Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus*).

Von

Serge Bernstein in Charkow.

1. Die vorliegende Arbeit enthält den Beweis und einige Anwendungen eines Theorems meiner Note „Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard“ [1]).

Das geometrische Theorem, welches ich hier beweisen will, lautet wie folgt:

Eine Fläche $z = f(x, y)$, welche für alle Werte von x, y stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt, und deren Gaußsche Krümmung nirgends positiv ist, jedoch nicht identisch verschwindet, kann nicht ständig zwischen zwei festen Ebenen $z = \pm h$ verlaufen.

Aus diesem Theorem folgt für die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus leicht der nachstehende sehr allgemeine Satz:

Ist $z(x, y)$ eine beschränkte Funktion, die für alle Werte von x, y stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt und einer Differentialgleichung der Form

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \tag{1}$$

genügt, wo A, B, C endliche Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t sind, für welche $AC - B^2 > 0$ gilt, so ist die Funktion $z(x, y)$ eine Konstante.

Dieser Satz ist augenscheinlich eine Verallgemeinerung des grund-

---

*) Die vorliegende Note ist die Übersetzung des bereits im Jahre 1914 in den Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Charkow erschienenen Aufsatzes „Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique.“ Für die freundliche Übersetzung sind die Schriftleitung und der Verfasser Herrn Tibor Radó in Szeged zu Dank verpflichtet.

[1]) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 10. Oktober 1910.

legenden Liouvilleschen Theorems über harmonische Funktionen und umfaßt offenbar auch den Fall der Minimalflächen. Jedoch ermöglicht die besondere Form der Differentialgleichung dieser Flächen einen kleinen rechnerischen Kunstgriff, durch welchen ich eine besondere Eigenschaft der Minimalflächen begründe, wodurch sich dieselben wesentlich von den harmonischen Flächen unterscheiden. Diese Eigenschaft besteht im folgenden.

Eine reelle Minimalfläche $z = f(x, y)$, welche für alle reellen Werte von x, y stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt, ist eine Ebene. Mit anderen Worten: die Funktion z, die bekanntlich analytisch ist, muß in jedem anderen Falle reelle Singularitäten im Endlichen haben; während also die Mannigfaltigkeit der ganzen (rationalen und transzendenten) harmonischen Funktionen so groß ist, gibt es eine einzige ganze Funktion, die der Gleichung der Minimalflächen

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0$$

genügt, nämlich die lineare Funktion $z = ax + by + c$.

2. Wir wollen mit dem Beweis eines Lemmas beginnen, welches wir in der Folge oft anwenden werden:

Lemma. *Sei $\mathfrak{B}$ ein abgeschlossenes Gebiet. Darin sei $z = f(x, y)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen x, y, welche stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt, und $z < 0$ im Innern, sowie $z = 0$ in den Randpunkten von $\mathfrak{B}$. Ferner sei in allen Punkten, wo bei einem beliebig kleinen, aber festen positiven N die Ungleichung $p^2 + q^2 < N$ gilt,*

$$rt - s^2 \leqq 0.$$

Dann kann das Gebiet $\mathfrak{B}$ nicht beschränkt sein.

In der Tat, aus der Annahme der Beschränktheit des Gebietes $\mathfrak{B}$ würde folgen, daß die Funktion z ein absolutes Minimum $m < 0$ in einem inneren Punkte $\mathfrak{B}$ erreicht, wo dann $p = q = 0$ ist. Wird dieser Punkt O zum Anfangspunkt gewählt, so kann man, da im Punkte O notwendig $rt - s^2 = 0$ ist, setzen

$$z = m + (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + 2\varepsilon_2 xy + \varepsilon_3 y^2),$$

wo α, β Konstanten sind (die auch verschwinden können), und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ mit $x^2 + y^2$ gegen Null gehen. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$z_1 = m + \frac{h}{2}(x^2 + y^2), \qquad (h > 0),$$

wo wir durch hinreichend kleine Wahl von h erreichen können, daß in allen Punkten von $\mathfrak{B}$ die Ungleichungen $z_1 < 0$ und $h^2(x^2 + y^2) < N$ bestehen.

Dann hat man in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$

$$\delta = z - z_1 > 0.$$

Ist nun h fest gewählt, so kann man den Punkt O mit einem hinreichend kleinen Kreise umgeben, in welchem wenigstens ein Punkt liegt, wo

$$(2) \qquad \delta = (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - h)x^2 + \varepsilon_2 xy + \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - h)y^2 < 0.$$

Die Funktion δ wird also ebenfalls ein absolutes Minimum im Innern von $\mathfrak{B}$ annehmen, und in demjenigen Punkte, wo dieses Minimum erreicht wird, hat man

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \geqq 0, \quad \frac{\partial\delta}{\partial x} = \frac{\partial\delta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} \geqq 0, \quad \frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} \geqq 0,$$

woraus folgt

$$rt - s^2 = \left[h + \frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right]\left[h + \frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right] - \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

$$= h^2 + h\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right) + \left[\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \geqq h^2 > 0,$$

und

$$p^2 + q^2 = \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 = h^2(x^2 + y^2) < N.$$

Das Nebeneinanderbestehen beider Ungleichungen widerspricht aber unserer Voraussetzungen, und das Lemma ist bewiesen.

