Über affine Geometrie XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinen R_4.

Von

C. Burstin in Wien und W. Mayer in Wien.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Abschnitte.

Im ersten Abschnitte wird das Formenproblem der F_2 im affinen R_4 behandelt, im zweiten Abschnitte die Geometrie der F_2 im affinen R_4 und insbesonders der Zusammenhang mit den Strahlensystemen im projektiven R_3. Die Anregung, diesen Zusammenhang herauszuarbeiten, verdanken wir Herrn W. Blaschke. Wir wollen hier kurz den Inhalt des zweiten Abschnittes besprechen.

Im ersten Paragraphen wird die Theorie der Strahlensysteme im projektiven R_3 gebracht. Als ausgeartet werden Strahlensysteme bezeichnet, deren Grundform $B_{pq}\,dy_p\,dy_q$, das ist die Form, deren Nullrichtungen die Torsen des Strahlensystems entsprechen, eine verschwindende Diskriminante besitzt, oder deren Brennfläche einen Mantel hat, der eine Kurve oder eine Torse ist.

Im zweiten Paragraphen werden die Flächen F_2 gesucht, deren Tangentialebenensysteme den R_3^∞ des R_4 in einem gegebenen Strahlensysteme schneiden. Man erhält sie durch Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, somit enthält die allgemeinste dieser Flächen zwei willkürliche Funktionen. Wir nennen eine solche Gesamtheit von Flächen *Parallelflächen* und stellen einige ganz einfache Sätze über Parallelflächen auf. Von größerem Interesse sind die *konjugierten Flächen.*

Bezeichnen wir mit λ^ν und μ^ν die Nullrichtungen der Grundform $B_{pq}\,dy_p\,dy_q$ einer $F_2: x_i(y_1\,y_2)$, [1]) so sind durch sie auf dieser F_2 zwei Kurvenscharen, die λ^ν- und die μ^ν-Nullinien gegeben. Sei nun $\tilde{F}_2: \tilde{x}_i(y_1\,y_1)$ eine zweite F_2, deren Tangentialebene in korrespondierenden Punkten y_1, y_2

[1]) Das ist die Grundform des Strahlensystems, in dem der R_3^∞ von den Tangentialebenen der F_2 geschnitten wird.

der Schmiegungsebene der λ^p-Nullinie der $F_2 : x_i$ parallel ist, so zeigt man zuerst, daß die $\tilde{F}_2 : \tilde{x}_i$ ebenfalls λ^p und μ^p als Nullrichtungen besitzt, und weiter, daß die Tangentialebene der $F_2 : x_i$ in entsprechenden Punkten der Schmiegungsebene der μ^p Nullinie der $\tilde{F}_2 : \tilde{x}_i$ parallel ist. Wir nannten zwei solche Flächen konjugiert. Das Bild hierzu im R_3^∞ liefert die Strahlensysteme der Schnitte der Tangentialebenen konjugierter Flächen. Sei nämlich $\mathfrak{p}(y_1 y_2)$ das Strahlensystem des Schnittes der Tangentialebenen der $F_2 : x_i$, $\mathfrak{v}(y_1 y_2)$ jenes der $\tilde{F}_2 : \tilde{x}_i$, so haben diese beiden Strahlensysteme einen Mantel ihrer Brennflächen gemeinsam und tangieren ihn in konjugierten Richtungen.

Im dritten Paragraphen werden als Analogon der Strahlensysteme im R_3 die Ebenensysteme im R_4 behandelt. Unter einer Ebene ist hier eine E_2, unter einem Ebenensystem eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit solcher E_2 verstanden. Auch hier gibt es eine *Brennfläche* B_3, die dreifach ausgedehnt ist und von jeder E_2 des Systems in den gemeinsamen Punkten tangiert wird. Der Schnitt eines solchen Ebenensystems mit einem R_3 des R_4 ist ein Strahlensystem dieses R_3, dessen Brennfläche der Schnitt der Brennfläche B_3 des Ebenensystems mit dem R_3 ist.

Von Interesse sind Ebenensysteme, deren Brennfläche ausartet, d. h. eine F_2 (oder Kurve) ist. Wir nennen sie ausgeartete Ebenensysteme; ihre Diskussion führt zu dem schönen Resultate: Die Schmiegungsebenen der λ^p- (resp. μ^p-) Nullinien einer F_2 hüllen selbst eine $\tilde{F}_2$ ein, deren μ^p- (resp. λ^p-) Nullinien-Schmiegungsebenen wieder die Fläche F_2 einhüllen.

Wir zeigen dann den projektiv invarianten Charakter der Nullinien auf Grundlage dieses Satzes. Ohne jede Integration erhält man also konjugierte Flächen $\tilde{F}_2$ zu einer gegebenen.

Das obige Resultat ist nur richtig für solche F_2, deren Tangentialebenen den R_3^∞ in einem nicht ausgearteten Strahlensysteme schneiden. Der Fall, wo eine der Mantelflächen dieses Strahlensystems eine Torse ist, wird gesondert behandelt. Die allgemeinste F_2 dieser Eigenschaft liegt auf einer Hypertorse T_3 des R_4. (Unter einer Hypertorse verstehen wir die Gesamtheit der Punkte der Schmiegungsebenen einer Raumkurve.)

I. Abschnitt.

Ein Formensystem der F_2 im affinen R_4.

Bezeichnung. $\sigma^i \equiv 0$, $\operatorname{mod}(\xi^i, \eta^i, \ldots)$ bedeute, daß sich der Vektor σ^i linear durch die Vektoren $\xi^i, \eta^i, \ldots$ darstellen lasse, $\sigma^i \equiv \tau^i$, $\operatorname{mod}(\xi^i, \eta^i, \ldots)$ heißt $\sigma^i - \tau^i \equiv 0$, $\operatorname{mod}(\xi^i, \eta^i, \ldots)$.

Die F_2 sei in der Parameterdarstellung

$$x_i = x_i(y_1, y_2) \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{1}$$

gegeben, wobei die Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \; \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \right\| \tag{1'}$$

den Rang 2 habe. Wir definieren in jedem Punkte der F_2 die affininvarianten Vektorräume, den Tangentialraum J_1, den die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_p}$ aufspannen und den Schmiegungsraum J_{12}, den die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_p}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}$ aufspannen.

Im R_4 muß zwischen den fünf Vektoren des J_{12} eine lineare Relation

$$B^{(pq)} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} + C^{(p)} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{2}$$

bestehen, in der wir $B^{(pq)} = B^{(qp)}$ voraussetzen dürfen. Wegen des Ranges der Matrix (1') muß (2) die Koeffizienten $B^{(pq)}$ wirklich enthalten. Wir schreiben die Relation (2) in der Gestalt

$$B^{(pq)} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \equiv 0, \qquad \bmod \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2} \right). \tag{2'}$$

Setzen wir weiter voraus, daß für die gegebene F_2 der J_{12}-Raum tatsächlich vierdimensional ist[2]), so sind in (2) $B^{(pq)}$ und $C^{(p)}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt.

Um die Gleichung (2) von der Wahl des Parametersystems y_1, y_2 unabhängig zu machen, genügt es, $B^{(pq)}$ als kontravarianten Tensor zweiter Stufe anzusehen, wir werden daher in der Folge B^{pq} statt $B^{(pq)}$ schreiben.

Aus (2) berechnet man $B^{pq} = p C^{(pq)}$, wobei $C^{(pq)}$ durch die Determinanten

$$\left\{ \begin{aligned} C^{(11)} &= \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \; \frac{\partial x}{\partial y_2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} \right), \\ 2\, C^{(12)} &= -\left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \; \frac{\partial x}{\partial y_2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} \right), \\ C^{(22)} &= \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \; \frac{\partial x}{\partial y_2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \end{aligned} \right. \tag{3}$$

gegeben ist. Schließlich bezeichnen wir

$$C^{(11)} = D_{(22)}, \qquad -C^{(12)} = D_{(12)}, \qquad C^{(22)} = D_{(11)}.$$

§ 1.

Der einer der Ausgangsformen adjungierte Vektor ζ^i und der adjungierte Affinnormalraum.

Durch (2) resp. (2') ist die Form B^{pq} bis auf einen Faktor bestimmt, wir wollen jede Form dieser Gesamtheit als eine Ausgangsform bezeichnen,

[2]) Flächen, für die der J_{12}-Raum eine kleinere Dimension hat, liegen ganz in einem R_3 oder es sind Torsen.

da die in der Folge definierten Invarianten der F_2 von der speziellen Wahl der Ausgangsform abhängen. Zuletzt werden wir sehen, wie man aus der Gesamtheit der Ausgangsformen bestimmte affininvariant fixieren kann. Die Voraussetzung

$$(4) \qquad |B^{pq}| \neq 0$$

ist natürlich von der speziellen Wahl der Ausgangsform unabhängig. Treffen wir sie, so sind Flächen ausgeschaltet, deren System von partiellen Differentialgleichungen man leicht in die Form $\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1^2} = \mathsf{A}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \mathsf{B}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}$ bringen kann. Zu ihnen gehören die Regelflächen.

Infolge der Voraussetzung (4) existiert der kovariante Tensor B_{pq}, für den die Relationen gelten

$$B^{pr} B_{qr} = \delta_{pq} = \begin{matrix} 0 & \text{für} & p \neq q \\ 1 & \text{für} & p = q \end{matrix}.$$

Die Determinante

$$(5) \qquad \Delta = |B_{pq}|$$

ist wegen (4) von Null verschieden. ($|B^{pq}| = \Delta^{-1}$). Für B_{pq} erhalten wir

$$(6) \qquad B_{11} = \Delta B^{22}, \qquad B_{12} = -\Delta B^{12}, \qquad B_{22} = \Delta B^{11},$$

also $B_{pq} = f \cdot D_{pq}$.

Nun definieren wir den Vektor ζ^i

$$(7) \qquad \zeta^i = B^{pq}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \begin{Bmatrix} pq \\ r \end{Bmatrix}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\right) = B^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r}$$

(infolge (2)), und mit seiner Hilfe die drei Vektoren

$$(8) \qquad \eta^i_{rs} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} - \begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_t} - \frac{1}{2} B_{rs} \zeta^i.$$

Der durch die Vektoren η^i_{rs} aufgespannte Vektorraum ist ersichtlich von der Wahl der Parameter y_1, y_2 unabhängig und wegen

$$(9) \qquad B^{rs} \eta^i_{rs} = 0$$

ist er höchstens zweidimensional. Nun zeigen wir, daß er wirklich zweidimensional ist und mit dem Tangentialraum J_1 keinen Vektor gemeinsam hat. Sonst bestünde noch eine von (9) unabhängige Beziehung

$$(10) \qquad T^{rs} \eta^i_{rs} \equiv 0, \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \frac{\partial x}{\partial y_2}\right),$$

aus der

$$T^{rs} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} \equiv 0, \quad \text{also} \quad T^{rs} = \alpha B^{rs}$$

folgte, und (10) wäre gegen Voraussetzung von (9) abhängig.

Wir nennen den zweidimensionalen Vektorraum η^i_{rs} den der Ausgangsform B^{pq} adjungierten Affinnormalraum. (Bildet man die Geodätischen in bezug auf die Ausgangsform B^{pq}, $x_i = x_i(s)$, so liegen die Endpunkte aller Vektoren $\frac{d^2 x_i}{ds^2}$ $(ds^2 = B_{pq}\, dy_p\, dy_q)$ in einem Punkte P der F_2 in einer dem Affinnormalraum parallelen E_2.) Jeder Vektor λ^i in einem Punkte P der F_2 hat nun seine eindeutige Darstellung als Summe seiner Komponenten im Tangential- und Affinnormalraum. Insbesonders notieren wir die Darstellung

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \left\{ {pq \atop r} \right\}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = T^r_{pq} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}}, \tag{11}$$

wo $\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}}$ die Komponente im Normalraum bezeichne. Der Vergleich von (8) und (9) ergibt

$$\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}} = \eta^i_{pq} \quad \text{und} \quad T^r_{pq} = \frac{1}{2} B_{pq} B^r. \tag{12}$$

In der Folge werden wir die Darstellung

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} = \Gamma^r_{pq} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \eta^i_{pq} \tag{13}$$

verwenden, wo dann

$$\Gamma^r_{pq} = \left\{ {pq \atop r} \right\}_B + \frac{1}{2} B_{pq} B^r \tag{14}$$

ist. Wir werden künftig B_{pq} als Koppelungstensor verwenden und von Vektoren schlechtweg sprechen, da dann jeder Vektor seine kovariante wie seine kontravariante Darstellung hat.

§ 2.

Affininvariante Vektoren im Tangential- und Affinnormalraum.

Seien ϱ^p und σ^p $(p = 1, 2)$ orthogonale Einheitsvektoren der F_2 in bezug auf B_{pq} als Maßtensor, für die also

$$\varrho_p \sigma^p = 0, \qquad \varrho_p \varrho^p = 1, \qquad \sigma_p \sigma^p = \pm 1 \begin{array}{l} \text{für } \Delta > 0 \\ \;\;\text{"}\;\; \Delta < 0 \end{array}$$

gelte. Um diese Vektoren fixieren zu können, *setzen wir* $B^p \neq 0$ *voraus* $(\zeta^i \neq 0)$.

(Das System der Differentialgleichungen der F_2, für die $B^p = 0$ ist, läßt sich in die Form bringen:

$$\Delta < 0: \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \quad \text{also} \quad (x_i = \Phi_i y_1) + \Psi_i(y_2),$$

$$\Delta > 0: \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_2^2} = 0, \quad \text{also} \quad x_i = \Phi_i(u + \sqrt{-1}\, v) + \Phi_i(u - \sqrt{-1}\, v),$$

und umgekehrt ist für solche Flächen $B^p = 0$.)

Ist dann $B = B_{pq} B^p B^q \neq 0$, so setzen wir ϱ^p oder σ^p gleich αB^p je nachdem $B > 0$ oder $B < 0$ ist.

Ist $B = 0$ und ist C^p die wegen $|B_{pq}| \neq 0$ von B^p verschiedene zweite Nullrichtung der Form $B_{pq} dy_p dy_q$, so fixieren wir C^p durch die Relation $C_p B^p = 1$ und setzen

$$\varrho^p = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^p + C^p), \qquad \sigma^p = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^p - C^p).$$

Damit sind die Vektoren ϱ_p und σ_p durch die Tensoren B_{pq} und B_p fixiert.

