Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind.

Von

Heinrich Maschke in Chicago.

In meiner Arbeit*) „Ueber den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen" habe ich folgenden, dort als Hülfstheorem (Satz VII, l. c. pag. 497) benutzten, Satz bewiesen:

„*Ist eine endliche Gruppe linearer Substitutionen von n Variabelen gegeben, welche mindestens eine Substitution S enthält, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt, und weiss man, dass die Gruppe, nachdem man sie so transformirt hat, dass S in der kanonischen Form erscheint, so beschaffen ist, dass in ihren sämmtlichen Substitutionen mindestens ein (nicht in der Hauptdiagonale stehender) Coefficient durchgehend Null ist, so zerfällt die Gruppe in zwei Systeme von je r und $n-r$ Variabelen, in deren jedem sich die r, resp. $n-r$ Variabelen nur unter sich linear substituiren*".

Im Folgenden soll bewiesen werden, dass die in diesem Satze enthaltene Einschränkung beseitigt werden kann. Kommen wir überein, lineare Substitutionsgruppen, die sich so transformiren lassen, dass die Variabelen der transformirten Gruppe sich in eine Anzahl von Systemen derartig zerlegen lassen, dass sich die Variabelen eines und desselben Systems nur unter sich substituiren, *intransitiv* zu nennen, so soll also in voller Allgemeinheit bewiesen werden:

Jede endliche lineare Substitutionsgruppe, in deren sämmtlichen Substitutionen ein (nicht in der Hauptdiagonale stehender) Coefficient durchgehend Null ist, ist intransitiv.

Was die Bezeichnung anbetrifft, so sollen für die jeweiligen n^2 Coefficienten der Substitutionen $A, A', \dots B$, etc. der vorliegenden

---

*) Diese Annalen, Bd. 50, pag. 492.

Gruppe G die entsprechenden kleinen Buchstaben gewählt werden, sodass also die Substitution A z. B. so lautet:

$$z_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \quad (i=1,2,\dots n). \tag{1}$$

Von dem Coefficienten (i,k) sage ich, er sei durchgehend Null, wenn in *jeder* Substitution der Coefficient von z_k in dem linearen Ausdruck für z_i' Null ist, und bezeichne dies durch $(i,k)\equiv 0$, während $(i,k)\not\equiv 0$ bedeuten soll, dass der Coefficient (i,k) nicht durchgehend Null ist, somit natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass dieser Coefficient in einzelnen Substitutionen der Gruppe verschwindet. Ein für alle Mal kommen hierbei nur solche Coefficienten in Betracht, für welche $i \neq k$.

§ 1.

Ich beweise zunächst folgendes Lemma:

Ist eine lineare Substitutionsgruppe (von endlicher oder unendlicher Ordnung) so beschaffen, dass es möglich ist, aus einer Zeile, etwa der i^{ten}, eine Anzahl, etwa m, Coefficienten

$$(ik_1),\ (ik_2),\ \dots\ (ik_m)\ (k_1,\ k_2,\ \dots\ k_m \neq i)$$

so herauszugreifen, dass jede der Determinanten

$$\begin{vmatrix} a'_{ik_1}, & a'_{ik_2}, & \dots & a'_{ik_m} \\ a''_{ik_1}, & a''_{ik_2}, & \dots & a''_{ik_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(m)}_{ik_1}, & a^{(m)}_{ik_2}, & \dots & a^{(m)}_{ik_m} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

gebildet aus den entsprechenden Coefficienten jeder möglichen Combination von je m Substitutionen $A', A'', \dots A^{(m)}$ der Gruppe, verschwindet, so lässt sich die Gruppe so transformiren, dass mindestens einer der Coefficienten $(ik_1), (ik_2), \dots (ik_m)$ in der transformirten Gruppe durchgehend Null ist.

