Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen.

Von

Richard Birkeland in Oslo,

Einleitung.

Wenn eine algebraische Gleichung mit gegebenen willkürlichen Koeffizienten gegeben ist, kann man bekanntlich die Wurzeln durch Reihenentwicklungen nach Potenzen der Koeffizienten bestimmen, indem man die gewöhnliche Methode der impliziten Funktionen anwendet. Diese Reihenentwicklungen, welche im allgemeinen innerhalb eines bestimmten Gebietes konvergieren, sind von einer großen Anzahl von Autoren behandelt worden.

Die Absicht dieser Abhandlungen ist, zu beweisen, daß man diesen Reihenentwicklungen durch Umformung und Einführung von gewissen neuen Variablen, welche sehr einfach von den Koeffizienten abhängen, eine derartige Form geben kann, daß die Wurzeln als eine lineare Kombination einer bestimmten Anzahl hypergeometrischer Funktionen von mehreren Variablen ausgedrückt werden[1]).

Im folgenden benutzen wir die von Herrn Horn[2]) gegebene Definition der hypergeometrischen Funktionen mehrerer Variablen. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall dreier Variablen, weil daraus die Definition im allgemeinen Fall leicht folgt. Eine Reihe

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum c_{k_1, k_2, k_3}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$$

---

[1]) Richard Birkeland, Résolution de l'équation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, Paris C. R. **171** (1920), p. 1370; **172** (1921), p. 309). Sur la convergence des développements qui expriment les racines de l'équation algébrique générale par une somme de fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, Paris C. R. **172** (1921), p. 1155.

[2]) Über die Konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen, Math. Annalen **34** (1889), S. 544.

wird dann ***hypergeometrisch*** genannt, wenn *die Verhältnisse*

$$\text{(I)} \qquad \frac{c_{k_1+1,k_2,k_3}}{c_{k_1,k_2,k_3}}, \quad \frac{c_{k_1,k_2+1,k_3}}{c_{k_1,k_2,k_3}}; \quad \frac{c_{k_1,k_2,k_3+1}}{c_{k_1,k_2,k_3}}$$

gegebene rationale Funktionen von k_1, k_2, k_3 *sind.* In jeder der rationalen Funktionen (I), die in dieser Arbeit vorkommen, sind Zähler und Nenner immer Polynome vom *selben* Grade, welche sich in *lineare* Faktoren von der Form $a k_1 + b k_2 + c k_3 + d$ zerlegen lassen, wo a, b, c und d nicht von k_1, k_2, k_3 abhängen. Wie man sieht, hat man hier als Spezialfall die höheren hypergeometrischen Funktionen einer Variablen[3]). Diese spezielleren hypergeometrischen Funktionen treten bei der Lösung der allgemeinen trinomischen Gleichung auf[4]).

Durch diese Definition scheint mir eine natürlich abgegrenzte Funktionenklasse ausgewählt zu sein. Es gibt bekanntlich auch andere Definitionen der hypergeometrischen Funktionen, so z. B. die von Heymann[5]), Mellin[6]) u. a.[7]). Die so definierten Funktionenklassen scheinen mir nicht so wohl abgegrenzt zu sein und sie fallen auch nicht mit den oben erklärten hypergeometrischen Funktionen zusammen.

---

[3]) Sie sind von Clausen, J. f. Math. **3** (1828), S. 89 u. 92, und Thomae, J. f. Math. **87** (1879), S. 26 in die Analysis eingeführt worden. Über diese Funktionen siehe: Enc. d. Math. W. II **5**, Nr. 19. Wir benutzen die Bezeichnungsweise von E. Goursat: Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Annalen de l'éc. nor. **12** (1883), p. 261 u. 395.

[4]) Richard Birkeland, Resolution de l'équation algébrique trinome par des fonctions hypergéométriques supérieures, Paris C. R. **171** (1920), p. 778; Résolution de l'équation générale du 5e degré, Paris C. R. **171** (1920), p. 1047. Résolution des équations trinomes par une somme de fonctions hypergéométriques supérieures. (Kristiania Videnskapsselskaps Skrifter. Mat. naturv. Klasse 1921, Nr. 3.)

[5]) Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen, Leipzig 1891.

[6]) Zur Theorie der trinomischen Gleichungen, Ann. Ac. Sc. Fennicae, Helsingfors. Ser. A, **7**, Nr. 7, 1915. Ein allgemeiner Satz über algebraische Gleichungen, loc. cit. Nr. 8, 1915. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma, Paris C. R. **172** (1921), p. 658. Über Hrn. Mellins und meine Untersuchungen siehe: Richard Birkeland, Sur la résolution des équations algébriques par une somme de fonctions hypergéométriques, Paris C. R. **177** (1923), p. 23.