Die Endpunkte der Vektoren $\eta^i_{pq} \frac{dy_p}{ds} \frac{dy_q}{ds}$, $ds^2 = B_{pq} dy_p dy_q$, beschreiben im Affinnormalraum einen Kegelschnitt, der für $\Delta > 0$ eine Ellipse, für $\Delta < 0$ eine Hyperbel ist. Man zeigt auch leicht, daß die Vektoren

$$(15) \qquad {}_{(1)}\lambda^i = \eta^i_{pq} \varrho^p \varrho^q, \qquad {}_{(2)}\lambda^i = \eta^i_{pq} \varrho^p \sigma^q$$

konjugierte Durchmesser dieses Kegelschnittes sind. Infolge ihrer linearen Unabhängigkeit gilt die Darstellung

$$(16) \qquad \eta^i_{pq} = {}_{(\alpha)}B_{pq\,(\alpha)}\lambda^i, \qquad \alpha = 1, 2,$$

in der die Koeffizienten ${}_{(\alpha)}B_{pq}$ symmetrische Tensoren sind. Aus (15) und (16) folgt

$$(17) \qquad \begin{cases} {}_{(1)}B_{pq} \varrho^p \varrho^q = 1, & {}_{(2)}B_{pq} \varrho^p \varrho^q = 0, \\ {}_{(1)}B_{pq} \varrho^p \sigma^q = 0, & {}_{(2)}B_{pq} \varrho^p \sigma^q = 1. \end{cases}$$

Aus (17) und $B^{pq}\,{}_{(\alpha)}B_{pq} = 0$ (wegen $B^{pq} \eta^i_{pq} = 0$) lassen sich die ${}_{(\alpha)}B_{pq}$ berechnen, und zwar erhält man:

$$(18) \qquad \begin{cases} {}_{(1)}B_{pq} = \quad \varrho_p \varrho_q \mp \sigma_p \sigma_q & \begin{matrix} \text{für } \Delta > 0 \\ \text{„} \ \Delta < 0 \end{matrix} \\ {}_{(2)}B_{pq} = \pm (\varrho_p \sigma_q + \varrho_q \sigma_p) & \begin{matrix} \text{für } \Delta > 0 \\ \text{„} \ \Delta < 0. \end{matrix} \end{cases}$$

Somit sind die Formen ${}_{(\alpha)}B_{pq}$ durch die Tensoren B_{pq} und B_p bestimmt.

§ 3.

Das vollständige Formensystem der F_2.

Im Systeme totaler Differentialgleichungen

$$(19) \qquad \begin{cases} dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_p} dy_p, \\ d\dfrac{\partial x_i}{\partial y_p} = \left(\Gamma^r_{pq} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} + {}_{(\alpha)}B_{pq\,(\alpha)}\lambda^i\right) dy_q, \\ d\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = \left({}_{(\alpha)}\sigma^r_t \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} + {}_{(\alpha\beta)}C_{t\,(\beta)}\lambda^i\right) dy_t \end{cases}$$

sind die Koeffizienten Γ^r_{pq} und ${}_{(\alpha)}B_{pq}$ durch die Tensoren B_{pq} und B_q bestimmt. Wir können demnach das System von Tensoren

$$(20) \qquad B_{pq}, \quad B_p, \quad {}_{(\alpha)}\sigma^r_t \text{ und } {}_{(\alpha\beta)}C_t$$

als ein vollständiges Formensystem der F_2 ansehen. Aus den Integrabilitätsbedingungen des Systems (19) kann man aber die Tensoren (20) durch das Teilsystem

$$(21) \qquad B_{pq}, \quad B_p, \quad \sum_{r=1}^{2} {}_{(\alpha)}\sigma^r_r \quad (\alpha = 1, 2), \quad {}_{(11)}C_t \text{ und } {}_{(22)}C_t$$

von (20) berechnen, so daß (21) ein vollständiges Formensystem der F_2 darstellt. Den Beweis, der eine längere Rechnung erfordert, die wenig instruktiv ist, wollen wir hier nicht bringen, er verläuft wie die analogen Beweise dieser Art; ein Teil der Integrabilitätsbedingungen dient zur Berechnung der Tensoren (20) aus den Tensoren des Systems (21), und was dann an Integrabilitätsbedingungen übrigbleibt, sind die Integrabilitätsbedingungen für die Formenkoeffizienten (21), die erfüllt sein müssen, damit diesem Systeme eine F_2 entspricht.

Es gilt nämlich der Satz:

Entspricht ein System (21) *den erwähnten Integrabilitätsbedingungen, so gibt es stets eine bis auf affine Transformation bestimmte* F_2, *die dieses Formensystem besitzt.*

Beweis. Das System (19) ist dann total integrierbar. Sei

$$x_i = x_i(y_1\, y_2), \qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}(y_1\, y_2), \qquad {}_{(\alpha)}\lambda^i = {}_{(\alpha)}\lambda^i(y_1\, y_2)$$

ein Integralsystem von (19). Dann folgt wegen $B^{pq}\,{}_{(\alpha)}B_{pq} = 0$ aus der zweiten Gleichung (19)

$$B^{pq} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\, \partial y_q} \equiv 0, \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\right),$$

also ist B^{pq} eine Ausgangsform für die $F_2 : x_i = x_i(y_1\, y_2)$.

Das der Ausgangsform B^{pq} zugeordnete Formensystem (21) dieser F_2 bezeichnen wir

$$B_{pq}, \quad \overline{B}_p, \quad {}_{(1)}\overline{\sigma}^r_r, \quad {}_{(2)}\overline{\sigma}^r_r, \quad {}_{(11)}\overline{C}_t, \quad {}_{(22)}\overline{C}_t,$$

und beweisen $\overline{B}_p = B_p$.

In der Tat ist $\overline{B}^p$ durch

$$(22) \qquad \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\, \partial y_q} - \left\{{pq \atop r}\right\}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\right) B^{pq} = \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \overline{B}^r$$

definiert. Aus der zweiten Gleichung (19) folgt aber für die linke Seite von (22):

$$\left(\Gamma^r_{pq} - \left\{{pq \atop r}\right\}_B\right) B^{pq} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = \left(\frac{1}{2} B_{pq} B^r\right) B^{pq} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = B^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r},$$

somit $\overline{B}^r = B^r$, q. e. d.

Bezeichnen wir die Koeffizienten des der $F_2 : x_i = x_i(y_1\, y_2)$ in bezug auf die Ausgangsform B^{pq} entsprechenden Systems (19) ebenfalls mit Querstrichen, so gilt nach dem bisher bewiesenen $\bar{\Gamma}^r_{pq} = \Gamma^r_{pq}$ und ${}_{(\alpha)}\bar{B}_{pq} = {}_{(\alpha)}B_{pq}$. Ebenfalls gilt für die im § 2 definierten Vektoren $\bar{\varrho}^p = \varrho^p$ und $\bar{\sigma}^p = \sigma^p$.

Aus der zweiten Gleichung (19) folgt aber dann ${}_{(1)}\lambda^i = \eta^i_{pq}\varrho^p\varrho^q$ und ${}_{(2)}\lambda^i = \eta^i_{pq}\varrho^p\sigma^q$, somit haben diese Vektoren die Bedeutung der im § 2 definierten, den Affinnormalraum aufspannenden Vektoren. Daraus aber folgen die Relationen ${}_{(\alpha)}\bar{\sigma}^r_p = {}_{(\alpha)}\sigma^r_p$ und ${}_{(\alpha\beta)}\bar{C}_t = {}_{(\alpha\beta)}C_t$. Somit hat die integrierte F_2 in der Tat das gegebene Formensystem (21).

§ 4.

Der Ausgangstensor A_{pq}, für F_2, für die $B_{pq}B^pB^q \neq 0$ ist, der invariant in bezug auf jede affine Transformation ist.

Wir untersuchen, wie sich der Vektor B^p ändert, der der Ausgangsform B^{pq} adjungiert ist, sobald man

(23) $$\bar{B}^{pq} = \alpha B^{pq}$$

statt B^{pq} als Ausgangsform nimmt. $\bar{B}^p$ sei der der Form $\bar{B}^{pq}$ adjungierte Vektor, er ist durch

(24) $$\bar{B}^{pq}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\, \partial y_q} - \begin{Bmatrix} p\,q \\ r \end{Bmatrix}_{\bar{B}} \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\right) = \bar{B}^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r}$$

definiert. Nun folgt aus (23)

$$\bar{B}^{pq}\begin{Bmatrix} p\,q \\ r \end{Bmatrix}_{\bar{B}} = \alpha B^{pq}\begin{Bmatrix} p\,q \\ r \end{Bmatrix}_{B}$$

infolge der Bildung der Christoffelklammern $\begin{Bmatrix} p\,q \\ r \end{Bmatrix}$. Somit ist die linke Seite von (24) gleich $\alpha B^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r}$ und wir erhalten

(25) $$\bar{B}^r = \alpha B^r.$$

Der Vektor B^r definiert uns demnach eine von der Wahl des Ausgangstensors unabhängige Richtung auf der F_2. Wir berechnen nun aus (23) und (25) $\bar{B} = \bar{B}_{pq}\bar{B}^p\bar{B}^q$, da nach (23) $\bar{B}_{pq} = \alpha^{-1}B_{pq}$ gilt, erhalten wir

(26) $$\bar{B} = \alpha B.$$

Aus (26) folgt, daß $B = 0$ eine invariante Eigenschaft der F_2 ist. Infolge der Voraussetzung dieses Paragraphen kann man den Ausgangstensor

(27) $$A^{pq} = B^{-1}B^{pq} \quad (\text{für den } B = 1 \text{ ist})$$

bilden, der wegen (23), (26) eine Invariante gegen jede affine Transformation ist. Es gilt dann der Satz: Ist ein Formensystem (21) gegeben, das den Integrabilitätsbedingungen genügt, gilt ferner die Beziehung

$$B_{pq}B^pB^q = 1,$$

so gibt es stets eine bis auf affine Transformation bestimmte F_2, die dieses Formensystem besitzt, und weiter ist B_{pq} die eben definierte Form A_{pq} dieser F_2. Der Satz folgt aus dem entsprechenden des § 3. In der Tat ist das Formensystem das Formensystem jeder durch Integration des Systems (19) gewonnenen Fläche F_2. $B_{pq} B^p B^q = 1$ ist aber die für den Ausgangstensor A^{pq} charakteristische Gleichung, somit ist $B^{pq} = A^{pq}$.

§ 5.

Der Ausgangstensor V_{pq}, der affininvariant ist in bezug auf volumtreue Transformationen.

Bezeichnen wir mit N die Determinante

$$N = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \frac{\partial x}{\partial y_2} \; {}_{(1)}\lambda \; {}_{(2)}\lambda\right), \tag{28}$$

so ist N affininvariant gegen volumtreue Transformationen und

$$\varepsilon = \frac{N^2}{\varDelta}. \tag{29}$$

eine Invariante in bezug auf solche Transformationen. Setzen wir für ${}_{(1)}\lambda^i$ und ${}_{(2)}\lambda^i$ ihre Ausdrücke (15) in N ein und berücksichtigen wir $\eta^i_{pq} \equiv \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}$, mod $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1} \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\right)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \frac{\partial x}{\partial y_2} \frac{\partial^2 x}{\partial y_p \partial y_1} \frac{\partial^2 x}{\partial y_q \partial y_1}\right) \varrho^p \varrho^q (\varrho^1 \sigma^2 - \varrho^2 \sigma^1) \\ &= D_{(pq)} \varrho^p \varrho^q (\varrho^1 \sigma^2 - \varrho^2 \sigma^1). \end{aligned} \tag{30}$$

Nun ist

$$B^{pq} = \varrho^p \varrho^q \pm \sigma^p \sigma^q \quad \begin{array}{ll} \text{für} & \varDelta > 0 \\ \text{„} & \varDelta < 0, \end{array}$$

woraus $(\varrho^1 \sigma^2 - \varrho^2 \sigma^1)^2 = \pm |B^{pq}|$ folgt. Somit lautet (30)

$$N = \frac{D_{(pq)} \varrho^p \varrho^q}{\sqrt{|\varDelta|}}. \tag{31}$$

Für unsere Ausgangsform B_{pq} gilt $B_{pq} = \alpha D_{(pq)}$ und also

$$B_{pq} \varrho^p \varrho^q = 1 = \alpha D_{(pq)} \varrho^p \varrho^q,$$

also erhalten wir

$$N = \frac{1}{\alpha \sqrt{|\varDelta|}}. \tag{32}$$

Bezeichnen wir $D = |D_{(pq)}|$, so gilt $\varDelta = \alpha^2 D$ und für N

$$N = \frac{1}{\alpha^2 \sqrt{|D|}}, \tag{33}$$

somit ist N nur von der Wahl des Ausgangstensors, nicht aber von der der orthogonalen Einheitsvektoren ϱ^p, σ^p abhängig. Für $\sqrt{\varepsilon}$ erhalten wir

$$(34) \qquad \frac{N}{\sqrt{|\varDelta|}} = \frac{1}{\alpha^3 |D|}.$$

Für die Ausgangsformen

$$(35) \qquad B_{pq} = \text{konst.} \frac{D_{(pq)}}{\sqrt[3]{|D|}}$$

und nur für diese ist somit die Invariante ε konstant. Mit V_{pq} bezeichnen wir die Ausgangsform, für die $\varepsilon = 1$ ist.

$$(35') \qquad V_{pq} = \frac{D_{(pq)}}{\sqrt[3]{|D|}}.$$

Wir zeigen nun, daß für die Formen (35) *eine Reduktion des Formensystems* (21) *eintritt.* Aus (28) folgt wegen (19):

$$\frac{\partial l N}{\partial y_t} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha t} + {}_{(\alpha\alpha)}C_t,$$

ferner ist bekanntlich

$$\frac{\partial l \sqrt{|\varDelta|}}{\partial y_t} = \left\{ {\alpha t \atop \alpha} \right\}_B,$$

somit gilt

$$(36) \qquad \frac{\partial l \dfrac{N}{\sqrt{|\varDelta|}}}{\partial y_t} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha t} - \left\{ {\alpha t \atop \alpha} \right\}_B + {}_{(\alpha\alpha)}C_t = \frac{B_t}{2} + {}_{(\alpha\alpha)}C_t.$$

Für die Formen (35) verschwindet aber die linke Seite und wir erhalten:

$$(37) \qquad B_t = -2\, {}_{(\alpha\alpha)}C_t.$$

Es gilt endlich der Satz: Entspricht ein Formensystem (21) den Integrabilitätsbedingungen und außerdem der Beziehung (37), so gibt es eine bis auf affine volumtreue Transformation bestimmte F_2, die dieses Formensystem besitzt und für die $B^{pq} = V^{pq}$ ist. In der Tat besitzt ja jede integrierte F_2 das Formensystem (21), wählen wir die Anfangslage bei der Integration in einem Punkte P noch so, daß $\varepsilon = 1$ wird, so ist nach (36) längs der ganzen F_2 $\varepsilon = 1$, d. h. $B^{pq} = V^{pq}$.