3. Wir können nun zum Beweis unseres geometrischen Theorems übergehen.

Theorem. *Eine Fläche, die durch eine, für alle Werte von x, y erklärte, zweimal stetig differentiierbare Funktion $z = f(x, y)$ dargestellt wird, und deren Gaußsche Krümmung weder positiv ist, noch identisch verschwindet, kann nicht ständig zwischen zwei festen Ebenen $z = \pm h$ enthalten sein.*

In der Tat, es werde angenommen, daß unsere Fläche zwischen den beiden Ebenen $z = \pm h$ enthalten ist. Wir können dann durch geeignete Verlegung des Koordinatensystems erreichen, daß im Anfangspunkte $p_0 = 0$, $q_0 > 0$, $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ wird. Dann hat im Punkte $x = y = 0$ die Berührungsebene unserer Fläche die Gleichung

$$z_1 = q_0 y;$$

diese Berührungsebene schneidet die Fläche in vier getrennten Kurvenzweigen[2]), welche in der Umgebung des Anfangspunktes vier getrennte

[2]) Es genügt die Bemerkung, daß in Polarkoordinaten

$$\delta = z - z_1 = \left(\frac{1}{2}r_0\cos^2\theta + s_0\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}t_0\sin^2\theta + \varepsilon\right)\varrho^2,$$

wo ε und $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}$ mit ϱ gegen Null gehen.

Gebiete $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ der xy-Ebene bestimmen, so daß in Ω_1, Ω_3 die Ungleichung $\delta = z - z_1 < 0$ und in Ω_2, Ω_4 die Ungleichung $\delta > 0$ gilt. Nach Lemma 2 kann keines dieser Gebiete, deren jedes wir durch Hinzufügung seiner Randpunkte $\delta = 0$ erweitern, beschränkt sein.

Andererseits sind die Gebiete Ω_1 und Ω_3 der xy-Ebene notwendig oberhalb der Geraden $y = -\frac{h}{q_0}$ gelegen, weil aus der Voraussetzung $z > -h$ für $y \leqq -\frac{h}{q_0}$ die Beziehung $\delta = z - q_0 y > 0$ folgt; ebenso müssen die Gebiete Ω_2 und Ω_4 unterhalb der Geraden $y = \frac{h}{q_0}$ liegen, wegen $z < h$. Ich behaupte überdies, daß wenigstens eines der beiden Gebiete Ω_1 und Ω_3 ebenfalls unterhalb der Geraden $y = \frac{h}{q_0}$ verbleibt. In der Tat, die Gebiete Ω_1 und Ω_3 können kein zusammenhängendes Gebiet bilden, sonst *könnte man durch den Anfangspunkt* eine geschlossene Kurve in (Ω_1, Ω_3) ziehen, die dann eines der beiden Gebiete Ω_2, Ω_4 im Innern enthalten würde, was nicht möglich ist, weil diese Gebiete nicht beschränkt sind. Wenn also beide Gebiete Ω_1 und Ω_3 Punkte der Geraden $y = \frac{h}{q_0}$ enthalten würden, so müßten auf dieser Geraden auch Randpunkte derselben liegen; dies ist aber unmöglich, weil in den Randpunkten $\delta = z - q_0 y = 0$ ist.

Wir gelangen also zur Folgerung, daß wenigstens eines der beiden Gebiete mit geradem Index und wenigstens eines der beiden Gebiete mit ungeradem Index in der Weise sich ins Unendliche erstreckt, daß es beständig zwischen den beiden Geraden $y = \pm \frac{h}{q_0}$ verbleibt. Wesentlich ist noch die Bemerkung, daß wenigstens eines dieser Gebiete nur nach der einen Seite ins Unendliche zieht. Es seien in der Tat Ω_1 und Ω_2 die beiden Gebiete, die zwischen unseren Geraden liegen und sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken; man kann dann in denselben je eine Linie S_1 bzw. S_2 zeichnen, welche nach beiden Seiten ins Unendliche gehen, und da der Anfangspunkt Randpunkt von Ω_1 und Ω_2 ist, so liegt derselbe zwischen diesen beiden Linien, so daß ein drittes Gebiet sich unmöglich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken kann. Da nun die beiden Gebiete Ω_3 und Ω_4 zwischen S_1 und S_2 gelegen sein müssen, so sind dieselben a fortiori zwischen den Geraden $y = \pm \frac{h}{q_0}$ enthalten, und folglich erstrecken sie sich nur nach der einen Seite ins Unendliche.