[7]) In einer Note (Sur la résolution des équations algébriques, Paris C. R. **179** (1924), p. 432) und auch in einer anderen Arbeit (Rend. del Circolo Math. di Palermo **46** (1922), p. 463) hat Herr Belardinelli einige Untersuchungen von sich und Herrn Capelli erwähnt. Durch Anwendung meiner Methoden auf seine Reihenentwicklungen nach Potenzen der Koeffizienten hat Herr Belardinelli einige meiner Resultate verifiziert. Man sehe auch meine in [6]) erwähnte Note. Paris C. R. **177** (1923), p. 23.

§ 1.

Allgemeine Entwicklungen.

Wir wollen die folgende allgemeine algebraische Gleichung n-ten Grades betrachten

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

in der die Koeffizienten auch komplexe Werte annehmen können. Unter p und q $(p > q)$ wollen wir zwei verschiedene von den Zahlen $0, 1, 2, \dots, n$ verstehen und annehmen, daß a_{n-p} und a_{n-q} beide von Null verschieden sind. Wir bezeichnen ganz allgemein mit $-u_\alpha$ das Verhältnis $a_{n-\alpha} : a_{n-p}$. Durch Einführung von

$$x = z\, u_q^{\frac{1}{p-q}}; \qquad l_i = u_{m_i} u_q^{\frac{m_i - p}{p-q}} \qquad (i = 1, 2, \dots, s)$$

kann die Gleichung (1) auch die Form

$$(1') \qquad z^p = z^q + l_1 z^{m_1} + l_2 z^{m_2} + \dots + l_s z^{m_s}$$

gebracht werden, wo $m_1, m_2, \dots, m_s$ ganze positive Zahlen sind, jedoch so, daß $m_1 = 0$ wenn $q > 0$.

Man kann nun Lagranges Formel anwenden, um eine Wurzel z von (1′) zu finden, da aber die Entwicklungen für eine beliebige Potenz von z nicht schwieriger werden als die für z, wollen wir gleich eine willkürliche Potenz der Wurzel in eine Reihe entwickeln. Wie bekannt, findet Lagrange, unter gewissen Konvergenzbedingungen, für die Funktion $F(\theta)$ einer Wurzel θ der Gleichung

$$(2) \qquad \theta = y + l f(\theta)$$

die Darstellung

$$(2') \qquad F(\theta) = F(y) + l F'(y) f(y) + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{l^r}{r!} \frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}} [F'(y) f(y)^r].$$

Wenn wir in (2) einführen:

$$z = \theta^{\frac{1}{p-q}}, \qquad f(\theta) = z^{-q}(l_1 z^{m_1} + \dots + l_s z^{m_s}), \qquad y = l = 1,$$

so erhalten wir die Gleichung (1′) in der Form

$$z^{p-q} = 1 + z^{-q}(l_1 z^{m_1} + \dots + l_s z^{m_s}).$$

Es sei γ eine willkürliche Konstante und

$$F(\theta) = z^\gamma = \theta^{\frac{\gamma}{p-q}}.$$

Durch Anwendung des polynomischen Lehrsatzes erhalten wir dann

$$\frac{l^r}{r!}\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}[F'(y)f(y)^r] = \frac{\gamma}{p-q}\, l^r \sum{}' \frac{(\tau, r-1)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\,\alpha_s!}\, l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2}\ldots l_s^{\alpha_s}\, y^{\tau-1},$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ alle ganzen Werte $\geqq 0$ durchlaufen, welche der Bedingung

$$(3) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = r$$

genügen und wo zur Abkürzung

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1), \quad (\lambda, 0) = 1 \qquad (k > 0)$$

gesetzt worden ist. Weiter ist

$$(4) \qquad \tau = \frac{\gamma + v}{p-q} + 1, \qquad v = \sum_{\nu=1}^{s}(m_\nu - p)\alpha_\nu.$$

Nehmen wir dann in (2′) $l = 1$ (dies setzt voraus, daß alle $|l_i|$ genügend klein sind) und $y = 1$, so ist $y^{\frac{1}{p-q}}$ durch eine Potenz ε^i einer primitiven Wurzel ε der Gleichung $x^{p-q} = 1$ und somit $y^{\frac{\gamma}{p-q}}$ durch $\varepsilon^{i\gamma}$ zu ersetzen. Es ergibt sich schließlich

$$(5) \qquad z_i^\gamma = \varepsilon^{i\gamma}\left[1 + \frac{\gamma}{p-q}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s=0}^{\infty} \varepsilon^{iv}\frac{(\tau, r-1)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\, l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2}\ldots l_s^{\alpha_s}\right]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p-q).$$

Hier durchlaufen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ alle möglichen ganzen Werte $\geqq 0$; das Wertsystem $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$ ist jedoch ausgeschlossen.