II. Abschnitt.

Parallelflächen, konjugierte Flächen, Ebenensysteme.

§ 1.

Das Strahlensystem im projektiven R_3.

Wir machen den R_3 zum uneigentlichen R_3^∞ eines affinen R_4, die Punkte des R_3^∞ sind dann die Richtungen des affinen R_4 und die Gruppe ihrer Transformationen ist ersichtlich:

$$G\colon\ \bar{x}_i = a_{ik} x_k, \qquad \bar{x}_i = \lambda(x_1 \ldots x_4)\, x_i \quad (i, k = 1, \ldots, 4).$$

Der Strahl $\mathfrak{p}(y_1 y_2)$ des Strahlensystems sei durch zwei seiner Punkte gegeben ξ^i, η^i:

$$x_i = \alpha\xi^i(y_1 y_2) + \beta\eta^i(y_1 y_2) \qquad (i = 1, \ldots, 4), \tag{38}$$

dabei ist die besondere Wahl des Punktepaares ξ^i, η^i ohne Bedeutung, es kann stets durch ein zweites Punktepaar

$$\bar\xi^i = A\xi^i + B\eta^i, \qquad \bar\eta^i = C\xi^i + D\eta^i, \qquad AD - BC \neq 0 \tag{39}$$

ersetzt werden. Jedem Wertepaar y_1, y_2 eines gewissen Gebietes der y_1, y_2-Ebene entspricht dann im R_3^∞ ein Strahl $\mathfrak{p}(y_1, y_2)$, (ξ^i, η^i) des Strahlensystems und dem unendlich benachbarten Wertepaar $y_1 + dy_1$, $y_2 + dy_2$ entspricht der dem Strahle (38) unendlich benachbarte Strahl

$$\begin{aligned} \bar\xi_i &= \xi^i(y + dy) = \xi^i + \frac{\partial\xi^i}{\partial y_p} dy_p + \ldots, \\ \bar\eta^i &= \eta^i(y + dy) = \eta^i + \frac{\partial\eta^i}{\partial y_p} dy_p + \ldots. \end{aligned} \tag{38'}$$

Wir fragen nun nach den Richtungen dy_p, für die $\bar{\mathfrak{p}}$ bei Berücksichtigung der Entwicklungsglieder bis zur ersten Ordnung den Strahl $\mathfrak{p}$ schneidet.

Für diese Richtungen muß eine Relation

$$\mathsf{A}\left(\xi^i + \frac{\partial\xi^i}{\partial y_p} dy_p\right) + \mathsf{B}\left(\eta^i + \frac{\partial\eta^i}{\partial y_p} dy_p\right) \equiv 0, \qquad \operatorname{mod}(\xi^i, \eta^i), \tag{40}$$

mit Größen A, B bestehen, die nicht zugleich verschwinden. Daraus folgt für dy_p

$$\left(\xi^i \eta^i \frac{\partial\xi^i}{\partial y_p} \frac{\partial\eta^i}{\partial y_q}\right) dy_p dy_q = B_{pq} dy_p dy_q = 0. \tag{41}$$

Die Nullrichtungen der Form (41), denen die Torsen des Strahlensystems entsprechen, *mögen nicht zusammenfallen*:

$$|B_{pq}| \neq 0. \tag{41'}$$

Wir bezeichnen sie mit λ^p und μ^p, *die Form* B_{pq} *nennen wir die Grundform des Strahlensystems* $\mathfrak{p}$. $\frac{\lambda^1}{\lambda^2}$ und $\frac{\mu^1}{\mu^2}$ sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$0 = B_{11}\varrho^2 + 2B_{12}\varrho + B_{22} = \left(\xi^i, \eta^i, \frac{\partial\xi^i}{\partial y_1}\varrho + \frac{\partial\xi^i}{\partial y_2}, \frac{\partial\eta^i}{\partial y_1}\varrho + \frac{\partial\eta^i}{\partial y_2}\right) = f(\varrho). \tag{41''}$$

Setzt man in (40) $dy_p = \lambda^p$ (resp. $= \mu^p$), *so sind* A *und* B *bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt.* Sonst müßte

$$\mathsf{A}\frac{\partial\xi^i}{\partial y_p}\lambda^p + \mathsf{B}\frac{\partial\eta^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0, \qquad C\frac{\partial\xi^i}{\partial y_p}\lambda^p + D\frac{\partial\eta^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0, \qquad \operatorname{mod}(\xi^i, \eta^i),$$

mit $AD - BC \neq 0$ bestehen, was $\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0$, $\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0$, mod (ξ^i, η^i) zur Folge hätte. Dann aber wäre $\frac{\lambda^1}{\lambda^2}$ auch Wurzel der Gleichung $f'(\varrho)$, somit Doppelwurzel von $f(\varrho)$ gegen Voraussetzung (41'). Geht man dann in der Relation (40) zur Grenze über $\lim dy_p \to 0$, so erhält man für den Schnittpunkt von $\mathfrak{p}(y_1; y_2)$, $\mathfrak{p}(y_1 + \varepsilon \lambda^1, y_2 + \varepsilon \lambda^2)$ $(\lim \varepsilon \to 0)$ den Punkt $\xi_1^i = \mathsf{A} \xi^i + \mathsf{B} \eta^i$.

Resultat. Die unendlich benachbarten Strahlen, die den Nullrichtungen λ^p, μ^p der Form (41) entsprechen, schneiden den Strahl $\mathfrak{p}$ in zwei Punkten ξ_1^i, η_1^i

$$(42) \quad \begin{cases} \xi_1^i = \mathsf{A} \xi^i + \mathsf{B} \eta^i, & \text{wobei} \quad \mathsf{A} \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \lambda^p + \mathsf{B} \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0, \quad \text{mod } (\xi^i, \eta^i) \\ \eta_1^i = C \xi^i + D \eta^i, & \qquad\quad C \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \mu^p + D \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0, \quad \text{mod } (\xi^i, \eta^i) \end{cases}$$

ist.

Bemerkung. Es ist sofort ersichtlich, daß die Schnittpunkte ξ_1^i, η_1^i unabhängig sind von der besonderen Wahl der Punkte ξ^i, η^i des Strahles $\mathfrak{p}$ und invariant sind in bezug auf die Transformationen der Gruppe G. Die Punkte ξ_1^i, η_1^i bilden die beiden Mantelflächen der Brennfläche des Strahlensystems $\mathfrak{p}(y_1 y_2)$.

Wir zeigen nun, daß die Punkte ξ_1^i, η_1^i nicht zusammenfallen, d. h., daß $AD - BC \neq 0$ ist. Sonst bestünden zugleich die beiden Systeme

$$\mathsf{A} \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \lambda^p + \mathsf{B} \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0, \qquad \mathsf{A} \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta_p} \mu^p + \mathsf{B} \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0, \quad \text{mod } (\xi^i, \eta^i),$$

woraus wegen $\lambda^p \neq \alpha \mu^p$ für jede Richtung ϱ^p: $\mathsf{A} \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \varrho^p + \mathsf{B} \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \varrho^p \equiv 0$, mod (ξ^i, η^i) gälte, was $B_{pq} \equiv 0$ zur Folge hätte.

Für ξ_1^i, η_1^i gelten wegen (42) die Relationen

$$(43) \qquad \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0, \qquad \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0, \quad \text{mod } (\xi^i, \eta^i),$$

wir definieren nun durch

$$(44) \qquad \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p = \xi_2^i, \qquad \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} \lambda^p = \eta_2^i$$

zwei weitere Punkte ξ_2^i, η_2^i des R_3^∞. Weder ξ_2^i noch η_2^i liegen auf dem Strahle ξ^i, η^i. Denn aus der Beziehung $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0$, mod (ξ^i, η^i) folgt wegen (43), $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \varrho^p \equiv 0$, mod $(\xi^i \eta^i)$, für jede Richtung ϱ^p, d. h. $\mathsf{A} \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \varrho^p + \mathsf{B} \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \varrho^p \equiv 0$, mod (ξ^i, η^i), also $B_{pq} \equiv 0$.

Aber im Gegensatz zu den Punkten ξ_1^i, η_1^i sind die Punkte ξ_2^i, η_2^i von den Transformationen der Gruppe G nicht unabhängig. Wir erhalten nämlich für $\bar{\xi}_1^i = \lambda \xi_1^i$, $\bar{\xi}_2^i = \lambda \xi_2^i + \xi_1^i \frac{\partial \lambda}{\partial y_p} \mu^p$, woraus folgt, daß nicht der Punkt ξ_2^i sondern der Strahl

(45) $$\mathfrak{v} : \xi_1^i, \xi_2^i$$

und ebenso der Strahl

(46) $$\bar{\mathfrak{v}} : \eta_1^i, \eta_2^i$$

geometrische Bedeutung hat. Wir werden daher in der Folge mit ξ_2^i einen von ξ_1^i verschiedenen Punkt auf $\mathfrak{v}$, mit η_2^i einen von η_1^i verschiedenen Punkt auf $\bar{\mathfrak{v}}$ bezeichnen.

Wir behaupten nun, daß die Strahlen $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ windschief sind. Sonst bestünde eine Beziehung

$$\alpha \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p + \beta \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0, \quad \bmod (\xi^i, \eta^i),$$

woraus

$$\left(\xi_1^i \eta_1^i \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_q}\right) \lambda^q \mu^p = C_{pq} \lambda^q \mu^p = 0$$

folgte. Wegen (43) gilt aber auch

$$\left(\xi_1^i \eta_1^i \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_q}\right) \mu^q \lambda^p = C_{pq} \mu^q \lambda^p = 0,$$

woraus wir dann $B_{pq} \lambda^p \mu^q = 0$ schließen müßten. Aus

$$B_{pq} \lambda^p \lambda^q = B_{pq} \mu^p \mu^q = 0$$

folgt aber $B_{pq} \lambda^p \mu^q \neq 0$ wegen (41'). Somit ist die $(\xi_1^i \xi_2^i \eta_1^i \eta_2^i) \neq 0$, und wir sind in der Lage, die Ableitungen dieser vier Punkte durch die Punkte selbst darzustellen. A

$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} = \alpha_p \xi_1^i + \beta_p \eta_1^i + \gamma_p \xi_2^i + \delta_p \eta_2^i$ folgt wegen $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0$, mod (ξ_1^i, η_1^i) und $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0$, mod $(\xi_1^i \eta_2^i)$:

(47) $$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} = \alpha_p \xi_1^i + \beta \mu_p \eta_1^i + \gamma \lambda_p \xi_2^i,$$

wobei λ_p, μ_p durch $\lambda_p \lambda^p = 0$, $\mu_p \mu^p = 0$ bis auf einen Faktor bestimmte kovariante Vektoren sind. Ebenso erhält man

(47') $$\frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} = \alpha \lambda_p \xi_1^i + \beta_p \eta_1^i + \delta \mu_p \eta_2^i.$$

Wäre $\beta = 0$, so hieße das, daß $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \lambda^p = f \xi_1^i$, d. h. die Tangente $\xi_1^i + t \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \lambda^p$ existierte nicht: der Mantel ξ_1^i der Brennfläche wäre in eine Kurve ausgeartet. Ebenso hätte $\alpha = 0$ die Ausartung der Mantelfläche η_1^i in eine Kurve zur Folge. *Wir wollen solche Ausartungen beiseite lassen und setzen demnach $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ voraus*[3]). Dann normieren wir die bis auf einen Faktor bestimmten Vektoren λ_p und μ_p durch die Festsetzung $\alpha = \beta = 1$. Das System der Ableitungsgleichungen hat dann die Gestalt:

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} = \mathsf{A}_p \xi_1^i + \mu_p \eta_1^i + c \lambda_p \xi_2^i, \\ \dfrac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} = \lambda_p \xi_1^i + \mathsf{B}_p \eta_1^i + \qquad + d \mu_p \eta_2^i, \\ \dfrac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} = \mathsf{M}_p \xi_1^i + \mathsf{N}_p \eta_1^i + R_p \xi_2^i + T_p \eta_2^i, \\ \dfrac{\partial \eta_2^i}{\partial y_p} = \overline{\mathsf{M}}_p \xi_1^i + \overline{\mathsf{N}}_p \eta_1^i + \overline{R}_p \xi_2^i + \overline{T}_p \eta_2^i. \end{cases}$$

Aus (48) erhalten wir

$$B_{pq}\, dy_p\, dy_q = (\xi_1^i\, \eta_1^i\, \xi_2^i\, \eta_2^i)\, c\, d\, (\lambda_p\, dy_p)(\mu_p\, dy_p),$$

somit ist $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Die Integrabilitätsbedingung der ersten Gleichung (48) liefert für den verschwindenden Koeffizienten von η_2^i den Ausdruck $c(\lambda_p T_q - \lambda_q T_p) = 0$, also da $c \neq 0$ ist

$$(49)\qquad T_p = t \lambda_p.$$

Ebenso ergibt der Koeffizient von ξ_2^i der Integrabilitätsbedingung der zweiten Gleichung von (48)

$$(49')\qquad \overline{R}_p = \varrho \mu_p.$$

Wir stellen nun die Grundform des Strahlensystems $\mathfrak{v}$: (ξ_1^i, ξ_2^i) auf. Sie lautet $\left(\xi_1^i\, \xi_2^i\, \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\, \frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_q}\right) dy_p\, dy_q$, also nach (48): $t(\mu_p\, dy_p)(\lambda_p\, dy_p)$ und ist demnach, sobald $t \neq 0$ ist, der Grundform des Strahlensystems $\mathfrak{p}$: (ξ^i, η^i) proportional.

Für die Asymptotenlinien der Mantelfläche $\xi_1^i(y_1 y_2)$ erhält man, wie wir später zeigen, die Differentialgleichung:

$$(\mu_p \mu_q + t \lambda_p \lambda_q)\, dy_p\, dy_q = 0.$$

[3]) Wir werden an anderer Stelle zeigen, daß damit die dem Strahlensystem entsprechenden F_2 im R_4 ausgeschlossen sind, für die $B_{pq} B^p B^q = 0$ ist.

Sobald also t verschwindet, fallen die beiden Asymptotenrichtungen zusammen, d. h. die Mantelfläche ξ_1^i ist eine Torse, und umgekehrt, ist die Mantelfläche eine Torse, so verschwindet t.