Nach dieser Feststellung können wir also annehmen, daß das Gebiet Ω_1 zwischen den beiden Geraden $y = \pm \frac{h}{q_0}$ liegt und sich nur in der positiven x-Richtung ins Unendliche erstreckt. Wir betrachten nun eine Gerade $x = x_0$ der xy-Ebene; in den in Ω_1 enthaltenen Punkten derselben hat man $\delta < 0$. Sei $u(x_0) = \delta(x_0, y_0)$ das absolute Minimum von $\delta(x_0, y)$ für die betrachteten Punkte.

Wir wollen die so erklärte Funktion $u(x)$ für wachsende Werte von x untersuchen. Wir bemerken, daß $u(x) < 0$, daß aber für hinreichend kleine Werte von x die Funktion $u(x)$ beliebig wenig von Null abweicht; man kann folglich zwei Werte x_0, x_0' derart bestimmen, daß $x_0 > x_0'$ und $u(x_0) - u(x_0') < 0$.

Wir können alsdann beweisen, daß für $x_1 > x_0 > x_0'$ die Ungleichung

$$|u(x_1)| \geqq \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'}[u(x_0') - u(x_0)] \tag{3}$$

bestehen muß.

In der Tat, die Ungleichung (3) ist mit Rücksicht auf $u(x) < 0$ der folgenden gleichwertig:

$$-u(x_1) \geqq \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'}[u(x_0') - u(x_0)].$$

Ist jene also nicht erfüllt, so muß man haben

$$-\frac{x_0 - x_0'}{x_1 - x_0'}u(x_1) + u(x_0) - u(x_0') < 0.$$

Die Funktion

$$v(x, y) = -\frac{x - x_0'}{x_1 - x_0'}u(x_1) + \delta(x, y) - u(x_0') \tag{4}$$

wird daher negativ für $x = x_0$, $y = y_0$; es gibt also ein Gebiet $\mathfrak{B}$, wo $v < 0$ ist, und dieses Gebiet ist beschränkt, da $v \geqq 0$ ist für $x = x_0'$, für $x_0' < x < x_1$ mit $\delta = 0$, und für $x = x_1$.

Dies steht aber im Widerspruche mit dem Lemma aus Nr. 2, da

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 = rt - s^2 \leqq 0.$$

Die Ungleichung (3) muß somit erfüllt sein. Wenn aber x_1 hinreichend groß ist, so widerspricht diese Ungleichung der Voraussetzung $|z| < h$.

Das Theorem ist folglich bewiesen.

Wenn wir unser Lemma in seiner allgemeinen Fassung heranziehen, so können wir unser Theorem wie folgt verallgemeinern.

4. Verallgemeinerung. *Eine Fläche, die durch die zweimal stetig differentiierbare Funktion $z = f(x, y)$ dargestellt wird, und deren Gaußsche Krümmung negativ ist in einem gewissen Punkte, wo die Neigung $p^2 + q^2$ der Berührungsebene $= q_0^2 > 0$ ausfällt, und (möglicherweise) positiv nur in solchen Punkten, wo $p^2 + q^2 > N > q_0^2$ ist*[3]*, kann*

[3]) Es würde z. B. genügen, daß die Krümmung in der Umgebung der Punkte, wo $p = q = 0$, nicht positiv ist, und daß in der Umgebung wenigstens eines dieser Punkte die Krümmung negativ wird.

nicht für alle Werte von x, y zwischen zwei festen Ebenen $z = \pm h$ enthalten sein.

In der Tat, die ganze Schlußweise des vorangehenden Beweises bleibt ohne Änderung bestehen bis zur Diskussion der durch (4) gegebenen Funktion $v(x, y)$. Nur können wir nicht mehr die Unmöglichkeit behaupten, daß das Gebiet $\mathfrak{B}$, wo $v < 0$ ausfällt, beschränkt ist. Dieses Gebiet könnte nur dann beschränkt sein, wenn es Punkte enthielte, wo

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| = \left| - \frac{1}{x_1 - x_0} u(x_1) + p \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| = |q - q_0| < \varepsilon,$$

sowie $rt - s^2 > 0$ ist, bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$. In solchen Punkten hat man aber nach Voraussetzung

$$p^2 + q^2 > N,$$

also

$$\left[- \frac{1}{x_1 - x_0'} u(x_1) \pm \varepsilon\right]^2 + (q_0 \pm \varepsilon)^2 > N,$$

und daher

$$u(x_1)| > (x_1 - x_0') \left[\sqrt{N - (q_0 + \varepsilon)^2} - \varepsilon\right], \tag{5}$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$. Man findet also anstatt der Ungleichung (3) die Ungleichung (5); diese letztere widerspricht aber ebenfalls der Tatsache $|z| < h$. Unsere Verallgemeinerung ist folglich bewiesen.