Wir haben also für die Wurzeln Potenzreihen gewonnen, jedoch vorläufig ohne uns von deren Konvergenz Rechenschaft zu geben, und es soll nun gezeigt werden, wie die Reihe (5) durch Einführung von neuen Variablen in eine lineare Summe von $(p-q)^s$ hypergeometrischen Funktionen zerlegt werden kann. Die Zahlen α_ν können wir immer in der Form

$$(6) \qquad \alpha_\nu = \varkappa_\nu + (p-q)k_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

schreiben, wo $\varkappa_\nu$ der kleinste positive Rest von α_ν in bezug auf den Modul $p-q$ ist. Wir bezeichnen mit $\bar{v}$, $\bar{\tau}$ und $\bar{r}$ die Werte von v, τ und r, für die $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$ ist, und setzen

$$l_\nu^{\alpha_\nu} = l_\nu^{\varkappa_\nu}\eta_\nu^{k_\nu}, \qquad \eta_\nu = l_\nu^{p-q} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Dann können wir die Entwicklungen (5) in der Form

$$(7) \quad z_i^\gamma = \varepsilon^{i\gamma}\left[1 + \frac{\gamma}{p-q}\sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_s=0}^{p-q-1} \varepsilon^{i\bar{v}}\frac{(\bar{\tau}, \bar{r}-1)}{\varkappa_1!\ldots\varkappa_s!}\, l_1^{\varkappa_1}\ldots l_s^{\varkappa_s}\,\psi(\gamma, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_s | \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)\right]$$

schreiben, wo:

$$(8)\quad \psi(\gamma, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_s \mid \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s) = \frac{\varkappa_1! \ldots \varkappa_s!}{(\bar{\tau}, \bar{r}-1)} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{\infty} \frac{(\tau, r-1)}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_s!} \eta_1^{k_1}, \eta_2^{k_2}, \ldots, \eta_s^{k_s}.$$

Die Summation ist jetzt in folgender Weise ausgeführt: Unter den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-q-1$ wählen wir ein System von Werten für $\varkappa_1$, $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_s$ aus. Danach summieren wir in (8) in bezug auf die Buchstaben $k_1, k_2, \ldots, k_s$, welche wir alle möglichen ganzen Werte ≥ 0 durchlaufen lassen. Jedoch das Wertsystem $k_1 = \ldots = k_s = 0$ auszuschließen, wenn $\varkappa_1 = \ldots = \varkappa_s = 0$. Danach wird in (7) bezüglich der Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s$ summiert. Diese Buchstaben werden alle möglichen verschiedenen Wertsysteme unter den $p-q$ Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-q-1$ annehmen. Wenn $\varkappa_1 = \ldots = \varkappa_s = 0$ ist, wird $(\bar{\tau}, \bar{r}-1)$ gleich 1 gesetzt.

Hiermit haben wir also z_i^{γ} als eine lineare Summe von den $(p-q)^s$ Funktionen ψ dargestellt. Wir werden zeigen, daß *die Funktionen* ψ *hypergeometrische Funktionen von* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ *sind.* Nach der früher gegebenen Definition braucht man nur zu zeigen, daß das Verhältnis R_u zwischen zwei Koeffizienten in (8), die den Potenzen

$$k_1, \ldots, k_{u-1}, k_u, k_{u+1}, \ldots, k_s \quad \text{und} \quad k_1, \ldots, k_{u-1}, k_u+1, k_{u+1}, \ldots, k_s$$

entsprechen, eine rationale Funktion von $k_1, k_2, \ldots, k_s$ ist. Setzt man daher:

$$A_{k_1, \ldots, k_u, \ldots, k_s} = \frac{(\tau, r-1)}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_s!} = \frac{\Gamma(\tau+r-1)}{\Gamma(\tau)} \frac{1}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_s!},$$

$$A_{k_1, \ldots, k_u+1, \ldots, k_s} = \frac{(\tau', r'-1)}{\alpha_1'! \, \alpha_2'! \ldots \alpha_s'!},$$

so ist

$$R_u = \frac{A_{k_1, \ldots, k_u+1, \ldots, k_s}}{A_{k_1, \ldots, k_u, \ldots, k_s}} = \frac{\Gamma(\tau+r-1+m_u-q)}{\Gamma(\tau+r-1)} \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau+m_u-p)} \frac{1}{(\alpha_u+1, p-q)}.$$

Wenn man nämlich in $A_{k_1, \ldots, k_u, \ldots, k_s}$ den Index k_u in k_u+1 übergehen läßt, während alle anderen k unverändert bleiben, so wird nach (3), (4) und (6)

$$\tau' = \tau + m_u - p, \qquad \alpha_u' = \alpha_u + p - q, \qquad r' = r + p - q,$$

während übrigens

$$\alpha_i' = \alpha_i \qquad (i \gtrless u).$$

Man behandelt nun am einfachsten die folgenden drei Möglichkeiten getrennt:

