3',\ d\mathfrak{x}_3' \rangle \quad \text{und} \quad \langle d\mathfrak{x},\ d\mathfrak{x} \rangle = \lambda\,(du_1^2 + du_2^2)$$

sind also proportional. Die Werte dieser Proportionalitätsfaktoren sind für das Folgende wichtig. Man erhält[6]

$$\begin{aligned}\langle d\mathfrak{x}_3, d\mathfrak{x}_3 \rangle &= \chi/\lambda\,(du_1^2 + du_2^2);\ \chi = (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{11})^2 + (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{11})^2 + (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{12})^2 + \\ &+ (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{12})^2 + 2\,(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{12})\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{11}) - 2\,(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{11})\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{12}), \qquad (5)\\ \langle d\mathfrak{x}_3', d\mathfrak{x}_3' \rangle &= \psi/\lambda\,(du_1^2 + du_2^2);\ \psi = (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{11})^2 + (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{11})^2 + (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{12})^2 + \\ &+ (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{12})^2 - 2\,(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{12})\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{11}) + 2\,(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{11})\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{12}).\end{aligned}$$

Insbesondere heben sich also in der Summe $\chi + \psi$ alle negativen Terme weg. Bezeichnen wir jetzt die Flächenelemente der Kugelbilder mit Φ und Φ' und den Integranden der *Gauß*schen Totalkrümmung der Fläche mit Ψ, so gilt nach *W. Blaschke* allgemein:[7]

$$\int \Phi + \int \Phi' = 2 \int \Psi = 2 \int\int K \,|\, g_{ik} \,|^{1/2}\, du_1\, du_2. \qquad (6)$$

Bezeichnen wir die metrischen Fundamentalkomponenten des Kugelbildes $\mathfrak{x}_3$ mit r_{ik} und die des Kugelbildes $\mathfrak{x}_3'$ mit r_{ik}', so ergibt sich für Minimalflächen:

$$r_{11} = r_{22} = \lambda\,\sigma,\ r_{12} = r_{21} = 0,\ |\, r_{ik} \,| = \lambda^2\,\sigma^2 = \sigma^2\,|\, g_{ik} \,|,\ \sigma = \chi/\lambda^2,$$

$$r_{11}' = r_{22}' = \lambda\,\sigma',\ r_{12}' = r_{21}' = 0,\ |\, r_{ik}' \,| = \lambda^2\,\sigma'^2 = \sigma'^2\,|\, g_{ik} \,|,\ \sigma' = \psi/\lambda^2.$$

Da $g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2 = \lambda^2$, entsteht so an Stelle von (6) die Gleichung

$$\int\int |r_{ik}|^{1/2} du_1\, du_2 + \int\int |\,r_{ik}'\,|^{1/2} du_1\, du_2 = 2 \int\int K\, |g_{ik}|^{1/2} du_1\, du_2 = 2 \int\int K\lambda\, du_1 du_2$$

oder

$$\int\int \lambda\,(\sigma + \sigma' - 2\,K)\, du_1\, du_2 = 0.$$

Die letzte Gleichung verwandelt sich im Falle negativer konstanter *Gauß*scher Krümmung $K = -k^2$ in die folgende:

$$\int\int \mathfrak{r}_1^2 \left(\frac{\chi}{\mathfrak{r}_1^2} + \frac{\psi}{\mathfrak{r}_1^2} + 2\,k^2\right) du_1\, du_2 = \int\int \mathfrak{r}_2^2 \left(\frac{\chi}{\mathfrak{r}_2^2} + \frac{\psi}{\mathfrak{r}_2^2} + 2\,k^2\right) du_1\, du_2 = 0.$$

Doch dieses Resultat ist unmöglich, denn nach (5) besteht die Summe

[5] Vgl. *M. Pinl*, *B*-Kugelbilder der reellen Minimalflächen in R_4. Math. Z. **59**, S. 290—295 (1953).

[6] Vgl. (5), S. 294.

[7] Vgl. (4), p. 208.

$\chi + \psi$ aus Quadraten reeller Zahlen und dasselbe gilt auch für die Quadrate der reellen Vektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ und auch die Zahl k ist reell und ihr Quadrat positiv. Damit gewinnen wir das Ergebnis:

(II) *Im euklidischen vierdimensionalen Raum gibt es keine Minimalflächen mit konstanter nichtverschwindender Gaußscher Krümmung.*

Auch der Fall konstanter positiver *Gauß*scher Krümmung ist unmöglich, da die *Gauß*sche Krümmung stets in der Form $K = -(a^2 + b^2)$ geschrieben werden kann, worin a und b die Halbachsen der Krümmungsellipse bedeuten. Auf reellen Flächen ist dieser Ausdruck niemals positiv. Nach *D. Hilbert* gibt es im euklidischen dreidimensionalen Raum keine singularitätenfreien Flächen konstanter negativer *Gauß*scher Krümmung[8]. Dieser Satz gilt nicht mehr im *Hilbert*schen Raum, wie *L. Bieberbach* durch Angabe eines Beispiels gezeigt hat[9]. Für endliche Dimensionszahlen $n > 3$ scheint die Frage der Gültigkeit dieses *Hilbert*schen Satzes noch ungeklärt. Unser Ergebnis (II) bedeutet eine Warnungstafel für Versuche, ein solches Gegenbeispiel bereits mit Hilfe der (formelmäßig so bequemen) Minimalflächen des R_4 zu finden.

Darjeeling (Himalaya), Mai 1953.

---

[8] Vgl. z. B. *W. Blaschke,* Differentialgeometrie, Band I, Springer-Verlag, Berlin; Comment. math. helv. 4, 1932, S. 248—255.

[9] Vgl. *L. Bieberbach,* Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich (1932).