Zum Beweise greife man eine derjenigen Determinanten heraus, welche den höchsten Rang, etwa ϱ, $(\varrho < m)$, besitzen. Sei dieses die Determinante (2), wo wir uns jetzt also die Substitutionen $A', A'', \dots A^{(m)}$ fixirt denken. Dann sind ϱ der Grössen

$$a^{(\lambda)}_{ik_1} z_{k_1} + a^{(\lambda)}_{ik_2} z_{k_2} + \dots + a^{(\lambda)}_{ik_m} z_{k_m} \tag{3}$$

(für ϱ Werthe von λ) linear unabhängig. Seien dies die ϱ ersten, also die Ausdrücke (3) für $\lambda = 1, 2, \dots \varrho$, die wir entsprechend mit $y_{k_1}, \dots y_{k_\varrho}$ bezeichnen. Halten wir jetzt die zugehörigen Substitutionen $A', A'', \dots A^{(\varrho)}$ fest, und lassen den Rest $A^{(\varrho+1)}, \dots A^{(m)}$ über die ganze Gruppe variiren, dann sind die zugehörigen Ausdrücke (3) sämmtlich linear durch die ϱ Grössen y ausdrückbar, da jede der entsprechenden Determinanten (2) vom Range ϱ ist. Der Ausdruck (3) constituirt aber in der Substitution $A^{(\lambda)}$ gerade einen Theil der linearen Function z_i'. In jeder Substitution wird also dieser Theil, welcher ursprünglich die m Variabelen $z_{k_1}, \dots z_{k_m}$ enthielt, durch die $\varrho (\varrho < m)$ Variabelen $y_{k_1}, \dots y_{k_\varrho}$ ersetzt. Führt man daher diese ϱ Grössen y an Stelle von ϱ der Variabelen $z_{k_1}, \dots z_{k_m}$ (welche letzteren man nur so zu wählen hat, dass die ϱ Grössen y mit den übrig bleibenden $m - \varrho$ Grössen z linear unabhängig sind, was wegen der linearen Unabhängigkeit der y stets möglich ist), so enthält die so transformirte Gruppe in der i^{ten} Zeile $m - \varrho$ durchgehende Nullen, also mindestens eine, qu. e. d.

Als Corollar zu obigem Lemma sei noch erwähnt, *dass sich durchgehende Nullen stets einführen lassen, wenn die Ordnung der Gruppe mindestens um zwei kleiner ist, als die Anzahl der Substitutionsvariabelen.* Die zugehörige Transformation bestimmt man in ähnlicher Weise wie soeben.

§ 2.

Sei also jetzt eine Gruppe G vorgelegt, welche durchgehende Nullen enthält. Wir greifen alsdann diejenige Zeile heraus, in welcher die Maximalanzahl durchgehender Nullen vorkommt, und bewirken durch eine geeignete Vertauschung der Indices der z, dass jene Zeile die erste wird, und dass die durchgehenden Nullen sämmtlich an das Ende der ersten Zeile zu stehen kommen. Wir setzen also voraus, dass

$$(1, k) \equiv 0 \quad \text{für} \quad k = r+1, \dots n, \tag{4}$$

$$(1, k) \not\equiv 0 \quad \text{für} \quad k = 2, 3, \quad \dots r. \tag{5}$$

Nunmehr bilden wir in der Substitution AB, wo A und B irgend zwei Substitutionen von G bedeuten, die Coefficienten $(1, k)$ für $k = r+1, \dots n$. Dann folgt aus (4) in Anbetracht von

$$a_{1k} = b_{1k} = 0 \quad (k = r+1, \dots n)$$

folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{\lambda=2}^{r} a_{1\lambda} b_{\lambda k} = 0 \quad (k = r+1, \dots n). \tag{6}$$

Diese Gleichungen gelten für *jede zwei* Substitutionen A und B aus G.