Fall I:

$$m_u \geq p > q; \qquad R_u = \frac{(\tau+r-1, m_u-q)}{(\tau, m_u-p)(\alpha_u+1, p-q)}.$$

Fall II:

$$p > m_u \geqq q; \qquad R_u = \frac{(\tau + m_u - p,\ p - m_u)(\tau + r - 1,\ m_u - q)}{(\alpha_u + 1,\ p - q)}.$$

Fall III:

$$p > q > m_u; \qquad R_u = \frac{(\tau + m_u - p,\ p - m_u)}{(\tau + r - 1 + m_u - q,\ q - m_u)(\alpha_u + 1,\ p - q)}.$$

In jedem Falle sind hiernach Zähler und Nenner *feste* Polynome vom selben Grade bezüglich $k_1, k_2, \ldots, k_s$. Unsere Behauptung ist damit bewiesen. Die Gradzahlen sind in Fall I: $m_u - q$; Fall II: $p - q$; Fall III: $p - m_u$.

Wird speziell $p = n$, $q = 0$ gewählt, so findet man aus (7) alle Wurzeln. Setzt man $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$, so sieht man, daß *jede rationale Funktion der Wurzel z als lineare Kombination von hypergeometrischen Funktionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ dargestellt werden kann.*

Wir können die Verhältnisse R_u noch etwas umformen, wodurch die Ähnlichkeit mit den höheren hypergeometrischen Funktionen einer Variablen mehr hervortritt. So erhält man

$$(9) \qquad R_u = \frac{(k_u + A_1)(k_u + A_2)\ldots(k_u + A_\alpha)}{(k_u + 1)(k_u + B_1)\ldots(k_u + B_{\alpha-1})}\, p_u,$$

wo α gleich $m_u - q$ in Fall I, bzw. gleich $p - q$ und $p - m_u$ in Fall II und III ist, und wo $A_1, \ldots, A_\alpha$, $B_1, \ldots, B_{\alpha-1}$ nicht von k_u abhängen; sie sind lineare Funktionen von den anderen k. Der Faktor p_u ist gleich

$$(10) \qquad p_u = (m_u - q)^{m_u - q}(m_u - p)^{p - m_u}(p - q)^{q - p}.$$

Wenn man in ψ alle η_i gleich Null setzt, η_u ausgenommen, so muß man in R_u (siehe (9)) alle k_i gleich Null setzen, k_u ausgenommen. Alle hypergeometrischen Funktionen $\psi(\gamma, \varkappa_u \mid \eta_u)$ von η_u sind dann nach (9) höhere hypergeometrische Funktionen von

$$(11) \qquad \zeta_u = \eta_u\, p_u$$

(siehe (10)), wenn $\varkappa_u > 0$. Eine einfache Untersuchung zeigt, daß für die Funktion

$$1 + \frac{\gamma}{p - q}\psi(\gamma, 0 \mid \eta_u)$$

dasselbe gilt.

§ 2.

Konvergenzbedingungen.

Dem gewöhnlichen Satz über implizite Funktionen zufolge sind die vorstehenden Entwicklungen für hinreichend kleine absolute Werte der l_i oder η_i absolut konvergent oder, wenn die durch (11) und (10) definierten

Veränderlichen ζ_i eingeführt werden, für hinreichend kleine absolute Werte der ζ_i. Wenn $s-1$ dieser Größen, z. B. $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_s$, gleich Null sind, wird ψ eine höhere hypergeometrische Funktion von ζ_1 allein. Diese Reihe konvergiert[8]) aber für $|\zeta_1| < 1$ und divergiert für $|\zeta_1| > 1$. Hieraus wird nach und nach abgeleitet, daß

$$|\zeta_1| < 1, \quad |\zeta_2| < 1, \quad \ldots, \quad |\zeta_s| < 1$$

eine notwendige Bedingung für die Konvergenz ist. Will man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz bestimmen, so kann man das von J. Horn[9]) angegebene Verfahren anwenden.