Strahlensysteme, deren Mantelflächen Torsen (oder Kurven) sind, wollen wir ausgeartet nennen und von der weiteren Behandlung ausschließen. Dann aber müssen wir auch die Voraussetzungen $t \neq 0$, $\varrho \neq 0$ treffen, was wieder zur Folge hat, daß die Strahlensysteme $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ Grundformen besitzen, die der Grundform des Strahlensystems $\mathfrak{p}$ proportional sind. Dann aber schneiden die unendlich benachbarten Strahlen $\mathfrak{v}(y_p + \varepsilon \mu^p)$, resp. $\mathfrak{v}(y_p + \varepsilon \lambda^p)$ den Strahl $\mathfrak{v}(y_p)$. Berechnen wir aus $P \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p + Q \frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0$, $\operatorname{mod}(\xi_1^i, \xi_2^i)$, die bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmten Werte P und Q, so ist $P \xi_1^i + Q \xi_2^i$ der der Nullrichtung μ^p zugeordnete Berührungspunkt. Nun ist nach (44) $P = 1$, $Q = 0$ ein solches Wertesystem, somit ξ_1^i der μ^p zugeordnete Berührungspunkt. Wählen wir nun ξ_2^i als den λ^p zugeordneten Berührungspunkt, so muß $\frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0$, $\operatorname{mod}(\xi_1^i \xi_2^i)$ sein und dies ergibt nach (48) und (49)

$$(50) \qquad \mathsf{N}_p \lambda^p = 0, \quad \text{also} \quad \mathsf{N}_p = n \lambda_p.$$

Auf genau dieselbe Art finden wir, sobald η_2^i der der Nullrichtung μ^p zugeordnete Berührungspunkt des Strahles $\bar{\mathfrak{v}}$: (η_1^i, η_2^i) sein soll,

$$(50') \qquad \overline{\mathsf{M}}_p \mu^p = 0, \quad \text{also} \quad \overline{\mathsf{M}}_p = m \mu_p.$$

Wir erhalten demnach für (48) bei Änderung der Bezeichnung:

$$(51) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} = \mathsf{A}_p \xi_1^i + \mu_p \eta_1^i + c \lambda_p \xi_2^i, \\ \dfrac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} = \lambda_p \xi_1^i + \mathsf{B}_p \eta_1^i \qquad\qquad + d \mu_p \eta_2^i, \\ \dfrac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} = \mathsf{M}_p \xi_1^i + n \lambda_p \eta_1^i + R_p \xi_2^i + t \lambda_p \eta_2^i, \\ \dfrac{\partial \eta_2^i}{\partial y_p} = m \mu_p \xi_1^i + \mathsf{N}_p \eta_1^i + \varrho \mu_p \xi_2^i + \bar{U}_p \eta_2^i. \end{cases}$$

Die Koeffizienten des Systems (51) sind in bezug auf die Transformationen $\bar{x}_i = a_{ik} x_k$ $(i, k = 1, \ldots, 4)$, unabhängig, nicht aber in bezug auf die Transformation $\bar{x}_i = \lambda(x_1, \ldots, x_4) x_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

Bezeichnen wir nämlich $\alpha = \lambda(\xi_1^1, \ldots, \xi_1^4)$, $\beta = \lambda(\eta_1^1, \ldots, \eta_1^4)$, $\gamma = \lambda(\xi_2^1, \ldots, \xi_2^4)$, $\delta = \lambda(\eta_2^1, \ldots, \eta_2^4)$, so entsprechen den Punkten

$$(52) \qquad \bar{\xi}_1^i = \alpha \xi_1^i, \quad \bar{\eta}_1^i = \beta \eta_1^i, \quad \bar{\xi}_2^i = \gamma \xi_2^i, \quad \bar{\eta}_2^i = \delta \eta_2^i$$

im (51) entsprechenden Systeme die Koeffizienten:

$$(53)\quad \begin{cases} \bar{A}_p = A_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p}, \quad \bar{B}_p = B_p + \frac{\partial l\beta}{\partial y_p}, \quad \bar{R}_p = R_p + \frac{\partial l\gamma}{\partial y_p}, \quad \bar{U}_p = U_p + \frac{\partial l\delta}{\partial y_p}, \\ \bar{\mu}_p = \frac{\alpha}{\beta}\mu_p, \quad \bar{\lambda}_p = \frac{\beta}{\alpha}\lambda_p, \quad \bar{c} = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma}c, \quad \bar{d} = \frac{\beta^2}{\alpha\delta}d, \quad \bar{M}_p = \frac{\gamma}{\alpha}M_p, \quad \bar{N}_p = \frac{\delta}{\beta}N_p, \\ \bar{n} = \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}n, \quad \bar{m} = \frac{\delta\beta}{\alpha^2}m, \quad \bar{t} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}t, \quad \bar{\varrho} = \frac{\delta\beta}{\alpha\gamma}\varrho. \end{cases}$$

Um zu Formen zu gelangen, die invariant sind in bezug auf die Gesamtgruppe G, setzen wir

$$(54)\qquad \bar{c} = \bar{d} = 1, \quad \bar{t} = \bar{\varrho}.$$

Da die Größen c, d, t und ϱ nach Voraussetzung von Null verschieden sind, können wir diese Festsetzung treffen und erhalten

$$(55)\qquad \gamma = \alpha h, \quad \beta = \alpha\frac{c}{h}, \quad \delta = \alpha\frac{c^2 d}{h^2},$$

wobei

$$h = \sqrt[8]{\frac{c^6 d^2 \varrho}{t}}$$

ist.

Damit sind aber in (52) $\xi_1^i, \eta_1^i, \xi_2^i, \eta_2^i$ bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. Denken wir uns die Fixierung (54) getroffen und lassen wir im entsprechenden System (51) die Querstriche wieder weg, so heißt dies, daß in diesem System $c = d = 1$ und $t = \varrho$ zu setzen ist.

Eine jede Transformation (52), die ein durch (54) fixiertes Punktsystem $\xi_1^i \ldots \eta_2^i$ wieder in ein solches transformiert, hat, da $h = 1$ ist, die Gestalt

$$(56)\qquad \bar{\xi}_1^i = \alpha\xi_1^i, \quad \bar{\eta}_1^i = \alpha\eta_1^i, \quad \bar{\xi}_2^i = \alpha\xi_2^i, \quad \bar{\eta}_2^i = \alpha\eta_2^i.$$

Im System (51) ($c = d = 1$, $\varrho = t$) sind dann alle Koeffizienten bis auf die der ersten Reihe (53) Invariante in bezug auf die Gesamtgruppe G. Für die vier der ersten Reihe (53) ergaben sich die Transformationsformeln

$$(53')\quad \bar{A}_p = A_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p}, \quad \bar{B}_p = B_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p}, \quad \bar{R}_p = R_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p}, \quad \bar{U}_p = U_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p}.$$

Wir führen noch die Invariante

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial A_1}{\partial y_2} - \frac{\partial A_2}{\partial y_1}\right)(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^{-1}$$

ein und behaupten:

Vermöge der Integrabilitätsbedingungen des Systems (51), *in dem* $c = d = 1$, $t = \varrho$ *zu setzen ist, gelingt es aus dem Invariantensysteme*

$$(57)\qquad \lambda_p, \mu_p, n, m, t \text{ und } \varepsilon,$$

sobald $t \neq 1$ *ist, alle übrigen Koeffizienten des Systems* (51) *zu berechnen.*

Somit ist (57) ein vollständiges Formensystem des Strahlensystems $\mathfrak{p}$ in bezug auf die Gruppe der projektiven Transformationen. Wir ersparen uns den ebenso einfachen als länglichen Beweis und bemerken nur, daß die Größen (53′) bis auf die additive Größe $\frac{\partial l \alpha}{\partial y_p}$ fixiert sind, was der noch zulässigen Transformation (56) entspricht.

Als geometrische Folgerung aus (51) wollen wir *die Gleichung der Asymptotenlinien der Mantelfläche* ξ_1^i berechnen. Die Tangentialebene an diese Mantelfläche hat die Gleichung $\xi_1^i + \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \varrho^p$, eine Asymptotenlinie der Mantelfläche ist charakterisiert, daß ihre Schmiegungsebene die Tangentialebene der Fläche ist.

Die Schmiegungsebene im Punkte $\xi_1^i(y_1\, y_2)$ der Asymptotenlinie $y_p = y_p(\sigma)$ wird durch die Vektoren ξ_1^i, $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} d y_p$ und $\left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R d y_p\, d y_q$ [4]) aufgespannt. Also gilt

$$\left(\xi_1^i \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_1} \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_2} \left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R\right) d y_p\, d y_q = 0,$$

also

$$\left(\xi_1^i\ \eta_1^i\ \xi_2^i \left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R\right) d y_p\, d y_q = 0$$

(wegen (51)).

Aus (51) folgt dafür weiter

$$(\mu_p \mu_q + t \lambda_p \lambda_q)\, d y_p\, d y_q = 0 \tag{58}$$

als Gleichung der Asymptotenlinien der F_2 ξ_1^i. Ebenso erhält man

$$(t \mu_p \mu_q + \lambda_p \lambda_q)\, d y_p\, d y_q = 0$$

als Gleichung der Asymptotenlinien der Mantelfläche η_1^i.

Für $t = 1$ haben die Mantelflächen ξ_1^i und η_1^i gleiche Asymptotenrichtungen.

Seien nun σ_1^p, σ_2^p die Asymptotenrichtungen der Mantelfläche ξ_1^i, wegen $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0$, mod $(\xi_1^i \eta_1^i)$ und $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0$, mod $(\xi_1^i \xi_2^i)$, tangieren die Strahlen $\mathfrak{p} : (\xi_1^i \eta_1^i)$ und $\mathfrak{v} : (\xi_1^i \eta_2^i)$ die Mantelflächen ξ_1^i, wir zeigen nun, daß sie in konjugierten Richtungen berühren.

In der Tat gilt die Darstellung

$$\sigma^p = \alpha \lambda^p + \beta \mu^p,$$

also nach (58)

$$\alpha^2 + t \beta^2 = 0, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \pm \sqrt{-t}.$$

---

[4]) $\left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R$ bedeutet die Riccische Ableitung in bezug auf den Tensor B_{pq}.

Für die Asymptotenrichtungen σ_1^p, σ_2^p erhalten wir demnach

$$\sigma_1^p = \sqrt{-t}\,\lambda^p + \mu^p, \qquad \sigma_2^p = -\sqrt{-t}\,\lambda^p + \mu^p,$$

daraus folgt, daß das Doppelverhältnis $(\lambda^p \sigma_1^p \mu^p \sigma_2^p) = -1$ ist, was zu beweisen war.

§ 2.

Zusammenhang des Strahlensystems im projektiven R_3^∞ mit der F_2 im affinen R_4.

Wir zeigen als erstes, daß es zu einem gegebenen Strahlensysteme im uneigentlichen R_3^∞ des affinen R_4 eine unendliche von zwei willkürlichen Funktionen abhängige Mannigfaltigkeit von Flächen gibt, deren Tangentialebenen im Schnitte mit dem R_3^∞ das gegebene Strahlensystem bilden. Sei

$$x_i = x_i(y_1 y_2) \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{59}$$

eine solche F_2, dann muß

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} = E_p\,\xi_1^i + F_p\,\eta_1^i$$

gelten. Dies ergibt für die Fläche das System der Integrabilitätsbedingungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial E_p}{\partial y_q} - \frac{\partial E_q}{\partial y_p} + E_p A_q - E_q A_p + F_p \lambda_q - F_q \lambda_p = 0, \\ &\frac{\partial F_p}{\partial y_q} - \frac{\partial F_p}{\partial y_q} + E_p \mu_q - E_q \mu_p + F_p B_q - B_p F_q = 0, \\ &\qquad E_p \lambda_q - E_q \lambda_p = 0, \quad F_p \mu_q - F_q \mu_p = 0. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Dies ergibt sofort $E_p = e\lambda_p$, $F_p = f\mu_p$, also

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} = e\lambda_p\,\xi_1^i + f\mu_p\,\eta_1^i \qquad (i = 1, \ldots, 4), \tag{61}$$

und für e, f das System:

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda_p \frac{\partial e}{\partial y_q} - \lambda_q \frac{\partial e}{\partial y_p} + e\left(\frac{\partial \lambda_p}{\partial y_q} - \frac{\partial \lambda_q}{\partial y_p}\right) + e(\lambda_p A_q - \lambda_q A_p) + f(\mu_p \lambda_q - \mu_q \lambda_p) = 0, \\ &\mu_p \frac{\partial f}{\partial y_q} - \mu_q \frac{\partial f}{\partial y_p} + f\left(\frac{\partial \mu_p}{\partial y_q} - \frac{\partial \mu_q}{\partial y_p}\right) + e(\lambda_p \mu_q - \lambda_q \mu_p) + f(\mu_p B_q - \mu_q B_p) = 0. \end{aligned}\right. \tag{62}$$

f aus der ersten Gleichung (62) berechnet und in die zweite eingeführt ergibt für e eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Somit enthält die Gesamtheit aller dieser Flächen, die wir Parallelflächen benennen, zwei willkürliche Funktionen.

Weiter nun gilt der Satz, daß e und f und das Invariantensystem (57) *ein vollständiges Formensystem der F_2* (59) *im affinen R_4 bilden.*

Aus (61) folgt für die Grundform des Strahlensystems ξ_1^i, η_1^i, sobald wir zur Darstellung des Strahles das Punktepaar $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \frac{\partial x_i}{\partial y_2}$ anwenden,

$$(63) \qquad \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1} \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_q} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_2 \partial y_q}\right) dy_p\, dy_q = D_{(pq)}\, dy_p\, dy_q,$$

d. h. die Grundform gehört zum System der im Abschnitt I definierten Ausgangsformen.

Daraus wieder folgt, daß Parallelflächen proportionale Ausgangsformen haben.

Durch die Nullrichtungen λ^p, μ^p von (63) sind auf der F_2 zwei Scharen von Kurven definiert, *die Nullinien heißen mögen.* Wir zeigen nun, daß die Ebenen $x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\xi_2^i$, resp. $x_i + \mathsf{A}\,\eta_1^i + \mathsf{B}\,\eta_2^i$ die Schmiegungsebenen der Nullinien sind, woraus dann folgt, daß diese Schmiegungsebenen aus dem R_3^∞ die Strahlensysteme $\mathfrak{v}:(\xi_1^i, \xi_2^i)$ und $\bar{\mathfrak{v}}:(\eta_1^i, \eta_2^i)$ herausschneiden. In der Tat gilt wegen (61)

$$(64) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\lambda^p = f\eta_1^i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\mu^p = e\,\xi_1^i$$

(wobei λ^p, μ^p durch $\lambda^p = B^{pq}\lambda_q$, $\mu^p = B^{pq}\mu_q$, $B_{pq} = \lambda_p \mu_q + \lambda_q \mu_p$ fixiert sind, daraus folgt dann $\lambda_p \mu^p = 1$). Somit ist die Schmiegungsebene der λ^p-Nullinie durch die Vektoren η_1^i und $\frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0$, $(\mathrm{mod}\, \eta_1^i \eta_2^i)$, also durch η_1^i und η_2^i aufgespannt, q. e. d.