Wir greifen jetzt solche $r-1$ Substitutionen $A', A'', \dots A^{(r-1)}$ aus G heraus, für welche die aus den zugehörigen Coefficienten der ersten Zeile gebildete Determinante

$$(7) \qquad R = \begin{vmatrix} a'_{12}, & a'_{13}, & \dots a'_{1r} \\ a''_{12}, & a''_{13}, & \dots a''_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(r-1)}_{12}, & a^{(r-1)}_{13}, & \dots a^{(r-1)}_{1r} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

Falls dies nicht möglich sein sollte, können wir nach dem in § 1 bewiesenen Lemma, resp. Corollar, die Gruppe so transformiren, dass zu den bereits in der ersten Zeile befindlichen $n - r$ durchgehenden Nullen noch weitere hinzutreten. Diese Transformation denken wir uns bereits durchgeführt, so dass nunmehr also eine der Determinanten R von Null verschieden sein muss, es sei denn, dass überhaupt sämmtliche Coefficienten der ersten Zeile mit Ausnahme von (1, 1) durchgehend Null sind, für welchen Fall jedoch der in diesem Paragraphen zu beweisende Satz unmittelbar gültig ist.

Setzen wir jetzt:

$$(8) \qquad \sum_{i=2}^{r} a^{(\lambda)}_{1i} z_i = y_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \dots r-1),$$

so sind die so definirten $r - 1$ Grössen y in Folge von $R \neq 0$ linear unabhängig. Diese Grössen y unterwerfen wir nun der, als allgemein angenommenen, Substitution B der Gruppe G. Man erhält:

$$y'_{\lambda+1} = \sum_{i=2}^{r} a^{(\lambda)}_{1i} z'_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{r} a^{(\lambda)}_{1i} b_{ik} z_k \quad (\lambda = 1, 2, \dots r-1).$$

Aber in dem letzten Ausdruck verschwinden die Coefficienten von $z_{r+1}, z_{r+2}, \dots z_n$ in Folge der Gleichungen (6); also ergiebt sich

$$(9) \qquad y'_{\lambda+1} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=2}^{r} a^{(\lambda)}_{1i} b_{ik} z_k \quad (\lambda = 1, 2, \dots r-1).$$

Drückt man nun mittelst (8) $z_2, z_3, \dots z_r$ durch $y_2, y_3, \dots y_r$ aus, und setzt in (9) ein, schreibt ferner der Gleichförmigkeit wegen noch y_1 statt x_1, so erscheint $y_1', y_2', \dots y_r'$ in jeder Substitution von G als lineare Function von $y_1, y_2, \dots y_r$ allein. Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Ist in einer endlichen oder unendlichen linearen Substitutionsgruppe mindestens ein nicht in der Hauptdiagonale befindlicher Coefficient durchgehend Null, so lässt sich die Gruppe stets so transformiren, dass sich eine geringere Anzahl von Substitutionsvariabelen absondern lässt, welche nur unter sich substituirt werden.

Schematisch lässt sich also die Matrix einer jeden Substitution der so transformirten Gruppe folgendermassen darstellen:

$$(10) \qquad \begin{array}{c|c} Q_1 & R_1 \equiv 0 \\ \hline R_2 & Q_2 \end{array},$$

wo Q_1 und Q_2 Quadrate aus resp. r^2 und $(n-r)^2$ Elementen, R_1 ein Rechteck aus r Zeilen und $n-r$ Colonnen bedeutet, dessen sämmtliche Elemente Null sind, R_2 endlich ein Rechteck aus $n-r$ Zeilen und r Colonnen. Hierbei ist r irgend eine der Zahlen von 1 bis $n-1$.

§ 3.

Im Folgenden nehmen wir an, dass die soeben beschriebene Transformation der Gruppe vollzogen, dass also jede ihrer Substitutionen, die wir nun wiederum in den Variabelen z schreiben, in der Form (10) gegeben sei. Ich habe jetzt des Weiteren zu beweisen, dass, falls die Ordnung unserer Gruppe endlich ist, was wir nunmehr annehmen, durch eine neue Transformation sich bewirken lässt, dass auch die in dem Rechteck R_2 befindlichen Elemente durchgehend Null werden.