Es wird von Interesse sein, eine sehr einfache, aber hinreichende Bedingung der Konvergenz zu geben. Wir wollen mit m die größte der Zahlen $|m_\nu - p|$ bezeichnen und die folgende trinomische Gleichung betrachten:

$$(11') \qquad z^{p-q} = 1 + z^{-q}(|l_1| z^{m+p} + |l_2| z^{m+p} + \ldots + |l_s| z^{m+p}).$$

Es sei t der dem τ (siehe (4)) hier entsprechende Wert. Dann ist

$$t = \frac{1}{p-q}\left(\gamma + m \sum_1^s \alpha_\nu\right) + 1.$$

Wenn $\sum \alpha_\nu$ hinreichend groß ist, wird $t > |\tau|$. Konvergiert daher diese Entwicklung nach Potenzen von $|l_1|, |l_2|, \ldots, |l_s|$, so werden auch die Reihen (5) konvergieren. Setzt man

$$D = |l_1| + |l_2| + \ldots + |l_s|,$$

so wird später gezeigt werden, daß die Wurzeln der trinomischen Gleichung (11') als eine Summe von höheren hypergeometrischen Funktionen von

$$\zeta = \frac{(m+p-q)^{m+p-q}}{m^m (p-q)^{p-q}} D^{p-q}$$

ausgedrückt werden kann, wenn $|\zeta| < 1$. Wir haben folglich als *hinreichende* Bedingung für die Konvergenz der Reihe (5)

$$(12) \qquad |l_1| + |l_2| + \ldots + |l_s| < \frac{p-q}{m+p-q} \, \frac{1}{\left(1 + \frac{p-q}{m}\right)^{\frac{m}{p-q}}}$$

Man kann immer eine algebraische Funktion durch eine Summe von hypergeometrischen Funktionen ausdrücken. Wenn man nämlich bei der gegebenen Gleichung durch passende Wahl von p und q keine konvergenten Entwicklungen bekommt, so führe man eine Tschirnhausentransformation

$$y_i = c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \ldots + c_{n-1} x_i^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[8]) E. Goursat, loc. cit.

[9]) Siehe [2]).

aus. Bekanntlich läßt sich immer durch geeignete Wahl der unbestimmten Größen $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ erreichen, daß die Koeffizienten in der Gleichung, welcher $y_1, y_2, \ldots, y_n$ genügen, willkürlich gegebene Zahlen werden, daß sie also z. B. der Ungleichung (12) genügen. Zwar ist es für die Bestimmung der Zahlen c nötig, Gleichungen höheren Grades zu lösen. Aus der Lösbarkeit dieser Gleichungen folgt aber, daß man auch, ohne diese Lösung vollständig auszuführen, die Bedingung (12) erfüllen kann.

§ 3.

Die trinomische Gleichung.

Wir schreiben die trinomische Gleichung in der Form

$$x^n = g x^s + \beta, \tag{13}$$

worin g und β Koeffizienten sind und $n > s$. In (7) setzen wir $p = n$, $q = s$, $m_1 = 0$ und erhalten dann

$$x = z g^{\frac{1}{n-s}}, \qquad l_1 = l = \beta g^{-\frac{n}{n-s}}, \qquad l_2 = \ldots = l_s = 0, \qquad \eta_1 = l_1^{n-s}.$$

Weiter ist (siehe (11))

$$\zeta_1 = \zeta = (-1)^{n-s} \frac{n^n}{s^s (n-s)^{n-s}} \frac{\beta^{n-s}}{g^n}, \qquad \zeta_2 = \ldots = \zeta_s = 0. \tag{14}$$

Wir bekommen dann für $|\zeta| < 1$ die $n - s$ Wurzeln durch

$$x_i^\gamma = g^{\frac{\gamma}{n-s}} \varepsilon^{i\gamma} \left[F_0(\zeta) + \frac{\gamma}{n-s} \sum_{\varkappa=1}^{n-s-1} \varepsilon^{-i n \varkappa} \mu_\varkappa l^\varkappa F_\varkappa(\zeta) \right] \tag{15}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-s)$$

ausgedrückt, worin

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{n-s}\sqrt{-1}}, \quad \mu_1 = 1, \qquad \mu_\varkappa = \frac{1}{\varkappa} \binom{\frac{\gamma - s\varkappa}{n-s} - 1}{\varkappa - 1}$$

gesetzt ist, unter Benutzung der gewöhnlichen Abkürzung für die binomischen Koeffizienten. Ferner ist in der Bezeichnungsweise von Goursat (loc. cit.)

$$F_\varkappa(\zeta) = F\begin{pmatrix} a_{1,\varkappa}, \ldots, a_{n-1,\varkappa}, a_{n,\varkappa} \\ b_{1,\varkappa}, \ldots, b_{n-1,\varkappa}, \zeta \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{i,\varkappa} &= \frac{\varkappa}{n-s} + \frac{n-i}{n} - \frac{\gamma}{n(n-s)} & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ b_{i,\varkappa} &= \frac{\varkappa}{n-s} + \frac{s-i+1}{s} - \frac{\gamma}{s(n-s)} & (i = 1, 2, \ldots, s), \\ b_{i,\varkappa} &= \frac{\varkappa}{n-s} + \frac{i-s}{n-s} + \frac{\delta_i}{n-s} & (i = s+1, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{16}$$

und

(16') $\delta_i = 0$, wenn $i < n - \varkappa$, $\delta_i = 1$, wenn $i \geqq n - \varkappa$.