Wir notieren:

$$(65) \quad \begin{cases} x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\xi_2^i \text{ ist die Schmiegungsebene der } \mu^p\text{-Nullinie,} \\ x_i + \mathsf{A}\,\eta_1^i + \mathsf{B}\,\eta_2^i \text{ ist die Schmiegungsebene der } \lambda^p\text{-Nullinie.} \end{cases}$$

Nun sei $\tilde{F}_2$ eine Fläche im R_4, $(\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(y_1\, y_2),\ i = 1, \ldots, 4)$, deren System von Tangentialebenen im Schnitte mit dem R_3^∞ das Strahlensystem $\bar{\mathfrak{v}}:(\eta_1^i\, \eta_2^i)$ ergibt. Die gegebene Fläche F_2 und diese Fläche sind dann punktweise so zugeordnet, daß in entsprechenden Punkten die Tangentialebene der $\tilde{F}_2$ der Schmiegungsebene der λ^p-Nullinie der F_2 parallel ist.

Für die $\tilde{F}$ gilt nach Voraussetzung

$$(66) \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p} = \tilde{E}_p\, \eta_1^i + \tilde{F}_p\, \eta_2^i$$

deren Integrabilitätsbedingung $\tilde{E}_p = \tilde{e}\,\lambda_p$, $\tilde{F}_p = \tilde{f}\mu_p$ ergibt. Da die beiden Flächen F_2 und $\tilde{F}_2$ proportionale Ausgangsformen besitzen, so sind

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p}\lambda^p = \tilde{f}\eta_2^i \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p}\mu^p = \tilde{e}\,\eta_1^i$$

die beiden Nullrichtungen der $\tilde{F}_2$. Die Schmiegungsebene der μ^p-Nullrichtung der $\tilde{F}_2$ wird demnach durch die Vektoren η_1^i und $\frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0$, mod $(\xi_1^i \eta_1^i)$, also durch die Vektoren ξ_1^i, η_1^i aufgespannt und ist somit dem y_1 parallel. *Zwei solche Flächen F_2 und $\tilde{F}_2$ wollen wir konjugierte Flächen nennen.*

Stehen demnach zwei Flächen in der Beziehung, daß in entsprechenden Punkten die Schmiegungsebene der λ^p- (resp. μ^p)-Nullinie der ersten der Tangentialebene der zweiten parallel ist, so ist auch umgekehrt die Schmiegungsebene der μ^p- (resp. λ^p)-Nullinie der zweiten in entsprechenden Punkten der Tangentialebene der ersten parallel.

Dieser Satz entspricht der Tatsache, daß im R_3^∞ die Strahlensysteme $\mathfrak{p}:(\xi_1^i \eta_1^i)$ und $\mathfrak{v}:(\xi_1^i \xi_2^i)$ in konjugierten Richtungen die gemeinsame Mantelfläche ξ_1^i tangieren.

Ohne Beweis führen wir den Satz an: Die Schmiegungsebenen der Nullinien in einem Punkte P der F_2 schneiden die im Abschnitt I definierten Normalebenen in den Asymptoten des Kegelschnittes $\eta_{pq}^i \frac{dy_p}{ds} \frac{dy_q}{ds}$.

Wir bringen nun einige ganz einfache Sätze über Parallelflächen.

Seien $x_i = x_i(y_1 y_2)$ und $\tilde{x}_i = \tilde{x}(y_1 y_2)$ zwei Parallelflächen, so gilt bei geeigneter Wahl der Parameter $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p} = \mathsf{M}_p^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r}$. Als ersten Satz sprechen wir aus:

Jede Parallelfläche einer F_2, die ganz in einem R_3 des R_4 liegt, liegt ganz in einem diesem R_3 parallelen R_3. Sei $\tilde{x}_i$ die gegebene F_2, sie liegt in einem R_3, heißt dann: $a_i \tilde{x}_i = a$. Daraus folgt

$$a_i \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p} = \left(a_i \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\right) \mathsf{M}_p^r = 0,$$

und da $|\mathsf{M}_p^r| \neq 0$ sein muß, $a_i \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = 0$, also $a_i x_i = b$, q. e. d.

Aus der Tatsache nun, daß das Verschwinden der Ausgangsform die F_2 charakterisiert, die ganz in einem R_3 liegen und die Torsen des R_4 und aus dem eben bewiesenen Satze folgt:

Jede Parallelfläche einer Torse des R_4, die in keinem R_3 liegt, ist wieder eine solche Torse.

Wegen (64) gelten für Parallelflächen x_i und $\tilde{x}_i$ die Beziehungen

$$(67) \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_r} \lambda^r = \mathsf{A} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \lambda^r, \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_r} \mu^r = \mathsf{B} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \mu^r.$$

Führen wir das Parametersystem y_1, y_2 ein, für das $\lambda^2 = \mu^1 = 0$ ist, d. h. wählen wir als Parameterlinien die Nullinien, so erhalten wir statt (67)

$$(67') \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_1} = \mathsf{A} \frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_2} = \mathsf{B} \frac{\partial x_i}{\partial y_2}.$$

Für $B_{pq} = \lambda_p \mu_q - \lambda_q \mu_p$ erhalten wir

$$B_{11} = B_{22} = 0, \quad B_{12} \neq 0.$$

Flächen, für die der Vektor ζ^i verschwindet, entsprechen dem System partieller Differentialgleichungen (I. Abschnitt (7)).

$B^{pq}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \left\{ {p\,q \atop r} \right\}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\right) = 0$, haben also in unserem Parametersystem das System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} = 0.$$

Sei nun $\tilde{x}_i$ eine solche Fläche, gelte also für unser Parametersystem $\frac{\partial^2 \tilde{x}_i}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$. Aus (67′) folgt dann für Parallelflächen von $\tilde{x}_i$:

$$\mathsf{A}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial A}{\partial y_2}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = 0, \qquad \mathsf{B}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial B}{\partial y_1}\frac{\partial y_i}{\partial z_2} = 0.$$

Wegen $B_{pq} \neq 0$ kann es aber nur eine solche Beziehung $B^{pq}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \equiv 0$, mod $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\right)$ geben, somit ist $A = A(y_1)$, $B = B(y_2)$ und $\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$, d. h.:

Verschwindet für eine Fläche F_2 der Vektor ξ^i $(B^p = 0)$, so verschwindet er auch für die Parallelflächen dieser Fläche, d. h. die Parallelflächen von Schiebflächen des R_4 sind wieder Schiebflächen.

Für das Parametersystem der Nullinien lautet das System der partiellen Differentialgleichungen der Flächen, für die $B = B_{pq} B^p B^q = 0$ ist:

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \mathsf{M}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = 0.$$

Aus (67′) folgt für die Parallelfläche $x_i(y_1\, y_2)$:

$$\mathsf{A}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\frac{\partial A}{\partial y_2} + \mathsf{M}A\right)\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = 0,$$

also gilt der Satz:

Parallelflächen von Flächen, für die $B = 0$ ist, sind Flächen derselben Eigenschaft.

Die beiden letzten Sätze werden evident durch die folgende Überlegung.

Wir haben in Formel (47) $\beta \neq 0$ vorausgesetzt, um die für $\beta = 0$ eintretende Ausartung der Mantelfläche ξ_1^i in eine Kurve auszuschalten. Wir wollen nun untersuchen, welche Flächen F_2 im R_4 durch die Voraussetzung $\beta \neq 0$, also Mantelfläche ξ_1^i keine Kurve, dem Bereich unserer Untersuchungen entzogen wurden.

Wegen

$$\text{(64)} \qquad \xi_1^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\tilde{\mu}^p, \qquad \left(\tilde{\mu}^p = \frac{1}{e}\mu^p\right)$$

gilt

$$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_q}\lambda^q = \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^q \tilde{\mu}^p + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\left(\frac{\partial \tilde{\mu}^p}{\partial y_q}\right)_R \lambda^q, \tag{68}$$

wobei das R rechts unten die Ricci-Ableitung in bezug auf irgendeine Ausgangsform B^{pq} andeute. Aus $B_{pq}\tilde{\mu}^p\tilde{\mu}^q = 0$ folgt aber $\left(\frac{\partial \tilde{\mu}^p}{\partial y_q}\right)_R = h_q \tilde{\mu}^p$, daher aus (68)

$$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_q}\lambda^q \equiv \sigma\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R B^{pq} = \sigma \frac{\partial x_i}{\partial y_r} B^r,\ ^{5)} \bmod \xi_1^i, \tag{69}$$

folgt. Ebenso gilt natürlich

$$\frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_q}\mu^q \equiv \bar{\sigma}\frac{\partial x_i}{\partial y_r} B^r, \bmod \eta_1^i. \tag{69'}$$

Aus (47) folgt nun, daß $\beta = 0$: $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0$, mod ξ_1^i, also (69) $\frac{\partial x_i}{\partial y_r} B^r \equiv 0$, mod ξ_1^i, somit $B^r = \bar{\varrho}\mu^r$ zur Folge hat, und umgekehrt folgt aus $B^r = \bar{\varrho}\mu^r$, $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0$, mod ξ_1^i, also $\beta = 0$. Wir fassen zusammen:

$\beta = 0$ hat $B^r = \bar{\varrho}\mu^r$ zur Folge und umgekehrt, $\alpha = 0$ hat $B^r = \varrho\lambda^r$ zur Folge und umgekehrt.

Ist somit $B^r = 0$, so arten beide Mantelflächen in Kurven aus, ist $B = 0$, so ist B^r entweder λ^r oder μ^r proportional, und eine Mantelfläche ist eine Kurve. Die Umkehrung besagt: Ist eine der Mantelflächen eine Kurve, so ist $B = 0$, sind beide Mantelflächen Kurven, so ist $B^r = 0$.

Bemerkung. Das System der Differentialgleichungen der Flächen $B^r = 0$ läßt sich für das Parametersystem der Nullinien sofort integrieren, die Gleichung der betreffenden Flächen hat die Gestalt: $x_i = \Phi_i(y_1) + \Psi_i(y_2)$.

Ebenso einfach ist die Integration für die F_2, für die $B = 0$ ist, man erhält: $x_i = y_2\,\Phi_i(y_1) + \Psi_i(y_2)$. Die direkte Diskutierung dieser Flächen ergibt ebenfalls das obige Resultat.

Wir leiten zum Schlusse aus (61) durch Ricci-Ableitung ab:

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R = \left(\frac{\partial \lambda_p}{\partial y_q}\right)_R e\,\xi_1^i + \left(\frac{\partial \mu_p}{\partial y_q}\right)_R f\,\eta_1^i + \lambda_p \frac{\partial e}{\partial y_q}\xi_1^i + \mu_p \frac{\partial f}{\partial y_q}\eta_1^i$$
$$+ e\,\lambda_p(\mathsf{A}_q \xi_1^i + \mu_q \eta_1^i + \lambda_q \xi_2^i) + f\mu_p(\lambda_q \xi_1^i + \mathsf{B}_q \eta_1^i + \mu_q \eta_2^i).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2}\zeta^i = \frac{B^{pq}}{2}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R = \alpha\,\mu^p\lambda^q\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R$$
$$= \alpha\left[\xi_1^i\left\{\left(\frac{\partial \lambda_p}{\partial y_q}\right)_R e\,\mu^p\lambda^q + \lambda^q\frac{\partial e}{\partial y_q} + e\,\lambda^q \mathsf{A}_q\right\} + e\,\eta_1^i\right],$$

---

[5]) Da B^{pq} proportional $\lambda^p\tilde{\mu}^q + \lambda^q\tilde{\mu}^p$ ist, und wegen (7).

und wegen der Integrabilitätsbedingungen (62):

$$\zeta^i = \alpha(f\xi_1^i + e\eta_1^i) \tag{70}$$

§ 3.

Ebenensysteme im R_4.

Das System der Tangentialebenen einer F_2 oder das System der Schmiegungsebenen der λ^p- (resp. μ^p-)Nullinien oder das im ersten Abschnitt definierte System der Affinnormalebenen sind Beispiele einer von zwei Parametern y_1, y_2 abhängigen Mannigfaltigkeit von Ebenen E_2.

Unter einem Ebenensysteme E_2 wollen wir im allgemeinen eine von zwei Parametern abhängige Mannigfaltigkeit von Ebenen E_2 verstehen.

Wir können jede E_2 des Systems durch ihren Schnittpunkt mit einer Leitfläche

$$x_i = x_i(y_1 y_2) \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{71}$$

und zwei Vektoren ${}_{(1)}\lambda^i(y_1, y_2)$, ${}_{(2)}\lambda^i(y_1, y_2)$ dieser E_2 in der Form

$$\xi^i = x_i + \alpha\,{}_{(1)}\lambda^i + \beta\,{}_{(2)}\lambda^i \tag{72}$$

darstellen. Wir denken uns dabei die Leitfläche (71) so gelegt, daß ihre Tangentialebene keinen Vektor mit der E_2 gemeinsam hat, d. h. wir setzen:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\,{}_{(1)}\lambda^i\,{}_{(2)}\lambda^i\right) \neq 0 \tag{73}$$

voraus. Wir zeigen später, daß für jedes Ebenensystem eine solche Leitfläche gefunden werden kann. Für die Ableitungen der Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$, $\frac{\partial x_i}{\partial y_2}$, ${}_{(1)}\lambda^i$, ${}_{(2)}\lambda^i$ verwenden wir die Bezeichnungen des Systems (19).