Bemerkung. Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß die Funktionen, die wir untersucht und für welche wir die Unmöglichkeit der Ungleichung $|z| < h$ bewiesen haben, sehr wohl die Bedingung $z < h$ erfüllen können. Es genügt, um sich hiervon zu überzeugen, die durch die Funktion

$$z = h - e^{x - y^2}$$

dargestellte Fläche zu betrachten. Man stellt unmittelbar fest, daß

$$rt - s^2 = -2 e^{2x - 2y^2} < 0$$

für alle Werte von x und y, und daß gleichzeitig

$$z < h.$$

Auch sei bemerkt, daß unser Theorem für solche Flächen, deren Krümmung identisch verschwindet, nicht mehr zu gelten braucht, da die Zylinderfläche $z = e^{-x^2}$ die Bedingung $|z| < 1$ erfüllt.

5. Theorem. *Wenn eine Funktion z, die für alle Werte von x, y zweimal stetig differentiierbar ist und der Gleichung*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \quad \textit{mit} \quad AC - B^2 > 0$$

genügt, wo A, B, C irgendwelche endliche Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t sind, beschränkt ist, so ist dieselbe eine Konstante.

In der Tat, man setze $rt - s^2 = \lambda$. Unsere Gleichung lautet dann

$$Ar + 2Bs + C\frac{s^2+\lambda}{r} = 0;$$

daraus folgt, daß $\lambda \leqq 0$ ist, und daß $\lambda = 0$ nur für $r = s = t = 0$ eintreten kann. Wenn also nirgends $\lambda < 0$ und somit überall $\lambda = 0$ ist, so müssen p und q Konstante sein, welche aber verschwinden müssen, wenn z beschränkt bleibt; z ist also eine Konstante. Wenn aber die Ungleichung $\lambda < 0$ in wenigstens einem Punkte besteht, so kann die Funktion z nach dem vorigen Theorem nicht beschränkt sein.

Das hiermit bewiesene Theorem stellt diejenige Verallgemeinerung des Liouvilleschen Theorems dar, die ich vor vier Jahren ausgesprochen habe.

Aus diesem Theorem werden wir nun einen Satz über Minimalflächen folgern.

6. Theorem. *Wenn eine Minimalfläche S durch die Gleichung*

$$z = f(x, y)$$

dargestellt ist, wobei f für alle reellen Werte von x, y stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt, so ist die Fläche S eine Ebene.

In der Tat, man bilde unter der Voraussetzung

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \tag{6}$$

diejenige Differentialgleichung, welcher $u = \operatorname{arctg} p$ genügt. Wenn man jene Gleichung (6) nach x deriviert[4]), so ergibt sich

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2p(rt - s^2) = 0,$$

oder, indem man t eliminiert,

$$(1+q^2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2pr^2}{1+p^2}\right) - 2pq\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{2prs}{1+p^2}\right)$$
$$+ (1+p^2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{2ps^2}{1+p^2}\right) = 0.$$

---

[4]) Wir nehmen hier die Existenz der Ableitungen dritter Ordnung an; dies folgt aber aus der Tatsache, daß die Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung sogar die Analytizität der Funktion nach sich zieht (vgl. diesbezüglich meine Arbeiten über das Dirichletsche Problem: Math. Annalen 69, S. 132 und Annales de l'École Normale 29, S. 482 und die Arbeit von L. Lichtenstein „Über den analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme", Bulletin de l'Academie des Sciences de Cracovie (1912) S. 915—941).

Offenbar hat man nun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}{1+p^2} - \frac{2pr^2}{(1+p^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}}{1+p^2} - \frac{2psr}{(1+p^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}}{1+p^2} - \frac{2ps^2}{(1+p^2)^2}.$$

Es genügt also u der Gleichung

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

und folglich kann die Funktion $u = \operatorname{arctg} p$ nur dann in der ganzen Ebene beschränkt sein, wenn sie eine Konstante ist. Nun aber wird nach Voraussetzung p für keinen endlichen Wert von x, y unendlich; für alle Werte von x, y hat man folglich $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, woraus folgt, daß u eine Konstante ist. Man erkennt auf diese Weise, daß p und auch q eine Konstante und folglich die Fläche z eine Ebene ist.

(Eingegangen am 23. März 1925.)