Die höheren hypergeometrischen Funktionen $F_\varkappa(\zeta)$ von ζ sind folglich im allgemeinen von der Ordnung n. Wir können beweisen, daß sie sich im Falle $\gamma = 1$ auf solche von der Ordnung $n-1$ reduzieren.

Bisher sind nur $n - s$ von den n Wurzeln gefunden. Die s übrigen Wurzeln können leicht bestimmt werden. Wir wählen nämlich in (7) $p = s$, $q = 0$, $m_1 = n$ und erhalten

$$x = z(-l)^{\frac{1}{s}} g^{\frac{1}{n-s}}, \qquad l_1 = \lambda = (-l)^{\frac{n-s}{s}} = (-\beta)^{\frac{n-s}{s}} g^{-\frac{n}{s}}$$

Weiter findet man $\zeta_1 = \zeta$ wie in (14). Wir erhalten dann auch die übrigen s Wurzeln unter der Bedingung $|\zeta| < 1$:

$$(17) \qquad x^\gamma_{n-s+i} = (-l)^{\frac{\gamma}{s}} g^{\frac{\gamma}{n-s}} \delta^{i\gamma} \left[\varphi_0(\zeta) + \frac{\gamma}{s} \sum_{\varkappa=1}^{s-1} \delta^{in\varkappa} \Delta_\varkappa \lambda^\varkappa \varphi_\varkappa(\zeta)\right]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s),$$

wobei

$$\delta = e^{\frac{2\pi}{s}\sqrt{-1}}, \qquad \Delta_1 = 1, \qquad \Delta_\varkappa = \frac{1}{\varkappa}\binom{\frac{\gamma + n\varkappa}{s} - 1}{\varkappa - 1}.$$

Ferner ist:

$$\varphi_\varkappa(\zeta) = F\begin{pmatrix} d_{1,\varkappa}, & \ldots, & d_{n-1,\varkappa}, & d_{n,\varkappa} \\ e_{1,\varkappa}, & \ldots, & e_{n-1,\varkappa}, & \zeta \end{pmatrix},$$

wo

$$d_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{s} + \frac{i-1}{s} + \frac{\gamma}{sn} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$e_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{s} + \frac{i}{n-s} + \frac{\gamma}{s(n-s)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-s),$$

$$e_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{s} + 1 + \frac{i-n}{s} + \frac{\delta_i}{s} \qquad (i = n-s+1, \ldots, n-1),$$

und δ_i durch (16') gegeben ist.

Die Entwicklungen (15) und (17) konvergieren für $|\zeta| < 1$ und divergieren für $|\zeta| > 1$. Wir werden nun zum Schluß die Wurzeln im Falle $|\zeta| > 1$ bestimmen. In (7) setzen wir $p = n$, $q = 0$, $m_1 = s$ und erhalten dann

$$x = z\beta^{\frac{1}{n}}, \qquad l_1 = \varrho = g\beta^{-\frac{n-s}{n}}, \qquad l_2 = l_3 = \ldots = l_s = 0.$$

Weiter ist (siehe (11))

$$\zeta_1 = (-1)^{n-s} \frac{s^s (n-s)^{n-s}}{n^n} \frac{g^n}{\beta^{n-s}} = \frac{1}{\zeta},$$

also der inverse Wert von der durch (14) bestimmten Größe ζ. Hieraus folgt, daß $|\zeta_1| < 1$, wenn $|\zeta| > 1$ ist, so daß die entsprechenden Entwicklungen konvergieren:

$$(18) \qquad x_i^\gamma = \beta^{\frac{\gamma}{n}} \nu^{i\gamma}\left[\psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{\gamma}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n-1} \nu^{is\varkappa}\theta_\varkappa \varrho^\varkappa \psi_\varkappa\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

in denen

$$\nu = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}, \qquad \theta_1 = 1, \qquad \theta_\varkappa = \binom{\frac{\gamma + s\varkappa}{n} - 1}{\varkappa - 1}.$$

Ferner ist:

$$\psi_\varkappa\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\begin{pmatrix} g_{1,\varkappa}, \ldots, g_{n-1,\varkappa}, g_{n,\varkappa} \\ h_{1,\varkappa}, \ldots, h_{n-1,\varkappa}, \frac{1}{\zeta} \end{pmatrix}$$

und

$$g_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{n} + \frac{i-1}{s} + \frac{\gamma}{ns} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

$$g_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{n} + \frac{n-i}{n-s} - \frac{\gamma}{n(n-s)} \qquad (i = s+1, \ldots, n),$$

$$h_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa + i}{n} + \frac{\delta_i}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

wo δ_i immer durch (16') gegeben ist.