Das Ebenensystem (72) wird vom R_3^∞ in einem Strahlensystem geschnitten, dessen Grundform $\left({}_{(1)}\lambda^i\,{}_{(2)}\lambda^i\,\frac{\partial\,{}_{(1)}\lambda^i}{\partial y_p}\,\frac{\partial\,{}_{(2)}\lambda^i}{\partial y_q}\right) dy_p\,dy_q$ nach (19) die Gestalt hat

$$S_{(pq)}\,dy_p\,dy_q = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\sigma_p^1\,dy_p & {}_{(2)}\sigma_p^1\,dy_p \\ {}_{(1)}\sigma_p^2\,dy_p & {}_{(2)}\sigma_p^2\,dy_p \end{vmatrix}. \tag{74}$$

Setzen wir $|S_{(pq)}| \neq 0$ voraus und bezeichnen wir mit τ_1^p, τ_2^p die beiden Nullrichtungen der Form (74), so gibt es für jede dieser Richtungen τ_r^p $(r = 1, 2)$ zwei bis auf einen Faktor bestimmte nicht zugleich verschwindende Größen α_r, β_r, daß (für τ_1^p)

$$[\alpha_1\,{}_{(1)}\sigma_p^r + \beta_1\,{}_{(2)}\sigma_p^r]\,\tau_1^p = 0 \tag{75}$$

ist. Daraus folgt, daß α_1, β_1 resp. α_2, β_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha\,{}_{(1)}\sigma_1^1 + \beta\,{}_{(2)}\sigma_1^1 & \alpha\,{}_{(1)}\sigma_2^1 + \beta\,{}_{(2)}\sigma_2^1 \\ \alpha\,{}_{(1)}\sigma_1^2 + \beta\,{}_{(2)}\sigma_1^2 & \alpha\,{}_{(1)}\sigma_2^2 + \beta\,{}_{(2)}\sigma_2^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{76}$$

sind. Wegen (75) gilt weiter:

$$\alpha_1\left({}_{(1)}\lambda^i + \frac{\partial\,{}_{(1)}\lambda^i}{\partial y_p}\tau_1^p\right) + \beta_1\left({}_{(2)}\lambda^i + \frac{\partial\,{}_{(2)}\lambda^i}{\partial y_p}\tau_1^p\right) \equiv 0, \ \bmod\left({}_{(1)}\lambda^i,\ {}_{(2)}\lambda^i\right),$$

also ist $\alpha_1\,{}_{(1)}\lambda^i + \beta_1\,{}_{(2)}\lambda^i$ der Schnittpunkt unendlich benachbarter Strahlen, die den Parameterwerten $y_p, y_p + \varepsilon\tau_1^p$ entsprechen, für $\lim \varepsilon \to 0$, und $\alpha_2\,{}_{(1)}\lambda^i + \beta_2\,{}_{(2)}\lambda^i$ der Schnittpunkt unendlich benachbarter Strahlen, die den Parameterwerten $y_p, y_p + \varepsilon\tau_2^p$ entsprechen, für $\lim \varepsilon \to 0$.

Nun wollen wir das Ebenensystem (72) im R_4 betrachten.

Je zwei E_2 schneiden sich im R_4 in einem Punkte. Wir wollen ein den Parameterwerten y_1, y_2 entsprechende E_2 (72) mit der den Parameterwerten $y_1 + dy_1$, $y_2 + dy_2$ entsprechenden zum Schnitte bringen und die Grenzlage des Schnittpunktes für $\lim dy_p \to 0$ bestimmen.

Dieser Grenzpunkt ist von der Richtung $\frac{dy_1}{dy_2} = t$ abhängig und beschreibt, wie wir nun zeigen, in der E_2 (72) einen Kegelschnitt, dessen Asymptotenrichtungen die Richtungen $\alpha_r\,{}_{(1)}\lambda^i + \beta_r\,{}_{(2)}\lambda^i$ $(r = 1, 2)$ sind, sobald $\frac{dy_1}{dy_2}$ alle Richtungen der Leitfläche im Punkte y_1, y_2 durchläuft.

Sei also

$$x_i + \tilde{\alpha}\,{}_{(1)}\lambda^i + \tilde{\beta}\,{}_{(2)}\lambda^i \tag{77}$$

die den Parameterwerten y_1, y_2 entsprechende E_2, so ist die den Parameterwerten $y_1 + dy_1$, $y_2 + dy_2$ entsprechende unendlich benachbarte durch

$$x_i + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}dy_p + \alpha\left({}_{(1)}\lambda^i + \frac{\partial\,{}_{(1)}\lambda^i}{\partial y_p}dy_p\right) + \beta\left({}_{(2)}\lambda^i + \frac{\partial\,{}_{(2)}\lambda^i}{\partial y_p}dy_p\right) \tag{77'}$$

gegeben. Für den Schnittpunkt der beiden E_2 haben wir aus der Relation

$$\begin{aligned} &x_i + \tilde{\alpha}\,{}_{(1)}\lambda^i + \tilde{\beta}\,{}_{(2)}\lambda^i \\ &= x_i + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}dy_p + \alpha\left({}_{(1)}\lambda^i + \frac{\partial\,{}_{(1)}\lambda^i}{\partial y_p}dy_p\right) + \beta\left({}_{(2)}\lambda^i + \frac{\partial\,{}_{(2)}\lambda^i}{\partial y_p}dy_p\right)\end{aligned} \tag{78}$$

die Größen α, β, $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ zu berechnen und $\lim\limits_{dy_p=0}\tilde{\alpha}$, $\lim\limits_{dy_p=0}\tilde{\beta}$ zu bestimmen.

Wegen (19) zerfällt (78) in:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= dy_1 + \alpha\,{}_{(1)}\sigma_p^1\,dy_p + \beta\,{}_{(2)}\sigma_p^1\,dy_p, \\ 0 &= dy_2 + \alpha\,{}_{(1)}\sigma_p^2\,dy_p + \beta\,{}_{(2)}\sigma_p^2\,dy_p, \\ \tilde{\alpha} &= \alpha + \alpha\,{}_{(11)}C_p\,dy_p + \beta\,{}_{(21)}C_p\,dy_p, \\ \tilde{\beta} &= \beta + \alpha\,{}_{(12)}C_p\,dy_p + \beta\,{}_{(22)}C_p\,dy_p. \end{aligned}\right. \tag{79}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (79) schließen wir $\lim\limits_{dy_p=0}\tilde{\alpha} = \alpha$, $\lim\limits_{dy_p=0}\tilde{\beta} = \beta$, während die beiden ersten Gleichungen (79) zur Berechnung von α und β als Funktion von $t = \frac{dy_1}{dy_2}$ dienen. Für die Werte $\frac{dy_1}{dy_2}$, für die $S_{(pq)}\,dy_p\,dy_q \neq 0$ ist, erhalten wir endliche Werte α und β, die, die ersten zwei Gleichungen (79) nach dy_1, dy_2 geordnet, auf dem Kegelschnitte

$$(80)\qquad \begin{vmatrix} 1+\alpha\,{}_{(1)}\sigma_1^1+\beta\,{}_{(2)}\sigma_1^1 & \alpha\,{}_{(1)}\sigma_2^1+\beta\,{}_{(2)}\sigma_2^1 \\ \alpha\,{}_{(1)}\sigma_1^2+\beta\,{}_{(2)}\sigma_1^2 & 1+\alpha\,{}_{(1)}\sigma_2^2+\beta\,{}_{(2)}\sigma_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

liegen.

Die Gleichung (76) gibt die Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes, die Schnittpunkte mit der unendlich entfernten Geraden entsprechen dem Werte dy_p, für die $S_{(pq)}\,dy_p\,dy_q = 0$ ist, also den Werten τ_1^p und τ_2^p. ($|S_{(pq)}| = 0$ heißt, daß der Kegelschnitt eine Parabel ist.)

Bezeichnen wir die (79) genügenden Werte α und β in ihrer Abhängigkeit von $t = \frac{dy_1}{dy_2}$ mit $\alpha(t)$, $\beta(t)$ [6]), so stellt

$$(81)\qquad \xi^i = x_i(y_1\,y_2) + \alpha(t)\,{}_{(1)}\lambda^i(y_1\,y_2) + \beta(t)\,{}_{(2)}\lambda^i(y_1\,y_2)$$

eine F_3 dar, die wir die *Brennfläche des gegebenen Ebenensystems* nennen wollen.

Fixieren wir einen Punkt P $(y_1, y_2, t = y_3)$ der Brennfläche, so beweisen wir, daß die E_2: $x_i(y_1\,y_2) + \mathsf{A}\,{}_{(1)}\lambda^i(y_1\,y_2) + \mathsf{B}\,{}_{(2)}\lambda^i(y_1\,y_2)$ im Punkte P die Brennfläche tangiert.

Dies ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß es in P zwei in der E_2 liegende Tangenten der F_3 (81) gibt. Eine Tangente der F_3 (81) ist durch $\xi^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\varrho^p$, $p = 1, 2, 3$, gegeben.

Nun ist $\frac{\partial \xi^i}{\partial y_3} = \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \equiv 0$, $\mod({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i)$, somit liegt die Tangente $\xi^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial y_3}\mu$ tatsächlich in der E_2, sie ist daselbst die Tangente an dem Kegelschnitt (80).

Ferner gilt für $\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}$ $(p = 1, 2)$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial y_p} + \left(\alpha(t)\,{}_{(1)}\sigma_p^r + \beta(t)\,{}_{(2)}\sigma_p^r\right)\frac{\partial x_i}{\partial y_r}, \quad \mod({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i).$$

Für $\frac{dy_1}{dy_2} = t$ und nur für diese Richtung folgt daraus

$$(82)\qquad \sum_{p=1}^{2}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}dy_p \equiv \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\left(dy_r + \alpha(t)\,{}_{(1)}\sigma_p^r\,dy_p + \beta(t)\,{}_{(2)}\sigma_p^r\,dy_p\right) \equiv 0, \quad \mod({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i).$$

Somit ist die Tangente $\xi^i + \sum_{p=1}^{2}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\varrho^p \left(\frac{\varrho^1}{\varrho^2} = t\right)$ ebenfalls in der E_2 gelegen.

---

[6]) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ hängen außer von t von y_1 und y_2 ab.

Wären diese beiden Tangenten nicht unabhängig, so müßte eine Relation der Form

(83) $$\Phi_1 \frac{\partial \xi^i}{\partial y_1} + \Phi_2 \frac{\partial \xi^i}{\partial y_2} + \Phi_3 \frac{\partial \xi^i}{\partial y_3} = 0 \qquad (i = 1 \dots 4)$$

bestehen, dann aber folgt aus diesem System partieller Differentialgleichungen, daß ξ^i eine Funktion von nur zwei Parametern wäre, also die Brennfläche eine F_2. *Solche Ebenensysteme, deren Brennfläche eine F_2 ist, wollen wir ausgeartet nennen. Für nicht ausgeartete Ebenensysteme tangiert jede Ebene des Systems die Brennfläche in jedem gemeinsamen Punkt.*

Dies zeigt die völlige Analogie mit den Strahlungssystemen des R_3.

Ein solches Strahlungssystem ergibt auch der Schnitt des Ebenensystems mit jedem R_3 des R_4, *dabei wird der Schnitt der Brennfläche des Ebenensystems mit dem R_3 die Brennfläche des Strahlensystems.*

Von besonderem Interesse sind *die ausgearteten Ebenensysteme*, für die α und β von t unabhängig sind. *Die Brennfläche*

$$\xi^i(y_1 y_2) = x_i(y_1 y_2) + \alpha\, {}_{(1)}\lambda^i(y_1 y_2) + \beta\, {}_{(2)}\lambda^i(y_1 y_2)$$

wird in diesem Falle von den Ebenen des Systems eingehüllt.

Dies folgt aus (82), da hier $\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} dy_p \equiv 0$, $\mathrm{mod}({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i)$, für jede Richtung dy_p gilt.

Sind ξ_1^i und η_1^i die Nullrichtungen der Brennfläche, die wieder $x_i = x_i(y_1 y_2)$ bezeichnet sei, so ist

(84) $$x_i + \mathsf{A}\, \xi_1^i + \mathsf{B}\, \eta_1^i$$

das ausgeartete Ebenensystem.

$$x_i + (e\lambda_p \xi_1^i + f\mu_p \eta_p^i)\, dy_p + \tilde{\mathsf{A}}\, [\xi_1^i + (\mathsf{A}_p \xi_1^i + \mu_p \eta_1^i + \lambda_p \xi_2^i)\, dy_p]$$
$$+ \tilde{\mathsf{B}}\, [\eta_1^i + (\lambda_p \xi_1^i + \mathsf{B}_p \eta_1^i + \mu_p \eta_2^i)\, dy_p]$$

ist die unendlich benachbarte, den Parameterwerten $y_1 + dy_1$, $y_2 + dy_2$ entsprechende Ebene der E_2 (84). Daraus erhalten wir für den Schnittpunkt die vier Gleichungen:

$$\begin{cases} A = \tilde{A} + (e\lambda_p + A_p \tilde{A} + \lambda_p \tilde{B}), \\ B = \tilde{B} + (f\mu_p + \mu_p \tilde{A} + B_p \tilde{B}), \\ 0 = \tilde{A}\lambda_p dy_p, \quad 0 = \tilde{B}\mu_p dy_p. \end{cases}$$

Für $dy_p \neq \lambda^p, \mu^p$ ist $\tilde{A} = \tilde{B} = 0$, also $\lim\limits_{dy_p=0} A = \lim\limits_{dy_p=0} B = 0$, für $dy_p = \lambda^p$ folgt $\lim B = 0$, A beliebig, für $dy_p = \mu^p$ folgt $\lim A = 0$, B beliebig. Wir erhalten somit als Schnittbild den Punkt x_i der F_2 und die Geraden $x_i + \xi_1^i \mu$, $x_i + \eta_1^i \mu$, die die Nullinien tangieren. $A = B = 0$, d. h. unabhängig von t, zeigt, *daß nur ausgeartete Ebenensysteme eine F_2 einhüllen.*

Ein sehr schönes Resultat ergibt die Diskussion des Systems der Schmiegungsebenen der Nullinien. Wir untersuchen das System der Schmiegungsebenen der μ^p-Nullinien (65)

$$(85) \qquad x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\xi_2^i.$$

Die den Parameterwerten $y_1 + dy_1$, $y_2 + dy_2$ entsprechende unendlich benachbarte E_2 ist:

$$x_i + (e\lambda_p \xi_1^i + f\mu_p \eta_1^i)\,dy_p + \tilde{\mathsf{A}}\,[\xi_1^i + (\mathsf{A}_p \xi_1^i + \mu_p \eta_1^i + \lambda_p \xi_2^i)\,dy_p]$$
$$+ \tilde{\mathsf{B}}\,[\xi_2^i + (\mathsf{M}_p \xi_1^i + n\lambda_p \eta_1^i + R_p \xi_2^i + t\lambda_p^r \eta_2^i)\,dy_p].$$

Dies ergibt für den Schnittpunkt die vier Gleichungen:

$$\begin{cases} \mathsf{A} = \tilde{\mathsf{A}} + (e\lambda_p + \tilde{\mathsf{A}}\,\mathsf{A}_p + \tilde{\mathsf{B}}\,\mathsf{M}_p)\,dy_p, \\ B = \tilde{B} + (\tilde{\mathsf{A}}\,\lambda_p + \tilde{\mathsf{B}}\,R_p)\,dy_p, \\ 0 = f\mu_p\,dy_p + \tilde{\mathsf{A}}\,\mu_p\,dy_p + \tilde{\mathsf{B}}\,n\lambda_p\,dy_p, \quad 0 = \tilde{B}\,t\,\lambda_p\,dy_p. \end{cases}$$

Für $dy_p \neq \lambda^p, \mu^p$ folgt $\tilde{B} = 0$, $\tilde{A} = -f$ also $\lim A = -f$, $\lim B = 0$
für $dy_p = \lambda^p$ ist $\tilde{A} = -f$, $\tilde{B}$ beliebig, also $\lim A = -f$, B beliebig,
für $dy_p = \mu^p$ ist $\tilde{B} = 0$, $\tilde{A}$ beliebig, also $\lim B = 0$, A beliebig.