Zu diesem Zwecke transformire ich die Gruppe in die Hermite'sche Normalform*), aber so, dass die schon in R_1 befindlichen durchgehenden Nullen nicht zerstört werden. Dies lässt sich in folgender Weise erreichen. Ich setze:

$$(11) \qquad \begin{cases} z_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \ldots r), \\ z_i = y_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik} y_k \quad (i = r+1, r+2, \ldots n). \end{cases}$$

Sei jetzt

$$(12) \qquad H = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k \quad (\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ik})$$

eine für die Gruppe invariante Hermite'sche Form. Hierin mache man die Substitution (11) und berechne die Coefficienten von

$$\bar{y}_{r+1}, \bar{y}_{r+2}, \ldots \bar{y}_n.$$

Man findet als Coefficienten von $\bar{y}_\mu$ folgenden Ausdruck:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i\mu} \lambda_{ik} y_k + \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k\mu} y_k \quad (\mu = r+1, \ldots n).$$

Ich suche nun die Grössen λ_{ik} so zu bestimmen, dass in den $n-r$ Ausdrücken (13) die Coefficienten von $y_1, y_2, \ldots y_r$ Null werden. Dies erfordert die Lösung der folgenden $n-r$ Gleichungen in Bezug auf die n Unbekannten $u_1, u_2, \ldots u_n$:

---

*) Siehe das in diesen Annalen Bd. 50, pag. 497 gegebene Citat.

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\mu} u_i = 0 \quad (\mu = r+1, \dots n).$$

Wie immer auch die $\alpha_{i\mu}$ beschaffen sein mögen, so lässt sich diesen Gleichungen stets durch $n-(n-r)=r$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$(15) \qquad u_i = \lambda_{ik} \quad (i=1, \dots n;\ k=1, \dots r)$$

genügen. Es giebt also unter den Determinanten r^{ten} Grades dieser $n.r$ Grössen λ_{ik} sicher eine, welche nicht verschwindet. Sei dies die Determinante $|\lambda_{ik}|$ für $i, k = 1, 2, \dots r$. Die mit diesen so gewählten Werthen der λ_{ik} gebildeten Grössen (11) sind alsdann erstens linear unabhängig, zweitens werden durch ihre Einführung die in R_1 befindlichen durchgehenden Nullen nicht afficirt, und endlich wird durch (11) die Form (12), wie aus (13) (14) und (15) folgt, in folgende Form transformirt:

$$(16) \qquad H = \sum_{i,k=1}^{r} \beta_{ik} y_i \bar{y}_k + \sum_{i,k=r+1}^{n} \beta_{ik} y_i \bar{y}_k.$$

Nunmehr kann durch lineare Transformation der $y_1, \dots y_r$ unter sich, als auch der $y_{r+1}, \dots y_n$ unter sich bewirkt werden, dass sowohl der erste, als auch der zweite Summand von H in (16) in die Normalform übergeführt wird (wobei wiederum die in R_1 befindlichen Nullen nicht afficiert werden), H also die Normalform

$$H = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i$$

annimmt.

Nunmehr folgt, dass in der so transformirten, in den x_i geschriebenen Gruppe auch sämmtliche in dem Rechteck R_2 befindlichen Coefficienten ohne Weiteres durchgehend Null sein müssen. Da nämlich die Gruppe jetzt auf die Hermite'sche Normalform reducirt ist, so muss in jeder Substitution jeder Coefficient gleich dem conjugirten Werth des Quotienten seiner Unterdeterminante $n-1^{\text{ten}}$ Grades durch die Substitutionsdeterminante sein*). Bildet man aber die Unterdeterminanten $n-1^{\text{ten}}$ Grades der in dem Rechteck R_2 befindlichen Elemente, so sieht man sofort, dass dieselben sämmtlich verschwinden, weil jede derselben die $r(n-r)$ Nullen von R_1 enthält. Also muss jedes Element in R_2 durchgehend Null sein. Hiermit ist der im Eingange formulirte Satz bewiesen.

University of Chicago, December 1898.

*) Vgl. l. c. pag. 497.