§ 4.

Die Wurzeln der trinomischen Gleichung sind, als Funktionen von ζ aufgefaßt, partikuläre Integrale einer höheren hypergeometrischen Differentialgleichung.

Wird (14) nach β aufgelöst, so ergibt sich

$$\beta = K\zeta^{\frac{1}{n-s}},$$

wo K eine Konstante ist, wenn man β und ζ als Variablen auffaßt. Die Formeln (15) werden von der Form

$$x_i^\gamma = \sum_{\varkappa=0}^{n-s-1} A_{i,\varkappa}\zeta^{\frac{\varkappa}{n-s}} F_\varkappa(\zeta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-s),$$

worin die Koeffizienten A nicht von ζ abhängen. Wenn diese nun partikuläre Integrale einer höheren hypergeometrischen Differentialgleichung n-ter Ordnung sein sollen, müssen sie von der folgenden Form[10]) sein:

[10]) E. Goursat, loc. cit., S. 280.

$$x_i^\gamma = B_i F\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \\ b_1, \ldots, b_{n-1}, \zeta \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{h=1}^{n-1} B_{i,h}\zeta^{1-b_h} F\begin{pmatrix} a_1+1-b_h,\ a_2+1-b_h,\ \ldots,\ a_{n-1}+1-b_h,\ a_n+1-b_h \\ 2-b_h,\ b_1+1-b_h,\ \ldots,\ b_{n-1}+1-b_h,\ \zeta \end{pmatrix},$$

worin die Größen B Konstanten sind. Also muß erstens

$$F_0(\zeta) = F\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \\ b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, \zeta \end{pmatrix}$$

d. h. (siehe (16))

$$a_i = a_{i,0}, \quad b_i = b_{i,0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1); \qquad a_n = a_{n,0}$$

sein, wodurch

$$1 - b_i = \frac{n-i}{n-s} \qquad (i = s+1, \ldots, n-1)$$

wird. Wenn wir $\varkappa = n - i$ setzen, sehen wir, daß

$$\zeta^{\frac{\varkappa}{n-s}} = \zeta^{\frac{n-i}{n-s}} = \zeta^{1-b_i} \qquad (i = s+1, \ldots, n-1).$$

Gleichzeitig nimmt $\varkappa$ die Werte $n-s-1,\ n-s-2, \ldots, 2, 1$ an. Folglich muß

$$F_\varkappa(\zeta) = F_{n-i}(\zeta) = F\begin{pmatrix} a_1+1-b_i,\ a_2+1-b_i, \ldots, a_{n-1}+1-b_i,\ a_n+1-b_i \\ 2-b_i,\ b_1+1-b_i, \ldots, b_{n-1}+1-b_i,\ \zeta \end{pmatrix}$$

sein. Dies ist auch wirklich der Fall. Wir haben nämlich, wenn wir mit (16) vergleichen,

$$\begin{aligned}
a_r\ \ +1-b_i &= a_{r,\,n-i} \qquad && (r = 1, 2, \ldots, n),\\
b_r\ \ +1-b_i &= b_{r,\,n-i} && (r = 1, 2, \ldots, s),\\
b_r\ \ +1-b_i &= b_{r,\,n-i} && (r = s+1, \ldots, i-1),\\
b_{r+1}+1-b_i &= b_{r,\,n-i} && (r = i, \ldots, n-2),\\
2-b_i &= b_{n-1,\,n-i}.
\end{aligned}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Durch kontinuierliche Änderung von ζ können wir aus einer der Größen

$$x_1^\gamma, x_2^\gamma, \ldots, x_{n-s}^\gamma$$

auch die Wurzeln

$$x_{n-s+1}^\gamma, \ldots, x_n^\gamma$$

erhalten. *Folglich werden $x_1^\gamma, x_2^\gamma, \ldots, x_n^\gamma$, als Funktionen von ζ aufgefaßt, partikuläre Integrale einer höheren hypergeometrischen Differentialgleichung von der Ordnung n, welche durch die $2n-1$ Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ völlig bestimmt ist.* Aus

$$\sum_1^{n-1} b_i - \sum_1^n a_i = \tfrac{1}{2} > 0$$

folgt, daß die Entwicklungen (15) und (17) auch für $\zeta = 1$ konvergieren.

Ist insbesondere $\gamma = 1$, so kann man, sofern n und s relativ prim sind, eine positive ganze Zahl $i_0 < n$ und eine ebensolche Zahl i_1 $(1 < i_1 \leqq s)$ so bestimmen, daß

$$a_{i_0, \varkappa} = b_{i_1, \varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n - s - 1).$$

Die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, als Funktionen von ζ aufgefaßt, sind also partikuläre Integrale einer höheren hypergeometrischen Differentialgleichung von der Ordnung $n - 1$.