Wir haben den ausgearteten Fall vor uns und wissen daher, daß das System der Schmiegungsebenen (85) die F_2

$$(86) \qquad z_i = x_i - f\xi_1^i$$

einhüllt. Dies ergibt auch die direkte Rechnung. Wir erhalten in der Tat aus (86):

$$(87) \qquad \frac{\partial z_i}{\partial y_p} = (e\lambda_p \xi_1^i + f\mu_p \eta_1^i) - f(A_p \xi_1^i + \mu_p \eta_1^i + \lambda_p \xi_2^i) - \frac{\partial f}{\partial y_p}\xi_1^i$$
$$= \xi_1^i\Big(e\lambda_p - fA_p - \frac{\partial f}{\partial y_p}\Big) - \xi_2^i f\lambda_p.$$

Die Schmiegungsebenen der μ^p-Nullinien (85) *einer F_2 hüllen die der F_2 konjugierten Fläche* (86) *ein, die Schmiegungsebenen der λ^p-Nulllinien der F_2 hüllen die konjugierte Fläche*

$$(88) \qquad \tilde{z}_i = x_i - e\eta_1^i$$

ein. Umgekehrt: Die Schmiegungsebenen der λ^p-Nullinien der F_2 (86) *hüllen wieder ihrerseits die Ausgangs-F_2: $x_i = x_i(y_1 y_2)$ ein.* (Analog für die F_2 (88).) *Wenn wir jetzt zeigen, daß es neben den Nullinien keine Kurvenscharen auf der F_2 gibt, deren Schmiegungsebenen eine F_2 einhüllen, so ist damit der projektive Charakter der Nullinien, sowie der Flächen $z_i = x_i - f\xi_1^i$, $\tilde{z}_i = x_i - e\eta_1^i$ bewiesen.*

Sei also auf der F_2 $\sigma^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\varrho^p$ der Richtungsvektor einer solchen

Kurvenschar. Wir untersuchen das System der Schmiegungsebenen dieser Kurvenschar und bezeichnen

$$(89)\qquad {}_{(2)}\lambda^i = \frac{\partial}{\partial y_q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\varrho^p\right)\varrho^q,$$

so daß das System dieser Schmiegungsebenen durch

$$(90)\qquad \xi^i = x_i + \mathsf{A}\,\sigma^i + \mathsf{B}\,{}_{(2)}\lambda^i$$

gegeben ist. Da wegen (89) ${}_{(2)}\lambda^i \equiv \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q}\varrho^p\varrho^q$, mod $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\right)$ ist, und $B^{pq} \neq u\varrho^p\varrho^q$ wegen $|B^{pq}| \neq 0$ ist, so liegt ${}_{(2)}\lambda^i$ sicher nicht in der Tangentialebene der gegebenen Fläche. Wir nehmen nun in jedem Punkte der F_2 einen Vektor ${}_{(1)}\lambda^i$, der nur der Voraussetzung $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\,{}_{(1)}\lambda^i\,{}_{(2)}\lambda^i\right) \neq 0$ zu genügen hat. Für die Ableitungen der vier Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$, $\frac{\partial x_i}{\partial y_2}$, ${}_{(1)}\lambda^i$, ${}_{(2)}\lambda^i$ verwenden wir wieder die Bezeichnungen des Systems (19). Aus (89) folgt

$$(91)\qquad {}_{(2)}\lambda^i = \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q}\right)_\Gamma \varrho^p\varrho^q + \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\left(\frac{\partial\varrho^r}{\partial y_q}\right)_\Gamma \varrho^q,$$

wobei

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q}\right)_\Gamma = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q} - \Gamma^r_{pq}\frac{\partial x_i}{\partial y_r}$$

und

$$\left(\frac{\partial\varrho^r}{\partial y_q}\right)_\Gamma = \frac{\partial\varrho^r}{\partial y_q} + \Gamma^r_{pq}\varrho^q$$

bedeutet. Wegen $\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q}\right)_\Gamma = {}_{(\alpha)}B_{pq}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i$ (19), hat (91) dann

$$(92)\qquad 0 = {}_{(1)}B_{pq}\,\varrho^p\varrho^q, \qquad 1 = {}_{(2)}B_{pq}\,\varrho^p\varrho^q, \qquad 0 = \left(\frac{\partial\varrho^r}{\partial y_q}\right)_\Gamma\varrho^q$$

zur Folge.

Nach dieser Vorbereitung bilden wir den Schnitt zweier unendlich benachbarter Systemebenen (90):

Wir haben wie immer das System

$$\begin{aligned} x_i + \mathsf{A}\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\varrho^p + \mathsf{B}\,{}_{(2)}\lambda^i &= x_i + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}dy_p + \tilde{\mathsf{A}}\left[\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\varrho^p + \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q}\right)_\Gamma\varrho^p\,dy_q + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\left(\frac{\partial\varrho^r}{\partial y_q}\right)_\Gamma dy_q\right] \\ &\quad + \tilde{\mathsf{B}}\left[{}_{(2)}\lambda^i + {}_{(2)}\sigma^r_p\frac{\partial x_i}{\partial y_r}dy_p + {}_{(2\beta)}C_p\,dy_p\,{}_{(\beta)}\lambda^i\right] \end{aligned}$$

nach den vier Größen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \tilde{\mathsf{A}}$ und $\tilde{\mathsf{B}}$ aufzulösen und $\lim\limits_{dy_p=0}\mathsf{A}$, $\lim\limits_{dy_p=0}\mathsf{B}$ zu berechnen.

Die obige Relation ist nun äquivalent dem System:

$$(92')\qquad \left\{\begin{aligned} \mathsf{A}\varrho^r &= \tilde{\mathsf{A}}\varrho^r + \left[dy_r + \tilde{\mathsf{A}}\left(\frac{\partial\varrho^r}{\partial y_q}\right)_\Gamma dy_q + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(2)}\sigma^r_q\,dy_q\right] \qquad (r = 1, 2) \\ 0 &= \tilde{\mathsf{A}}\,{}_{(1)}B_{pq}\,\varrho^p\,dy_q + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(21)}C_q\,dy_q \\ \mathsf{B} &= \tilde{\mathsf{B}} + \tilde{\mathsf{A}}\,{}_{(2)}B_{pq}\,\varrho^p\,dy_q + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(22)}C_q\,dy_q, \end{aligned}\right.$$

woraus sofort $\lim \mathsf{A} = \tilde{\mathsf{A}}$, $\lim \mathsf{B} = \tilde{\mathsf{B}}$ folgt. Zu ϱ^p gibt es einen (bis auf einen Faktor bestimmten) kovarianten Vektor τ_p, daß

$$\varrho^p \tau_p = 0 \tag{93}$$

ist. Mit Hilfe von τ_p ergibt (92'):

$$\left\{\begin{aligned} &\left[dy_r + \tilde{\mathsf{A}}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_q}\right)_\Gamma dy_q + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(2)}\sigma_q^r\, dy_q\right] \tau_r = 0 \\ &\tilde{\mathsf{A}}\,{}_{(1)}B_{pq}\, \varrho^p\, dy_q + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(21)}C_q\, dy_q = 0, \end{aligned}\right. \tag{94}$$

aus welchem Systeme nun $\tilde{\mathsf{A}}$ und $\tilde{\mathsf{B}}$ zu berechnen ist.

Ordnen wir die Gleichungen (94) nach dy_1, dy_2, so erhalten wir für den Schnittkegelschnitt:

$$\begin{vmatrix} \tau_1 + \left[\tilde{\mathsf{A}}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_1}\right)_\Gamma + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(2)}\sigma_1^r\right]\tau_r & \tau_2 + \left[\tilde{\mathsf{A}}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_2}\right)_\Gamma + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(2)}\sigma_2^r\right]\tau_r \\ \tilde{\mathsf{A}}\,{}_{(1)}B_{p1}\,\varrho^p + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(21)}C_1 & \tilde{\mathsf{A}}\,{}_{(1)}B_{p2}\,\varrho^p + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(21)}C_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{95}$$

Multiplizieren wir die erste Spalte der Determinante (95) mit ϱ^1 und die zweite mit ϱ^2 und addieren wir dann zur ersten die zweite Spalte, so ergibt dies wegen (92) und (93):

$$\begin{vmatrix} \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(2)}\sigma_t^r\,\varrho^t\,\tau_r & \tau_2 + \tilde{\mathsf{A}}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_2}\right)_\Gamma \tau_r + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(2)}\sigma_2^r\,\tau_r \\ \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(21)}C_t\,\varrho^t & \tilde{\mathsf{A}}\,{}_{(1)}B_{p2}\,\varrho^p + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(21)}C_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{96}$$

d. h. *der Schnittkegelschnitt zerfällt in zwei Gerade, deren eine* $\tilde{\mathsf{B}} = 0$, *also* $x_i + \mathsf{A}\sigma^i$, *die Tangente an die Kurve der Schar ist.*

Nun sind wir in der Lage zu zeigen, daß das Ebenensystem (90) nur für die Nullinien ausgeartet ist, d. h. eine F_2 einhüllt. Soll das Ebenensystem ausgeartet sein, so müsseu sich aus (94) die Größen $\tilde{\mathsf{A}}$ und $\tilde{\mathsf{B}}$ von $t = \frac{dy_1}{dy_2}$ unabhängig berechnen lassen, es müssen daher die Koeffizienten von dy_1, dy_2 dieser zwei Gleichungen, das sind die Elemente der Determinante (95) für das gesuchte Wertepaar $\tilde{\mathsf{A}}, \tilde{\mathsf{B}}$ verschwinden. Dann aber muß jedes Element der ersten Spalte von (95) eine lineare Kombination der Elemente der zweiten Spalte sein. Das gleiche gilt dann auch für die Determinante (96), woraus wir als notwendig und hinreichend

$${}_{(1)}B_{p2}\,\varrho^p = 0 \tag{97}$$

schließen. (Wir können immer $\tau_2 \neq 0$ voraussetzen, eventuell durch die Transformation $\bar{y}_1 = y_2$, $\bar{y}_2 = y_1$).

Aus (97) und (92) folgt aber ${}_{(1)}B_{p1}\,\varrho^p = 0$, also gilt

$$\left({}_{(2)}B_{p1}\,{}_{(1)}B_{q2} - {}_{(2)}B_{q2}\,{}_{(1)}B_{p1}\right)\varrho^p\,\varrho^q = 0,$$

d. h.

$$B_{pq}\,\varrho^p\,\varrho^q = 0,$$

d. h. ϱ^p ist eine Nullrichtung q. e. d.

Für die Nullrichtungen ist der Satz aber bewiesen, wir folgern ihn nun auch direkt aus den obigen Überlegungen. Sei $\varrho^p = \lambda^p$. Aus $B_{pq}\lambda^p\lambda^q = 0$ und (92) ${}_{(1)}B_{pq}\lambda^p\lambda^q = 0$ folgt wegen $B^{pq}{}_{(1)}B_{pq} = 0$:

$${}_{(1)}B_{pq} = P\lambda_p\lambda_q + Q\,\mu_p\mu_q + R\,(\lambda_p\mu_q + \lambda_q\mu_p)$$

$Q = R = 0$, also ${}_{(1)}B_{pq}\lambda^q = 0$ und dies war notwendig und hinreichend, daß die Schmiegungsebenen der λ^p Schar ausarten.

Wir notieren als Resultat:

Die Nullinien einer F_2, somit auch die durch die Schmiegungsebenen derselben eingehüllten Flächen sind projektive Invariante.

Bemerkung. Wir haben, so oft wir das Ableitungssystem (51) benützten, stets solche Ebenensysteme vorausgesetzt, deren Schnittgebilde mit dem R_3^∞ ein nicht ausgeartetes Strahlensystem ist. (Die Mantelflächen sind weder Torsen noch Kurven.)

Wir haben (73) vorausgesetzt, daß sich für ein gegebenes Ebenensystem stets eine Leitfläche (71) so angeben läßt, daß (73) gelte.

Würde es eine Leitfläche dieser Art nicht geben, gilt also, wie auch der Punkt ξ^i der Ebene, also α und β als Funktionen von y_1, y_2, gewählt ist, eine Relation

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\varrho^p \equiv 0, \ \operatorname{mod}\,({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i), \tag{98}$$

so zeigen wir, daß das Ebenensystem von nur einem Parameter abhängt, also nach Definition kein Ebenensystem, sondern eine Ebenenschar ist.