Man kann auch die Gruppe der betrachteten Differentialgleichung angeben.

§ 5.

Spezielle Gleichungen.

Die Gleichung *fünften Grades* läßt sich bekanntlich durch elementare Methoden in eine trinomische Gleichung überführen. Bringt man z. B. die Gleichung fünften Grades in die Form

$$x^5 = x^2 + \beta,$$

so wird $n = 5$, $s = 2$ und[11])

$$\zeta = -\frac{5^5}{2^2 3^3} \beta^3.$$

Wir erhalten dann aus (15) und (17), wenn $|\zeta| < 1$ und $\gamma = 1$,

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varepsilon F_0(\zeta) + \varepsilon^2 \tfrac{1}{3} \beta F_1(\zeta) - \tfrac{1}{3} \beta^2 F_2(\zeta), \\
x_2 &= \varepsilon^2 F_0(\zeta) + \varepsilon \tfrac{1}{3} \beta F_1(\zeta) - \tfrac{1}{3} \beta^2 F_2(\zeta), \\
x_3 &= F_0(\zeta) + \tfrac{1}{3} \beta F_1(\zeta) - \tfrac{1}{3} \beta^2 F_2(\zeta), \\
x_4 &= \tfrac{1}{2} \beta^2 F_2(\zeta) - (-\beta)^{\frac{1}{2}} F_3(\zeta), \\
x_5 &= \tfrac{1}{2} \beta^2 F_2(\zeta) + (-\beta)^{\frac{1}{2}} F_3(\zeta),
\end{aligned}$$

worin

$$F_0(\zeta) = F\begin{pmatrix} -\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{8}{15}, \frac{11}{15} \\ \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \zeta \end{pmatrix}, \qquad F_1(\zeta) = F\begin{pmatrix} \frac{4}{15}, \frac{7}{15}, \frac{13}{15}, \frac{16}{15} \\ \frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \zeta \end{pmatrix},$$

$$F_2(\zeta) = F\begin{pmatrix} \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5} \\ \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \zeta \end{pmatrix}, \qquad F_3(\zeta) = F\begin{pmatrix} \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10} \\ \frac{7}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \zeta \end{pmatrix}$$

[11]) Den Fall $n = 5$, $s = 1$ findet man in meinen unter [4]) zitierten Arbeiten behandelt.

gesetzt ist und ε eine primitive Wurzel der Gleichung $x^3 = 1$ bezeichnet. Im Falle $|\zeta| > 1$ werden die fünf Wurzeln durch (18) gegeben:

$$x_i = \beta^{\frac{1}{5}} \left[\nu^i \psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{5} \nu^{3i} \beta^{-\frac{3}{5}} \psi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{1}{125} \nu^{2i} \beta^{-\frac{9}{5}} \psi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{625} \nu^{4i} \beta^{-\frac{12}{5}} \psi_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Dabei ist

$$\psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\begin{pmatrix} -\frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{4}{15} \\ \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{\zeta} \end{pmatrix}, \qquad \psi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\begin{pmatrix} \frac{2}{15}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \frac{7}{15} \\ \frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{\zeta} \end{pmatrix},$$

$$\psi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\begin{pmatrix} \frac{8}{15}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{13}{15} \\ \frac{8}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{\zeta} \end{pmatrix}, \qquad \psi_3\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\begin{pmatrix} \frac{11}{15}, \frac{9}{10}, \frac{7}{5}, \frac{16}{15} \\ \frac{9}{5}, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{1}{\zeta} \end{pmatrix}$$

und ν eine primitive Wurzel der Gleichung $x^5 = 1$.

Bei Gleichungen dritten Grades

$$x^3 = g x + \beta$$

liefert die hier gegebene Methode das interessante Ergebnis, daß man die drei Wurzeln als eine Summe von Gaußschen hypergeometrischen Funktionen von

$$\zeta = \frac{27}{4} \frac{\beta^2}{g^3}$$

ausdrücken kann. So findet man für $|\zeta| < 1$ und $\zeta = 1$

$$x_i = \sqrt{g} \left[(-1)^{3i} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \zeta\right) + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\zeta}{3}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \zeta\right)\right] \qquad (i = 1, 2),$$

$$x_3 = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{g\zeta}{3}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \zeta\right),$$

und für $|\zeta| > 1$

$$x_i = \sqrt{\frac{g}{3}} \left[\nu^i 2^{\frac{1}{3}} \zeta^{\frac{1}{6}} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{\zeta}\right) + \nu^{2i} 2^{-\frac{1}{3}} \zeta^{-\frac{1}{6}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{\zeta}\right)\right]$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

wo ν eine primitive Wurzel der Gleichung $x^3 = 1$ darstellt.

(Eingegangen am 27. August 1925.)