Wir nehmen wieder eine Umbezeichnung vor und sei

$$z_i = x_i(y_1\,y_2) + \mathsf{A}\,\xi^i(y_1\,y_2) + \mathsf{B}\,\eta^i(y_1\,y_2)$$

das gegebene Ebenensystem, für das also, wie auch A und B d. h. z_i gewählt sei, ein Vektor $\varrho^p = \varrho^p(A, B)$ existiere, daß $\frac{\partial z_i}{\partial y_p}\varrho^p \equiv 0$, mod (ξ^i, η^i) sei. Wir wählen nun zwei Hilfsvektoren u^i, v^i als Funktionen von y_1, y_2, daß $(\xi^i\eta^i u^i v^i) \neq 0$ sei. Die Ableitungsgleichungen von x_i, ξ^i, η^i lauten dann mod (ξ^i, η^i):

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \equiv m_p u^i + n_p v^i, \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \equiv \alpha_p u^i + \beta_p v^i, \quad \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \equiv \gamma_p u^i + \delta_p v^i, \quad \operatorname{mod}\,(\xi^i, \eta^i), \tag{99}$$

Dies ergibt:

$$\frac{\partial z_i}{\partial y_p} \equiv (m_p + \mathsf{A}\alpha_p + \mathsf{B}\gamma_p)u^i + (n_p + \mathsf{A}\beta_p + \mathsf{B}\delta_p)v^i, \quad \operatorname{mod}\,(\xi^i\eta^i),$$

somit für den Vektor ϱ^p:

$$(m_p + \mathsf{A}\alpha_p + \mathsf{B}\gamma_p)\varrho^p = 0, \qquad (n_p + \mathsf{A}\beta_p + \mathsf{B}\delta_p)\varrho^p = 0,$$

also

$$(100)\qquad m_p + \mathsf{A}\alpha_p + \mathsf{B}\gamma_p = C(\mathsf{A},\mathsf{B})\,(n_p + \mathsf{A}\beta_p + \mathsf{B}\delta_p).$$

In (100) ist $C(\mathsf{A}\mathsf{B}) = \frac{u + \mathsf{A}v + \mathsf{B}w}{\bar{u} + \mathsf{A}\bar{v} + \mathsf{B}\bar{w}}$, multipliziert man den Nenner $\bar{u} + \mathsf{A}\bar{v} + \mathsf{B}\bar{w}$ in (100) weg, so stellt (100), da es für iedes Wertepaar A, B gilt, und $m_p, n_p, \alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p, u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ offensichtlich von A und B unabhängig sind, eine Identität in Form einer bilinearen Gleichung in den A und B dar, deren Koeffizienten also verschwinden. Dies ergibt, daß alle Vektoren $m_p, n_p, \alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ und δ_p proportional sind einem bestimmten Vektor, den wir s_p bezeichnen wollen. Sei dann σ^p der kontravariante Vektor, für den $s_p\sigma^p = 0$ ist, so gilt

$$(101)\qquad \frac{\partial z_i}{\partial y_p}\sigma^p \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi^i, \eta^i),$$

wobei σ^p nur von y_1, y_2, nicht aber von A und B mehr abhängt. Nehmen wir dann eine Parametertransformation $\bar{y}_1 = \bar{y}_1(y_1 y_2)$, $\bar{y}_2 = \bar{y}_2(y_1 y_2)$ vor, für die $\bar{\sigma}^2 = 0$ wird, so lautet (101)

$$(101')\qquad \frac{\partial z_i}{\partial \bar{y}_1} \equiv 0, \quad \mathrm{mod}(\xi^i, \eta^i).$$

Das heißt, daß die Variation von $\bar{y}_1$ die Ebenen des Systems im R_4 invariant läßt, somit hängen diese nur vom Parameter $\bar{y}_2$ ab, q. e. d.

Ein Beispiel eines einparametrigen Ebenen-„Systems" liefern die F_2 im R_4, deren Tangentialebenensystem im Schnitte mit den R_3^∞ ein Strahlensystem bilden, dessen eine Mantelfläche z. B. ξ_1^i eine Torse ist.

Das System der Schmiegungsebenen $x_i + \mathsf{A}\xi_1^i + \mathsf{B}\xi_2^i$ *der* μ^p*-Nulllinien ist einparametrig für Flächen der obigen Eigenschaft.*

Beweis. Wir haben (Formel (49) und Folgerungen) bewiesen, daß mit unserer Annahme die Voraussetzung $t = 0$ identisch ist. Dann ist $T_p = 0$ und die Integrabilitätsbedingung der dritten Gleichung des Systems (48) und zwar der Koeffizient von η_2^i ergibt $N_p = \varkappa\mu_p$, woraus nach (48) und (61)

$$(102)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \qquad \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \qquad \frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi_1^i \xi_2^i),$$

folgt.

Daher gilt für jeden Punkt der Schmiegungsebenen

$$(103)\qquad \zeta^i = x_i + A\xi_1^i + B\xi_2^i, \qquad \frac{\partial \zeta^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi_1^i, \xi_2^i)$$

und dies ist die Bedingung (101), aus der wir sofort unsere Behauptung folgern.

Weiter beweisen wir, daß die μ^p*-Nullinien ebene Kurven* sind. Dies folgt direkt aus der Tatsache, daß das System der Schmiegungsebenen dieser Kurven einparametrig ist, analytisch schließt man dies aus den letzten zwei Gleichungen (102).

Umgekehrt gilt: *Sind die μ^p-Nullinien ebene Kurven,* so bestehen die Relationen (102) und aus der letzten folgt nach (48) $N_p \mu^p = 0$, $T_p \mu^p = 0$. Da aber (49) $T_p = t\lambda_p$ ist, *so muß* $t = 0$ *sein,* d. h. ξ_1^i *ist im* R_3^∞ *eine Torse.*

Zum Abschluß zeigen wir, daß in unserem Falle das „System" der Schmiegungsebenen der μ^p-Nullinien eine Hypertorse des R_4 bildet. Wegen $N_p = \varkappa \mu_p$ hat die dritte Gleichung (48) die Gestalt

$$(104) \qquad \frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} = \mathsf{M}_p \xi_1^i + \varkappa \mu_p \eta_1^i + R_p \xi_2^i.$$

Die Fläche

$$(105) \qquad z_i(y_1 y_2 \tau) = x_i(y_1 y_2) + \tau \xi_1^i(y_1 y_2) - \frac{f+\tau}{\varkappa} \xi_2^i(y_1 y_2)$$

ist, wie wir jetzt zeigen, nur von zwei Parametern abhängig und eine Torse des R_4, deren Tangentialebenensystem das System (103) ist.

In der Tat! Aus (48), (61) und (104) folgt:

$$(106) \qquad \frac{\partial z_i}{\partial y_p} \equiv \left(f\mu_p + \tau \mu_p - \frac{f+\tau}{\varkappa} \varkappa \mu_p\right) \eta_1^i \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\, (\xi_1^i \xi_2^i).$$

Desgleichen gilt nach (105):

$$(106') \qquad \frac{\partial z_i}{\partial \tau} \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\, (\xi_1^i \xi_2^i),$$

also besteht eine Relation $\Phi_1 \frac{\partial z_i}{\partial y_1} + \Phi_2 \frac{\partial z_i}{\partial y_2} + \Phi \frac{\partial z_i}{\partial \tau} = 0$, d. h. z_i ist nur von zwei Parametern abhängig. Für $y_1 =$ konst., $y_2 =$ konst. ist (105) eine Gerade, somit ist die Fläche (105) eine Regelfläche.

Wir fixieren auf der Erzeugenden y_1, y_2 durch τ einen Punkt der Regelfläche.

Die Tangentialebene im Punkte y_1, y_2, τ ist nach (106), (106'), (105)

$$(107) \qquad z_i + \mathsf{A}\xi_1^i + \mathsf{B}\xi_2^i = x_i + \bar{\mathsf{A}}\xi_1^i + \bar{\mathsf{B}}\xi_2^i,$$

also die Ebene (103) für y_1, y_2.

Die Tangentialebene hängt demnach von τ nicht ab, *jede Ebene* (103) *des „Systems" tangiert die Fläche* (105) *längs der ganzen Erzeugenden* y_1, y_2.

Damit ist auch bewiesen, daß die Fläche (105) eine Torse ist, also das Ebenen„system" (103) eine Hypertorse [7]).

---

[7]) Unter einer Hypertorse verstehen wir die Schar der Schmiegungsebenen einer Raumkurve.

Denn wenn eine Regelfläche die Eigenschaft besitzt, daß die Tangentialebene in einem Punkte längs der Erzeugenden durch diesen Punkt Tangentialebene ist, so ist diese Regelfläche eine Torse. Den Beweis bringen wir für den R_n.

Sei $z_i = x_i(s) + t\varphi_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, die gegebene Regelfläche und s, t; s, τ zwei Punkte der Erzeugenden s. Die Gleichheit der Tangentialebenen hat eine Relation

$$(108)\qquad x_i + t\varphi_i + \mathsf{A}(x_i' + t\varphi_i') + \mathsf{B}\varphi_i = x_i + \tau\varphi_i + \bar{\mathsf{A}}(x_i' + \tau\varphi_i') + \bar{\mathsf{B}}\varphi_i$$

zur Folge, d. h. es muß eine Relation

$$(109)\qquad \alpha\varphi_i + \beta x_i' + \gamma\varphi_i' = 0$$

bestehen.

Indem wir nur den allgemeinen Fall $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ diskutieren, setzen wir $\bar{x}_i = x_i + \frac{\gamma}{\beta}\varphi_i$, woraus $\bar{x}_i' = p\varphi_i$ folgt. Für

$$z_i = \left(x_i + \frac{\gamma}{\beta}\varphi_i\right) + \left(t - \frac{\gamma}{\beta}\right)\varphi_i$$

erhalten wir, $p \neq 0$ vorausgesetzt: $z_i = \bar{x}_i + T\bar{x}_i'$, d. h. Torse.

Für die nichtdiskutierten Fälle ergibt sich ebenfalls dasselbe Resultat (Zylinder, Kegel). Wir können demnach das Ebenen„system" (103) in der Gestalt:

$$(110)\qquad z_i = \tilde{x}_i(s) + \mathsf{A}\tilde{x}_i'(s) + \mathsf{B}\tilde{x}_i''(s)$$

darstellen und $\tilde{x}_i + \mathsf{A}\tilde{x}_i'(s)$ stellt dann die eingehüllte F_2 (105) dar. Da für die zugrunde liegende F_2 die μ^ν-Nullinien in (110) liegen, so hat diese F_2 die Darstellung:

$$(111)\qquad z_i = \tilde{x}_i(s) + \mathsf{A}(sy)\tilde{x}_i'(s) + \mathsf{B}(sy)\tilde{x}_i''(s).$$

Umgekehrt ist für jede solche F_2 (121) $s =$ konst. eine Nullinie.

In der Tat, setzt man $y_1 = s$, $y_2 = y$, so folgt $B_{22} = 0$, d. h. $dy_1 = 0$ ist eine Nullrichtung; aus dem soeben Bewiesenen und der Tatsache, daß die Kurven $s =$ konst. der Fläche (111), von denen wir gezeigt haben, daß sie Nullinien sind, eben sind, folgt dann, daß die eine Mantelfläche des Strahlensystems, in dem der R_3^∞ von den Tangentialebenen der F_2 (111) geschnitten wird, eine Torse sein muß.

Somit ist (111) die allgemeinste Fläche dieser Art ($t = 0$).

Es ist somit der Satz bewiesen:

Im Falle die Mantelfläche ξ_1^i des Strahlensystems der Tangentialebenen im R_3^∞ eine Torse ist, umhüllen die Schmiegungsebenen der μ^ν-Nullinien $x_i + \mathsf{A}\xi_1^i + \mathsf{B}\xi_2^i$ eine Torse im R_4 und umgekehrt.

Anhang. *Eine zweite Konstruktion der konjugierten Flächen* (86) *und* (88) *einer* F_2: $x_i = x_i(y_1 y_2)$.

Die Tangentialebene eines Punktes P der F_2 wird von jeder unendlich benachbarten im Flächenpunkte P geschnitten. Eine Ausnahme bilden jene unendlich benachbarten Tangentialebenen, die Punkten entsprechen, die auf einer Nullinie durch P liegen.

Wir wollen nun die Schnittpunkte solcher unendlich benachbarter Tangentialebenen berechnen. Nach (84) genügt es nicht, in der Reihenentwicklung die Glieder der ersten Ordnung allein zu berücksichtigen; wir suchen den Schnittpunkt der Tangentialebenen der Punkte $P(y_i(t))$ und $\overline{P}(y_i(t+\varepsilon))$ und den Grenzpunkt dieses Schnittpunktes für $\lim \varepsilon = 0$. Bei Berücksichtigung der Entwicklungsglieder zweiter Ordnung besteht das System:

$$(112)\qquad \begin{aligned} x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\eta_1^i = x_i &+ \varepsilon \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\lambda^p + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q \\ &+ \overline{\mathsf{A}}\left(\xi_1^i + \varepsilon \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q\right) \\ &+ \overline{\mathsf{B}}\left(\eta_1^i + \varepsilon \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\lambda^p + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \eta_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q\right),^{8)} \end{aligned}$$

aus dem wir A, B, $\overline{\mathsf{A}}$ und $\overline{\mathsf{B}}$ zu berechnen haben.

Nun gilt nach (61) und (51), sobald wir λ^p so normieren, daß $\mu_p \lambda^p = 1$ ist:

$$(113)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q \equiv f\,\eta_2^i, \quad \operatorname{mod}(\xi_1^i, \eta_1^i), \\ \text{ebenso nach (51)} \\ \left(\dfrac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q \equiv \eta_2^i, \quad \left(\dfrac{\partial^2 \eta_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q \equiv \varrho\,\xi_2^i + \cdot\,\eta_2^i, \quad \operatorname{mod}(\xi_1^i, \eta_1^i). \end{array} \right.$$

Wir erhalten demnach für die Koeffizienten von η_2^i, ξ_2^i von (112) $\left(\dfrac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0,\ \dfrac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv \eta_2^i\right)$, $\operatorname{mod}(\xi_1^i, \eta_1^i)$:

$$(114)\qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 f + \overline{\mathsf{A}}\,\dfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \overline{\mathsf{B}}\left(\varepsilon + \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot\right) \\ 0 = \overline{\mathsf{B}}\,\varrho. \end{array} \right.$$

---

[8]) Für den hier verwendeten Parameter t, hat die Nullinie $y_i = y_i(t)$ das Differentialgleichungssystem: $y_r'' + \left\{ {pq \atop r} \right\} y_p' y_q' = 0$. $B_{pq} y_p' y_q' = c$ ist ja ein Integral dieses Systems, somit die Nullinie bei Benutzung eines geeigneten Parameters eine

Lassen wir den Ausartungsfall $\varrho = 0$ beiseite, so erhalten wir $\bar{\mathsf{B}} = 0$, $\bar{\mathsf{A}} = -f$.

Die Koeffizienten der Vektoren ξ_1^i, η_1^i in (112) wieder ergeben $\lim\limits_{\varepsilon=0} \mathsf{B} = \bar{\mathsf{B}}$, $\lim\limits_{\varepsilon=0} \mathsf{A} = \bar{\mathsf{A}}$. *Somit ist*

$$z_i = x_i - f\,\xi_1^i$$

der Schnittpunkt unendlich benachbarter Tangentialebenen der λ^ν-Nullinie, und ebenso $\tilde{z}_i = x_i - e\,\eta_1^i$ der Schnittpunkt unendlich benachbarter Tangentialebenen der μ^ν-Nullinie.

Im ausgearteten Falle, daß das Ebenensystem eine F_2 einhüllt, erhalten wir als Schnittfigur des Schnittes unendlich benachbarter Ebenen somit die drei Punkte x_i, z_i und $\tilde{z}_i$.

In obiger Konstruktion ist auch ein recht einfacher Beweis für die projektive Invarianz der Nullinien und der Flächen z_i und $\tilde{z}_i$ enthalten.

(Eingegangen am 30. Januar 1926.)